

**MAT/1** Algebrák reprezentációelmélete I.

Ágoston István – AGIKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Öröklődő algebrák reprezentációelmélete. Gráfalgebrák és reprezentációik. A gráfalgebrák szerkezete. Euler- és Tits-forma. Gráfok és kvadratikus alakok, Dynkin- és euklideszi gráfok. A geometriai reprezentációelmélet elemei: reprezentációs tér, algebrai csoportok, a reprezentációs tér orbitjai. A véges reprezentációtípus esete: a Dynkin-gráfok reprezentációi. Az euklideszi eset. Az Auslander–Reiten-eltolt. Coxeter-transzformációk. Modulások defektje. Preprojektív és preinjektív modulások. Reguláris modulások. Példák: a Kronecker-algebra reprezentációi.

Ajánlott irodalom:

Crawley-Boevey: Lectures on representations of quivers

**MAT/2** Algebrák reprezentációelmélete II.

Ágoston István – AGIKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

A reprezentációelmélet alapjai: direkt fölbonthatatlan modulások, Azumaya–Remak–Krull–Schmidt-tétel. A homológikus algebra elemei, az Ext funktor. Bal-, ill. jobb-minimális morfizmusok, balról, ill. jobbról majdnem fölhasadó morfizmusok. Irreducibilis leképezések. Majdnem fölhasadó, azaz Auslander–Reiten-sorozat, kapcsolatuk az irreducibilis morfizmusokkal. Modulások transzponáltja. A projektíven stabil, ill. injektíven stabil moduluskategóriák. Modulások Auslander–Reiten-eltoltja. Az Auslander–Reiten-képletek. A majdnem fölhasadó sorozatok létezése. Irreducibilis morfizmusok projektív, illetve injektív modulások esetén. Algebrák Auslander–Reiten-gráfja, példák. Az első Brauer–Thrall-sejtés Auslander-féle bizonyítása, a Harada–Sai-lemma. Csoportalgebrák, Higman tétele.

Ajánlott irodalom:

Auslander-Reiten-Smalø: Representation Theory of Artin Algebras

**MAT/3** Homológikus algebra

2025. szeptemberétől: Fejezetek a homológikus algebrából

Ágoston István – AGIKAAT.ELTE

Zábrádi Gergely

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

A Hom és a tenzor funktor (projektív, injektív és lapos modulások). Speciális gyűrűosztályok homológikus tulajdonságai (féligegyszerű, von Neumann-reguláris, öröklődő, kvázi-Frobenius gyűrűk). Komplexusok homológiái: homológicsoportok, projektív és injektív föloldások. Derivált funktorok (az Ext és a Tor funktorok fölépítése és alaptulajdonságai). Egzakt sorozatok és az Ext funktor (Yoneda-szorzat, Ext-algebrák). Homológikus dimenziók (projektív és injektív dimenzió, globális dimenzió, Hilbert syzygy tétele, finitisztikus dimenzió, a finitisztikusdimenzió-sejtés). Homológikus módszerek a reprezentációelméletben (majdnem fölhasadó sorozatok, Auslander–Reiten-gráf). Derivált kategóriák (triangulált kategóriák, lánckomplexusok, homotópiakategória, kategóriák lokalizálása, algebrák derivált kategóriája, Morita-elmélet). Spektrális sorozatok.

Ajánlott irodalom:

Rotman: An Introduction to Homological Algebra

**MAT/4** Algebrai logika

Andréka Hajnal – ANHMAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Logikai rendszerek, teljesség, eldönthetőség, definiálhatóság. Algebraizálás, cilindrikus, poliadikus és relációalgebrák, reprezentációk. Modellek a fizikában: a speciális és az általános relativitáselmélet.

**MAT/8** Pénzügyi folyamatok elemzése 4.

Arató Miklós - ARMKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Immunizáció.

Részvények és kötvények folytonos időben.

A „Görögök”.

Egzotikus és amerikai opciók.

Opciók árazása és a parciális differenciálegyenletek.

Ajánlott irodalom:

R. J. Elliott – E. P. Kopp: Pénzpiacok matematikája, Typotex Kiadó, Budapest, 2000.

Száz János: Tőzsdei opciók, Tanszék Kft., Budapest, 1999.

A. N. Shiryaev: Essentials of Stochastic Mathematical Finance. World Scientific, Singapore, 1999.

**MAT/9** Többváltozós statisztikai módszerek

Arató Miklós - ARMKAAT.ELTE

12 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

A többdimenziós normális eloszlás paramétereinek becslése. Mátrixértékű eloszlások. A Wishart-eloszlás: sűrűségfüggvénye, determinánsa, inverzének várható értéke. Többdimenziós normális eloszlás paramétereire vonatkozó hipotézis vizsgálat. Függetlenségvizsgálat. Normalitásvizsgálat.

Lineáris regresszió.

A változók közötti kapcsolat mérése: korrelációs együttható, parciális korreláció, kanonikus korreláció.

Főkomponensanalízis, faktoranalízis, szórásanalízis, diszkriminanciaanalízis.

Diszkrét, többváltozós modellek, Kontingenciatáblák. Maximum-likelihood becslés loglineáris modellben.

Kullback-Leibler-féle divergencia. Lineáris és exponenciális eloszláscsaládok. Az L-vetület numerikus meghatározása (Csiszár-féle módszer, Darroch-Ratcliff-eljárás).

Ajánlott irodalom:

K.V. Mardia, J.T. Kent and J.M. Bibby: Multivariate Analysis, Academic Press, 1979

Móri T. – Székely G. (szerk.): Többváltozós statisztikai módszerek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.

C. R. Rao: Linear statistical inference and its applications, Wiley and Sons, 1968

**MAT/10** Internetszeminárium-Analitikus félcsoportok

Bátkai András – BAAKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételtető

Évente változó tematikájú, a funkcionálanalízis vagy a parciális differenciálegyenletek témájából nemzetközi együttműködésben tartott szeminárium. Az első félévben előadás jelleggel, a második félévben pedig szemináriumi előadás formájában. Bővebb információt a felelős oktató ad.

**MAT/11** Invariáns altér probléma

Bátkai András – BAAKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Redukáló altér, Wold felbontás. Kontrakciók izometrikus és unitér dilatációi. Az invariáns altér probléma, variációi pozitív operátorokra Banach hálókön. Ellenpélda Banach terekben. Néhány modern eredmény. Szőkefalvi-Nagy B.- C. Foias: Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space B. Beauzamy: Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces

**MAT/12** Kiegészítő fejezetek a funkcionálanalízisből

*Bátkai András – BAAKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Spektrálemélet, Riesz-Dunford függvénykalkulus, differenciáloperátorok spektruma. Spektrálfelbontás. Hilbert-Schmidt és Trace class operátorok, szinguláris értékek. A "spectral shift" függvény. Fredholm operátorok, integráloperátorok, konvolúció-operátorok. Index. Gohberg-Goldberg-Kaashoek: Classes of Linear Operators I.

**MAT/13** Operátorfélcsoportok Hilbert térben

*Bátkai András – BAAKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, ismételtető

Kontrakciófélcsoportok unitér dilatációja, Szőkefalvi stabilitási tétele. Gearhart tétele, Datko-Pazy tétel. Alkalmazások hullámegyenletekre. Normafolytonosság jellemzése Hilbert térben. Fourier-multiplikátorok alkalmazása. Engel-Nagel: One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations

**MAT/14** Parabolikus maximális regularitas

*Bátkai András – BAAKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Analitikus félcsoportok, inhomogén differenciálegyenletek, szemilineáris egyenletek. Linearizált stabilitás. Megoldások regularitása térben és időben. Lunardi: Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems

**MAT/15** Szemikonkáv függvények

*Bátkai András – BAAKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Szemikonkáv függvények alaptulajdonságai. Hamilton-Jacobi egyenletek. "Viscosity solutions". Néhány variációszámítási probléma. Optimális kontroll. Cannarsa-Sinestrari: Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations and Optimal Control

**MAT/18** Konvex testek és rácspontok I.

*Naszódi Márton*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Minkowski 1. tétele. Blichfeldt tételei, Minkowski tételének általánosításai. A Rédei-Hlawka-tétel. Szukcesszív minimumok. Minkowski 2. tétele, extrémális testek. Paralleloéderek és rácspontok Voronoi-politópjai. A Voronoi-bázis és a Voronoi-sejtés.

Ajánlott irodalom:

- 1) P.M. Gruber, C.G. Lekkerkerker: Geometry of Numbers. North-Holland Mathematical Library, 1987.

**MAT/19** Konvex testek és rácspontok II.

*Naszódi Márton*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Redukcióelmélet. Hermite-, Minkowski-, Lovász-féle redukált bázis. Mahler kiválasztási tétele. Rácsszerű elhelyezések és fedések. (A Minkowski-Hlawka-tétel, rácsszerű gömbelhelyezések.) Lapossági tételek. Fedési sugár.

Ajánlott irodalom:

1) P.M. Gruber, C.G. Lekkerkerker: Geometry of Numbers. North-Holland Mathematical Library, 1987.

**MAT/20** Matematikai programozás és konvex geometria I.

Bezdek Károly – BEKKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

A lineáris programozás alapfeladata. A dualitás elve. A Fourier–Motzkin-elimináció. Szimplexmódszer és Hirsch sejtése. Egyszerű és szimpliciális politópok. Politópok gráfjai: Kalai tétele, Balinski tétele, Steinitz tétele. Politópok diagramjai (Gale-diagram).

**MAT/21** Matematikai programozás és konvex geometria II.

Bezdek Károly – BEKKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Politópok kevés csúccsal (az alsó korlát tétel). Zonotópok és mozaikok. A Dehn–Sommerville-egyenletek, a felső korlát tétel. Az ellipszoidmódszer. A Löwner–John-ellipszoid, a Dworetzki–Milman-tétel és alkalmazásaik. A Karmarkar-módszer.

**MAT/22** Fejezetek a topológiából

Fehér László

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

A finomítás fogalma. Lokálisan véges, diszkrét,  $\delta$ -lokálisan véges és  $\delta$ -diszkrét halmazrendszerek. Stone tétele /metrizálható térben minden nyílt fedésnek van lokálisan véges  $\delta$ -diszkrét nyílt finomítása/. Parakompaktság. Lindelöf terek. Egységosztás. Metrizációs terek. Nagata-Szmirnov tétele. Bing tétele. A sündisznó tér. Kowalski tétele /minden  $\mu$  számosságához tartozik univerzális  $\mu$ -súlyú metrikus tér/. Topológiánál finomabb folytonossági struktúrák. A Riesz-féle láncoltság. Weil uniform tere és a Jefremovics- Szmirnov -féle szomszédsági tér. Ezek kapcsolata. Teljes és teljesen korlátos uniform terek. Uniform terek metrizációs tétel. Topologikus csoportok. Hahn-Mazurkiewicz tétele. Whyburn tétele. Ívszerűen és lokálisan ívszerűen összefüggő terek. Kontinuumok és általánosított kontinuumok.

Ajánlott irodalom:

1. R. Engelking: General Topology /Warszawa, 1977/. 2. G. T. Whyburn: Topological Analysis /Princeton, 1964/ 3. F. Riesz: Steteitsbegriff und abstrakte Mengenlehre. Atti del IV. Congresso Internazionale dei Matematici. Roma 1908. vol. II. Roma 1909. 18-24. /Riesz Frigyes Összegyűjtött munkái I. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960. 155-161/. 4. ЕФРемоѳЧЧ В.А. Теомемѳва ѳЛлѳосѳу I. MAT. Сѳ. 31 (1951),189-200. 5. Smirnov. Ju. M., On proximity spaces, English translation, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 38 /1964/. 5-35/. 6. H. Hahn, Über die allgemeinste ebene Punktmenge, die stetiges Bild einer Strecke ist. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 23 /1914/, 318-322. 8. S. Mazurkiewicz, Sur les lignes de Jordan, Fund. Math. 1 /1920/, 166-209.

**MAT/23** Diszkrét geometria I.

Naszódi Márton

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Euklideszi, szférikus és hiperbolikus geometria. 2-dimenziós szabályos és félig szabályos mozaikok. A  $(r-R)$ -pontrendszerek. Cellarendszerek. Egyszerű szélsőérték-problémák. Hajós-lemma. Sűrűség korlátos tartományban. Kongruens körök elhelyezése (általános tételek).

**MAT/24** Diszkrét geometria II.

Böröczky Károly – BOKKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Sűrűség az euklideszi síkon. A hiperbolikus sűrűség definíciójának nehézségei. Kongruens körökkel való fedés az állandó görbületű felületeken (általános tételek).

Tammes-probléma. Dowker-tételek. Körelhelyezések, homogeneitás. Konvex lemezek elhelyezései az euklideszi síkon. Konvex lemezekkel való fedés az euklideszi síkon. Többszörös elhelyezések és fedések.

**MAT/25** Diszkrét geometria III.

Böröczky Károly – BOKKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Speciális elrendezések az állandó görbületű felületeken (tágasság, szorosság, szoliditás, térigény, szeparálhatóság). Általánosított elrendezések. Felhők, blokkolás.  $E^n$ -ben a rácsoalaptulajdonságai, redukciók, kapcsolat a kvadratikus formákkal. Paralleloéderek. Szabályos és félig szabályos poliéderek, politópok. Magasabb dimenziós rácsszerű gömbelhelyezések, gömbfedések ill. nem feltétlen rácsszerű gömbelrendezések.

**MAT/26** Kombinatorikus geometria I.

Kiss György

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Pontok és egyenesek illeszkedési kérdései. Sylvester-problémakör, gráfok keresztezési száma. Helly-típusú tételek és alkalmazásaik. Túleszűrési problémák.

**MAT/27** Kombinatorikus geometria II.

Böröczky Károly – BOKKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Pontrendszerek szeparációja. Hipersíkrendszerek tulajdonságai, alrendszerek bonyolultsága. Pontok közötti távolságok száma (egységtávolságok, minimális illetve maximális távolságok). Erdős problémakör I.

**MAT/28** Diszkrét dinamikus rendszerek

Buczolich Zoltán – BUZKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Topologikus tranzitivitás és minimalitás. Omega limeszhalmazok. Szimbolikus dinamikus rendszerek. A topologikus Bernoulli-shift. A kör leképezései. A forgatási szám létezése. Invariáns mértékek. Krylov-Bogolubov tétel. Minimális homeomorfizmusok és invariáns mértékek. Kompakt Abel-csoportok forgatásai, egyféleképpen ergodikus transzformációk és minimalitás.

Unimodális leképezések. Gyúró sorozat (kneading sequence). Végperiodikus szimbolikus pályájú pontok periodikus pontokhoz tartanak. Szimbolikus pályák előjeles lexikografikus rendezése. A megengedett szimbolikus pályák halmazának karakterizációja. A topologikus entrópia ekvivalens definíciói. A topologikus entrópia tulajdonságai. Intervallumleképezések cikk-cakk száma. Markov-gráfok. Sharkovszkij tétel. Az ergodelmélet alapjai. Maximális ergodtétel és Birkhoff ergodtétel.

Kötelező irodalom:

Ajánlott irodalom: A. Katok, B.Hasselblatt: Introduction to the modern theory of dynamical systems. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

W. de Melo, S. van Strien, One-dimensional dynamics, Springer Verlag, New York (1993).

I. P. Cornfeld, S. V. Fomin and Ya. G. Sinai, Ergodic Theory, Springer Verlag, New York, (1981).

**MAT/29** Ergodelmélet

Buczolich Zoltán – BUZKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Példák. Konstrukciók. von Neumann L2 ergodtétel. Birkhoff–Hincsin pontonkénti ergodtétel.

Poincaré visszatérési tétel és Ehrenfest példája. Hincsin tétele halmazok visszatéréséről.

Halmos tétele a visszatéréssel ekvivalens tulajdonságokról. Ergodikussággal ekvivalens tulajdonságok. Indukált transzformáció mértéktartása és ergodikussága.

Kac lemma. Kakutani–Rohlin lemma. Bernoulli shift, egységkör forgatásainak illetve a tórusz eltolásainak ergodikussága. Keverés (definíciók). Rényi tétele erősen keverő transzformációkról. Bernoulli shift erősen keverő. Koopman-von Neumann lemma. Gyenge keveréssel ekvivalens tulajdonságok. Banach elv. Ergodtétel bizonyítása a Banach elvvel. Integrálok differenciálása. Wiener lokális ergodtétele. Lebesgue terek és a feltételes várható érték tulajdonságai.

Entrópia a fizikában és az információelméletben. Felosztás és egy transzformáció metrikus entrópiájának definíciója. Feltételes információ és entrópia. "Entrópia metrika".

A feltételes várható érték mint L2-beli vetítés. Kolmogorov-Szináj tétele generátorokról. Krieger generátor tétele (bizonyítás nélkül).

Ajánlott irodalom:

K. Petersen, Ergodic Theory, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 2, Cambridge University Press, (1981).

I. P. Cornfeld, S. V. Fomin and Ya. G. Sinai, Ergodic Theory, Springer Verlag, New York, (1981).

**MAT/30** Fejezetek a dinamikus rendszerekből I.

Buczolich Zoltán – BUZKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Dimenziófogalmak ismételése. Tömeg szétoztási elv. Iterált függvényrendszerek (IFS-ek). IFS-ek attraktorainak kódolása. OSC. Invariáns mértékek PIFS-ek attraktorain. Implicit módszerek a dimenzióbecslésre. Süti vágók (alppélda nem lineáris rendszerre). Korlátos variációs elv. Korlátos torzítási elv. Szubadditív és szubmultiplikatív sorozatok. Mértékek gyenge konvergenciája, gyenge kompaktság. Termodinamikus formalizmus: A topologikus nyomás és a Gibbs mérték létezésére vonatkozó tétel. A dimenzióformula. Invariáns mértékek: Sinai-Bowen-Ruelle operátor, invariáns mérték létezésére vonatkozó tétel. Gibbs mértékek ergodikussága. Entrópia és a variációs elv.

Kötelező irodalom:

Ajánlott irodalom: K. Falconer Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. Second edition. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2003.

**MAT/31** Kvaziuniform terek

Császár Ákos – CSAMAAE.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Hiányzó leírás.

**MAT/32** Topogenitások

Császár Ákos – CSAMAAE.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Hiányzó leírás.

**MAT/33** A nyálábok és konnexiók általános elmélete

Szabó Szilárd

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Serre-féle nyalábok, lokálisan triviális nyalábok, vektornyalábok, principális nyalábok. G-struktúracsoportú nyalábok. A struktúracsoport redukciója, felemelése. Nyaláb homotopikus sorozata. Műveletek nyalábokkal. Nyalábok osztályozási tétele, univerzális nyalábok. Konnexiók megadási módjai vektor- és principális nyalábokon. Párhuzamos eltolás, holonómiacsoport, redukciós tétel. Görbületi operátor, görbületi tenzor. Cartan-féle struktúraegyenlet, Bianchi-azonosság. Az Ambrose–Singer-tétel.

Ajánlott irodalom:

- 1) M.M. Postnikov: Lecons de geometrie, Geometrie differentielle, Semester 4.

#### **MAT/34** Algebrai görbék

Szabó Szilárd

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Alapvető algebrai geometria. Affin algebrai halmazok, Hilbert bázistétele és a nullhelytétel. Irreducibilis affin algebrai halmazok. Zariski-topológia. Koordinátagyűrű, racionális leképezések, regularitás. Izomorfizmusok és biracionális izomorfizmusok. Dimenzió. Lokális gyűrű. Az érintőtér és a beágyazási dimenzió. Sima pontok. Projektív és kváziprojektív sokaságok.

Síkgörbék geometriája. Pont és érintő multiplicitása. Két görbe metszési multiplicitása egy pontban. Bézout tétele. Felső becslés a szinguláris pontok számára. Pascal tételének általánosítása. Plücker tétele egy pontból egy görbéhez húzható érintők számáról. Inflexiós pontok. Harmadfokú síkgörbék Weierstrass-féle normálalakja. Inflexiós pontok egy sima harmadfokú síkgörbén. Csoportstruktúra harmadfokú síkgörbéken. Salmon tétele. Szingularitások eltüntetése Cremona-transzformációval és felfújással. Szingularitások osztályozása.

Ajánlott irodalom:

- 2) Kollár János: Algebrai görbék, Matematikai Lapok **28**, No 1-3, 153–198, (1980).
- 3) R.J. Walker: Algebraic Curves, Princeton University Press, 1950.

#### **MAT/35** Lie-csoportok

*Szabó Szilárd*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Lie-csoportok, lokális Lie-csoportok és Lie-algebrák kapcsolata. Lie-funktorok. Egy-paraméteres részcsoporthok és az exponenciális leképezés. A Hausdorff–Campbell–Baker-sor és a Dynkin-polinomok. Univerzális burkoló algebra, a Pincaré–Birkhoff–Witt-tétel, Hopf-algebrák. A lokális Lie-csoportok globalizálhatósága, Cartan tétele. Lie-algebrák és reprezentációik, Nilpotens és feloldható Lie-algebrák, Jacobson és Engel tételei, féligegyszerű és redukzív Lie-algebrák. Reprezentáció nyomformája, Killing-forma, a feloldhatóság és féligegyszerűség Cartan-féle kritériumai, Casimir-operátorok. Lie-algebrák kohomológiái, Whitehead tétele és alkalmazásai, Levi-Mal'cev-tétel. Ado tétele.

Ajánlott irodalom:

- 1) M.M. Postnikov: Lectures in Geometry, Semester 5, Lie Groups and Lie Algebras, Mir, Moscow, 1986.
- 2) J-P. Serre, Lie algebras and Lie groups, 2<sup>nd</sup> ed., Springer, 1992.

#### **MAT/36** Nem-sztenderd analízis

*Csirmaz László – CSLLAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Elemi és nem elemi analízis nem-sztenderd módszerekkel. Logikai eszközök: kompaktsági tétel, magasabbrendű logika, bővítés. Elemi analízis, valós függvénytan (Arzela és Ascoli tételei), topológikus terek, Urison metrizációs tétele; komplex függvénytan: polinomok gyökeinek eloszlása;

nagy Picard tétel, Julia irányok és általánosítások.

Csirmaz Laszlo: Nem-sztenderd analízis, Typotex, 1999

Abraham Robinson: Non-standard Analysis, Princeton Univ. Press, 1996

**MAT/37** Bevezetés az információelméletbe

*Csiszár Villő - CSVKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Forráskódolás változó hosszúságú és blokk-kódokkal. Entrópia és formális tulajdonságai. I-divergencia és formális tulajdonságai. Típusok és tipikus sorozatok. A zajos csatorna fogalma, csatornakódolási tételek. Rate-distortion elmélet. Csatornakapacitás és kiszámítási módjai. Forrás- és csatornakódolás lineáris kódokkal. Több felhasználós hírközlő rendszerek: korrelált források egyedi kódolása, több bemenetelű csatornák.

Ajánlott irodalom:

Csiszár – Körner: Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems. Akadémiai Kiadó, 1981.

Cover – Thomas: Elements of Information Theory. Wiley, 1991.

**MAT/38** Információelméleti módszerek a statisztikában

*Csiszár Villő*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Hipotézisvizsgálat: exponenciális értelemben optimális próbák egyszerű és összetett null-hipotézis tesztelésére, az optimális hibaexponens jellemzése I-divergencia segítségével. Exponenciális eloszláscsaládok, információsvetület és maximum likelihood becslés kapcsolata. A maximum likelihood becslés határeloszlása. Kontingenciatablázatok elemzése információelméleti módszerrel. A minimális leírási hossz módszer. Modellválasztás információs kritérium alapján.

Ajánlott irodalom:

Csiszár – Shields: Information Theory and Statistics: a tutorial. Now Publishers, 2004. Elérhető online:

<http://www.renyi.hu/~csiszar/Publications/>

Information\_Theory\_and\_Statistics:\_A\_Tutorial.pdf

**MAT/39** Nemlineáris optimalizálási módszerek

oktató: *Illés Tibor - ILTKAAT.ELTE*

*Csizmádia Zsolt Gábor - CSZEAQT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, ismételtető

Feltétel nélküli minimalizálás. Szükséges és elégséges optimalitási feltételek. Iránymenti keresés. Algoritmusok. Feltételes minimalizálás. Belsőpontos módszerek sima konvex optimalizálásra. Megengedett irányok módszere. Gradiens és vetített gradiens módszerek. Teljes információjú, nem kooperatív, konkáv hasznosság függvényű véges játékok. Brower- és Kakutani-féle fixpont tételek. Nikaidó-tétel. Legjobb válaszok módszere. Nikaidó-Isoda tétel.

**MAT/40** Az újkori analízis története

*Czách László - CZLMAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, ismételtető

Hiányzó leírás.

**MAT/41** Differenciálszámítás Banach-terekben

*Czách László - CZLMAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Folytonos lineáris és multilineáris leképezések elmélete, Banach-térbel Banach-térbe képező függvények első és magasabb rendű deriváltjainak értelmezése, Young-tétel,

Lagrange-egyenlőtlenség, Taylor-sor, lokális diffeomorfizmus-tétel, lokális szuperjekció-tétel, lokális injekció-tétel, valós értékű függvények szélsőértéke és feltételes szélsőértéke. Czách László: Differenciálszámítás normált terekben (elektronikus jegyzet).

**MAT/42** Topologikus vektorterek

*Tarcsay Zsigmond*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Lineáris topológiák alaptulajdonságai, projektíven előállított lineáris topológiák, lokálisan kompakt topologikus vektorterek, metrizálható topologikus vektorterek, lokálisan konvex és polinormálható terek, induktívan előállított lokálisan konvex terek, Krein-Milman tétel, a Hahn-Banach tétel geometriai formája, korlátosság topologikus vektortéren és a normálhatóság kritériuma, lokálisan konvex lineáris függvényterek, Ascoli-tételek, Alaoglu-Bourbaki tétel, Banach-Alaoglu tétel, Banach-Steinhaus tétel, a dualitás-elmélet elemei, dualitással kompatibilis topológiák, Mackey-Arens tétel, speciális lokálisan konvex terek (Mackey-terek, bornologikus terek, hordós terek, Montel-terek, reflexív terek).

Banach-algebrák és a Gelfand-reprezentáció, kommutatív komplex Banach algebra Gelfand-reprezentációja, holomorf függvényszámítás,  $B^*$ -algebrák és  $C^*$ -algebrák, első Gelfand-Najmark tétel és folytonos függvényszámítás, absztrakt Stone-tétel, pozitivitás  $C^*$ -algebrákban, Baer  $C^*$ -algebrák

Kötelező irodalom: Kristóf János Analízis IV. <http://cs.elte.hu/~krja>

**MAT/43** Bioinformatika Journal Club

*Miklós Dezső – MIDNAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

A szemináriumon elsősorban a hálózatok dinamikájáról és struktúrájáról szóló alapvető eredményeket fogjuk áttekinteni a diákok előadásában, főleg az újonnan megjelent *The Structure and Dynamics of Networks* (Mark Newman, Albert-Laszlo Barabasi, & Duncan J. Watts) könyv alapján, amely a mára már komoly irodalommal és történelemmel rendelkező témából az eddig megjelent legfontosabb cikkeket tartalmazza.

**MAT/44** Geometriai algoritmusok

*Pálvölgyi Dömötör – PADGABT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Konvex burok algoritmusok a síkban és magasabb dimenziókban.

Alsó becslések: Ben-Or tétele, momentum-görbe, ciklikus poliéder.

Síkdarabolás egyenesekkel. Nagy konvex sokszög keresése (parabolikus dualitás). Pont helyének visszakeresése síkdarabolásban.

A posta probléma. Voronoi diagrammok. Delaunay háromszögelés és alkalmazásai. Illeszkedési becslések.

Ajánlott irodalom: De Berg, Kreveld, Overmars, Schwartzkopf: *Computational geometry. Algorithms and applications*, Berlin, Springer 2000.

**MAT/45** Komb. Geometria szem.

*Pálvölgyi Dömötör – PADGABT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Klasszikus illeszkedési problémák. A különböző irányok száma, Scott-Ungar tétel A Szemerédi-Trotter becslés. Beck tétele.  $r$ -paraméteres görbeseregek, Pach-Sharir tétel.

Egyenesekkel való síkdarabolások szerkezete, szintek, zóna tétel.

Chazelle-Welzl tétel. Geometriai diszkrepancia.  
„Vágási lemma” egyenesekre és ponthalmazokra..

**MAT/46** Kombinatorika szeminárium

Simonovits Miklós – SIMPAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

A Rényi Intézet hagyományos kombinatorika szemináriuma.

Irodalom:

János Pach and Pankaj K Agarwal: Combinatorial Geometry J. Wiley and Sons, New York, 1995.

Jiri Matousek: Lectures on Discrete Geometry, Springer, 2002.

**MAT/48** Térbeli illeszkedések

Elekes György – ELGKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Hiányzó leírás:

**MAT/50** Approximáció elmélet szeminárium

Elekes Márton – ELMKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

A MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet Analízis osztálya heti szemináriuma a legfrissebb kutatási eredményekről, meghívott külföldi és magyar előadókkal. Hetente változó téma, általában angolul.

**MAT/51** Modern analízis szeminárium

Elekes Márton – ELMKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

A valós függvénytan és a geometriai mértékelmélet friss és modern eredményeit próbáljuk megérteni valamint továbbfejleszteni a diákokkal. Irodalom: - Modern analysis seminar With the students we try to understand and improve the recent modern results in real functions and geometric measure theory.

**MAT/52** Kockázatértékelés operációkutatási modelljei

Fábián Csaba – FACKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Kockázati mértékek és tulajdonságaik. Pénzügyi alkalmazásokban használatos speciális mértékek (SPAN, VaR, CVaR). Koherens kockázati mértékek, duális reprezentáció.

Kockázati mértékek és deviancia-mértékek összefüggése. Konvex kockázati mértékek optimalizálása: a Markowitz-féle mean/variance modell általánosításai.

Sztochasztikus dominancia fogalma. Másodrendű sztochasztikus dominancia

kapcsolata a különböző kockázati mértékekkel. Első- és másodrendű sztochasztikus dominanciát előíró optimalizálási modellek vizsgálata.

Kockázati mértékek használata többlépcsős sztochasztikus modellekben.

**MAT/53** Lineáris programozási programcsomagok

Fábián Csaba – FACKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Matematikai programozási eljárások implementációs kérdései.

LINDO, LINGO lineáris, nemlineáris és egészértékű programcsomag. A CPLEX lineáris, kvadratikusan és egészértékű programozási programcsomag.

Ajánlott irodalom:

Maros István: Computational Techniques of the Simplex Method, Kluwer, 2003

**MAT/54** LP programcsomagok

Fábián Csaba – FACKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Lineáris programozási eljárások összehasonlítása, implementálási kérdések. LP feladatok megfogalmazása, és az eredmény értelmezése. Az MPS input/output formátumtól a modellező eszközökig. Nehány LP megoldó megismerése: Excel Solver, LINDO, CPLEX. Modellező eszköz: GAMS. Irodalom: Maros, I.: Computational Techniques of the Simplex Method, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003.

**MAT/55** Operációkutatási programcsomagok

Jüttner Alpár

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Matematikai programozási feladatok megadása és az eredmény kiértékelése: fejlődés az MPS input/output formátumtól a modellező eszközökig.

Modellező eszközök bemutatása: XPRESS, GAMS, AMPL, AIMMS.

**MAT/56** Szimuláció

Fábián Csaba – FACKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Diszkrét momentum feladatok. Elemi események együttes bekövetkezésének valószínűségére vonatkozó becslések.

Véletlenszám-generátorok. Monte Carlo módszerek többdimenziós integrálok számítására. Elemi események együttes bekövetkezésének valószínűségére vonatkozó becslések alkalmazása többváltozós valószínűségi eloszlásfüggvény értékének becslésére.

Szimuláció alkalmazása optimalizálási feladatok megoldására: sztochasztikus kvázigradiens módszerek. Sztochasztikus dekompozíciós módszerek kétlépcsős sztochasztikus programozási feladatok megoldására.

Ajánlott irodalom:

Kall, P., Wallace, S.W., Stochastic Programming, Wiley, 1994.

Prékopa A., Stochastic Programming, Kluwer, 1995.

Birge, J.R., Louveaux, F.: Introduction to Stochastic Programming, Springer, 1997-1999.

**MAT/57** Sztochasztikus programozás

Mádi-Nagy Gergely

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Sztochasztikus modellek áttekintése példákon keresztül. A korlátok és célok különböző megfogalmazásai: várható értékkel, feltételes várható értékkel, valószínűséggel.

Egyszerű modellek felépítése, feladatok megfogalmazása és megoldása.

Alkalmazások bemutatása.

Statikus és dinamikus modellek. Az adódó sztochasztikus programozási feladatok matematikai jellemzése és megoldó módszereik.

Lonkonkáv mértékek alaptétele. Valószínűségi korlátok illetve valószínűséget tartalmazó célfüggvények logkonkávítása. Kiértékelésük közelítő szimulációs eljárásokkal.

Ajánlott irodalom:

Kall, P., Wallace, S.W., Stochastic Programming, Wiley, 1994.

Prékopa A., Stochastic Programming, Kluwer, 1995.

Birge, J.R., Louveaux, F.: Introduction to Stochastic Programming, Springer, 1997-1999.

**MAT/60** Algebrai topológia III.

Szűcs András – SZAKABT.ELTE

Fehér László – FELKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Homotopikus csoport, egzakt sorozat térpárra, fibrálások és Serre fibrálások, homotopikus egzakt sorozatuk. Szimpliciális approximáció, Freudenthal tétel. CW approximáció, Whitehead tétel, homotopikus kivágás, általánosított Freudenthal tétel, Addíciós tétel. Homológiák: szimpliciális, szinguláris és CW. Térpár, térhármas egzakt sorozatai, kis szimplexek lemma, kivágás, Mayer-Vietoris sorozat, CW komplexusra a különböző homológiák megegyeznek. A homológia elmélet axiómái, Hurewicz tétel, Lefschetz fixpont-tétel. A kohomológia definíciója, Extraordináris homológia és kohomológia elméletek, példák (stabil homotopikus csoportok, bordizmusok, kobordizmusok, K-elmélet)

Irodalom: Hatcher: Algebraic Topology,

<https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>

Szűcs András honlapja: <http://www.cs.elte.hu/~szucs/>

Topologia sáv jegyzet 1. félév.

**MAT/61** Algebrai topológia IV.

Szűcs András – SZAKABT.ELTE

Fehér László – FELKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Vektornyalábok osztályozása, Kapcsolat a proj. modulusokkal, K-csoport, Pontrjagin-Thom izomorfizmus, G-nyalábok osztályozása, Milnor konstrukció, Hopf tétel. Puppe sorozat, Kohomologikus egzakt sorozat, obstrukcióelmélet, Hirsch tétel, Whitney-Graustein tétel, Whitney trükk, h-kobordizmus tétel, az általánosított Poincaré hipotézis, Smale, Hirsch és Gromov tételei immerziókról.

Irodalom: Szűcs András honlapja: <http://www.cs.elte.hu/~szucs/>

Topologia sáv jegyzet 2. félév.

Husemoller: Fibre bundles

**MAT/62** Algebrai topológia V.

Szűcs András – SZAKABT.ELTE

Fehér László – FELKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Kohomológia fogalma, csésze szorzat és relatív változata, Univerzális együththató formula, Künneth formula De Rham kohomológia, a rot, grad és div kapcsolata, sapka szorzat (Leibnitz formula), Poincaré dualitás, Thom osztály (multiplikatívitas), szorzás duálisa a metszet, top. sokaság irányítása, fund. osztály, kompakt tartójú kohom, Alexander dualitás, Lefschetz tétel, Euler osztály,  $(e(TM), [M]) =$  Euler karakterisztika, karakterisztikus osztályok, Leray-Hirsch tétel, Euler osztály = zérushelye egy generikus szelésnek, Stiefel-Whitney osztályok, alkalmazások: immerzőkre Whitney tétele éles, szignatura kobordizmus invariáns, Pontrjagin-Thom tétel, Chern osztály és tulajdonságai, Pontrjagin osztály, Pontrjagin számok, Hirzebruch szignatura formulája, létezik egzotikus gömb.

Irodalom:

Milnor- Stasheff: Characteristic classes.  
Szűcs András honlapja: <http://www.cs.elte.hu/~szucs/>  
Topologia sáv jegyzet 3. félév.

**MAT/63** Algebrai topológia VI.

Szűcs András – SZAKABT.ELTE

Fehér László – FELKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Írányítható 3-sokaság paralellizálható, Gömbök stabil homotopikus csoportjai. Serre módszer a homotopikus csoportok kiszámolására, Spektrális sorozat, Serre tétel: Stabil dimenzióban a homotopikus csoport rangja megegyezik a homológia csoport rangjával. Mod C tételek (Hurewicz, Whitehead tételeinek Serre féle általánosításai), Serre tételei a gömbök stabil homotopikus csoportjainak p-komponenseiről,

Irodalom:

Kirby: The topology of 4-manifolds,

Mosher- Tangora: Cohomology operations and applications in homotopy theory,

Szűcs András honlapja: <http://www.cs.elte.hu/~szucs/>

Topologia sáv jegyzet 4. félév.

**MAT/64** Differenciáltopológia I.

Kalmár Boldizsár

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető Mikor lesz az immerzők, ill beágyazások tere sűrű altér az összes sima leképezések terében, vektornyalábok, érintőnyaláb, indukálás, csőszerű környezet, transzverzálitás,  $C^r$  topológia, metszési index hurkolódási együttható, Transzverzálitás tétel, Jet tér, Jet transzverzálitás tétel, öntranszv., Hopf invariáns, Morse elmélet, Thom izotópia lemája, Incidencia együtthatók, Pontrjagin konstrukció, összenyomási tétel, EHP sorozat, nehéz Freudanthal tétel,

Irodalom:

Szűcs András honlapja: <http://www.cs.elte.hu/~szucs/>

Topologia sáv jegyzet 4. félév.

Hirsch: Differential topology

**MAT/67** Diszkrét geometria IV.

ifj Böröczky Károly – BOKLABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Sűrűségbecslések gömbelhelyezésekre és fedésekre magas dimenziós euklideszi és szférikus terekben: Rogers korlátjai elhelyezésekre és fedésekre, a Blichfeld és a Kabatjanskij-Levenstein korlát elhelyezésekre. Ergodikus gömbelhelyezések és fedések a hiperbolikus térben, és tulajdonságaik.

**MAT/68** Geometria szeminárium

Fejes-Tóth Gábor – FETNACT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételtető

A MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet Geometria osztálya heti

szeminárium a legfrissebb kutatási eredményekről, meghívott külföldi és magyar előadókkal. Hetente változó téma, általában angolul.

**MAT/69** Lie-csoportok és Lie-algebrák I.

Fialowski Alice – FIAKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Kezdeknek: Bevezetés a Lie-csoportok, Lie algebrak elméletébe. Definíciók, sokaságok, csoportosíthatóság, stacionárius reszcsoport, klasszikus lineáris Lie-csoportok, kompakt Lie-csoportok, összefüggőség, egyszerűen összefüggő Lie-csoportok, lokális homomorfizmus, fedőcsoport. Lie-csoport erintőalgebraja, Lie-csoport és Lie-algebra homomorfizmus közötti összefüggés; összefüggő kommutatív Lie-csoportok, kommutatorcsoport, feloldható, feligegyszerű és nilpotens Lie-csoportok, Lie-csoportok feldirekt szorzata. Absztrakt Lie-algebra, kisdimenziós osztályozás, lineáris Lie-algebra, Engel-tétel, invariáns szimmetrikus bilineáris formák Lie-algebraiban. Nilpotens, feloldható, feligegyszerű Lie-algebra jellemzése, klasszikus Lie-algebra egyszerűsége. Gyökfelbontás, irreducibilis reprezentáció, Weyl-tétel, Schur-lemma, Casimir-operátor, Levi-Malcev-tétel. Lie-algebra belső automorfizmusai, exponenciális leképezés. Javasolt irodalom: Varadarajan: Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations. Springer.

**MAT/70** Lie-csoportok és Lie-algebrák II.

Fialowski Alice – FIAKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Kezdeknek: Bevezetés a Lie-csoportok, Lie algebrak elméletébe. Definíciók, sokaságok, csoportosíthatóság, stacionárius reszcsoport, klasszikus lineáris Lie-csoportok, kompakt Lie-csoportok, összefüggőség, egyszerűen összefüggő Lie-csoportok, lokális homomorfizmus, fedőcsoport. Lie-csoport erintőalgebraja, Lie-csoport és Lie-algebra homomorfizmus közötti összefüggés; összefüggő kommutatív Lie-csoportok, kommutatorcsoport, feloldható, feligegyszerű és nilpotens Lie-csoportok, Lie-csoportok feldirekt szorzata. Absztrakt Lie-algebra, kisdimenziós osztályozás, lineáris Lie-algebra, Engel-tétel, invariáns szimmetrikus bilineáris formák Lie-algebraiban. Nilpotens, feloldható, feligegyszerű Lie-algebra jellemzése, klasszikus Lie-algebra egyszerűsége. Gyökfelbontás, irreducibilis reprezentáció, Weyl-tétel, Schur-lemma, Casimir-operátor, Levi-Malcev-tétel. Lie-algebra belső automorfizmusai, exponenciális leképezés. Javasolt irodalom: Varadarajan: Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations. Springer.

**MAT/71** Egerváry szeminárium

Jordán Tibor-Király Tamás

6 kredit, elmélet, -, ismételtető

A szemináriumon a kombinatorikus optimalizálás legfrissebb fejleményeit dolgozzuk fel. A kreditért egy kijelölt területből előadást kell tartani és annak anyagát írásban elkészíteni.

**MAT/72** Gráfelmélet

Király Zoltán - KIZKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételtető

2025. szeptemberétől: Gráfelmélet gyakorlat – nem ismételtető

Az előadás a gráfelmélet azon részeit tekinti át, amelyek fontosak a kombinatorikus optimalizáláshoz. Számos bizonyítási technikát és alaperedményt ismerünk meg. (Algoritmikus bizonyítások, leemelés, kikeresztelés, konstruktív karakterizációk; perfektn gráf tétel, Kuratowski tétel, Lucchesi-Younger tétel, Tutte tétel, Edmonds fenn? tétele, színezések, irányítások, összefüggőség növelés, diszjunkt út problémák). NEM szerepelnek: Ramsey elmélet, véletlen gráfok, extrémális problémák.

**MAT/73** Kombinatorikus optimalizálási struktúrák

Jordán Tibor

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

A kombinatorikus optimalizálás nehezebb részeivel ismerkedünk. Párosításelmélet: T-kötések, a kínai postás probléma, Mader leemelési tétele, Greene és Kleitman tételei algoritmikusan, Lucchesi-Younger tétel algoritmikusan. Gy?ri intervallumos t?tele.

**MAT/74** Matroidelmélet

Bérczi Kristóf

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

A matroidelmélet alapjait tekintjük át alapvet?en a kombinatorikus optimalizálási szempontokra figyelemmel. Rado tétel, Edmonds metszet tétel, Homomorf kép, Matroid partíciós algoritmus, súlyozott matroid metszet algoritmus, alkalmazások hálózati optimalizálásban.

**MAT/75** Poliéderes kombinatorika

Király Tamás

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

A lineáris programozás alkalmazásait vizsgáljuk a kombinatorikus optimalizálásban. Teljesen unimoduláris feltételi mátrixok a hálózati optimalizálásban, A teljes párosítás poliéder és a párosítás poliéder Edmonds féle leírása. Teljesen duális egészérték?ség. Szubmoduláris optimalizálás: polimatroidok és általánosításai, szubmoduláris áramok, gráfelméleti alkalmazások.

**MAT/76** Értékelélmélet

Fried Ervin – FREKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Archimédeszi és nemarchimédeszi rendezés és értékelés. Értékelt gyűrűk és testek. Hensel-lemma és következményei. Értékelések kiterjesztése algebrai bővítésekre.  $p$ -adikus számok, formális hatványsorok.

Ajánlott irodalom:

Endler: Valuation theory

**MAT/77** Gráfok és algebrák I.

Fried Ervin – FREKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Relációkkal definiálható algebrai struktúrák. A hálóelmélet általánosításai. Kongruenciadisztributivitás. Duális diszkriminátor.

Ajánlott irodalom:

Fried: Relations and lattice properties.

**MAT/81** Algebrai kutatószeminárium

Somlai Gábor

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Olvasó- és kutatószeminárium.

**MAT/82** WWW speciál előadás

oktató: Benczúr András – BEAKABT.ELTE

Friedman Eszter – FRAKAAI.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Hiányzó leírás.

**MAT/83** Befektetések elemzése

Fullér Róbert – FURKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Az aktív portfólió kezelés modellje. A portfólió teljesítményének a mérési módszerei. Nyugdíjpénztárak teljesítményének a mérési módszerei. Idő súlyozott és forint súlyozott hozamok.

Irodalom. Bodie/Kane/Marcus, Investments (Irwin, 1996).

**MAT/84** Döntésanalízis

Fullér Róbert – FURKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Wald-, Hurwitz-, Savage- és Laplace- kritériumok véges sok alternatíva esetére, Preferencia relációk, A Neumann-Morgenstern-féle utility elmélet, A Yager-féle OWA operátorok, A Saaty-féle AHP.

Irodalom. Simon French, Readings in Decision Analysis, (Chapman and Hall, London, 1990).

**MAT/85** Makrogazdaságtan és egyensúlyelmélet

Fullér Róbert – FURKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

makrogazdaság alapvető szereplői és piacai. A vállalatok és a háztartások optimális makrogazdasági viselkedési modelljei. A makrogazdaság egyensúlyi modellje. Walras törvényei. A kormányzati pénzügyi politika statikus elemzése, monetáris és fiskális politika. A GDP növekedési feltételei. A költségvetési és a monetáris politika kapcsolatrendszere. Inflációcsökkentés, adóváltozás, kamatváltozás összefüggései. A fogyasztás, beruházás és a megtakarítás kapcsolata. Foglalkozáspolitikai és munkaerőpiac. Az export és az import szerepe.

Irodalom. T. Mellár, Alkalmazott makroökonómia, JPTE, 1997.

**MAT/86** Operációkutatási modellek

Bérczi-Kovács Erika

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Valós életből származó problémák megértése, matematikai modellek felépítése, az adódó

matematikai programozási feladatok megoldása, és az eredmények értelmezése.

Témakörök: pénzügy, távközlés, készletgazdálkodás, logisztika, környezetvédelem, stb.

Irodalom. Operations Research Models and Methods (John Wiley and Sons, 2003)

**MAT/87** Pénzügyek menedzselése

Fullér Róbert – FURKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Tőzsdék, pénzügyi eszközök, infláció, kamatok, tőkeallokáció a kockázatos eszköz és a kockázatmentes eszköz között, a Harry Markowitz-féle optimális portfólió modell, tőkepiaci áfolyamok modellje (CAPM), fix kamatozású értékpapírok, részvények értékelése, opciók és opciós stratégiák, opciók árazása

Irodalom. Bodie/Kane/Marcus, Investments (Irwin, 1996).

**MAT/88** Többcélűfüggvényű optimalizálás

Fullér Róbert – FURKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Pareto optimalitás, Az epsilon korlátozások módszere, Az értékelő függvény módszer, Interaktív módszerek, Lexikografikus optimalizálás, A referencia pontok módszere, A trade-off módszer.

Irodalom. K.Miettinen, Nonlinear Multiobjective Optimization, (Kluwer, 1999).

**MAT/90** Algebrai módszerek a geometriában

Csajbók Bence

Sziklai Péter

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Polinom terek módszere, ékszorzat módszer, spektrál módszerek, polinom módszer. Weyl becslés és ekvivalens formái és alkalmazásai. Konstrukciók véges testekkel és véges geometriákkal.

**MAT/91** Leszámláló kombinatorika

Szőnyi Tamás – SZTKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Permutációk és permutációcsoportok. „Szimmetria erejéig különböző” objektumok leszámllása: Burnside-tétel, ciklus-index polinom, Pólya--Redfield--de Bruijn módszer.

Rekurziók és megoldásaik. Inverziós formulák, Lagrange-inverzió. Halmazok és számok partíciói, lineáris homogén diofantoszi egyenletek, generátorfüggvények, kombinatorikus azonosságok (binomiális együtthatók és hipergeometriai függvények, Catalan, Stirling, Bell és Fibonacci-számok), „Snake Oil” módszer.

A szita-formula általánosításai: részben rendezett halmazok, hálók és Möbius-függvényük.

A Möbius-inverziós formula, technikák a Möbius-függvény kiszámítására.

Gráfelméleti alkalmazások (fák, feszítő fák, 1-faktorok száma).

Irodalom:

Lovász L.: Combinatorial Problems and Exercises bizonyos fejezetei, Akad. Kiadó 1995

J. H. van Lint, R. Wilson: A course in combinatorics, Cambridge, 1992

R. L. Graham, D. E Knuth, O. Patashnik: Konkrét matematika, Műszaki, 1997

**MAT/92** Szimmetrikus struktúrák

Szőnyi Tamás – SZTKABT.ELTE

2025. szeptemberétől: Kódok és szimmetrikus struktúrák

Csajbók Bence

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

**MAT/94** Bonyolultságelmélet

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Csajbók Bence

**MAT/96** Kvantumszámítógépek

Grolmusz Vince – GRVKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

**MAT/97** Vál. fej. Elosztott számítások

Grolmusz Vince – GRVKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

**MAT/98** Válogatott fejezetek, PCP, approximálhatatlanság

Grolmusz Vince – GRVKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

**MAT/99** Extremális gráfelmélet

Csikvári Péter

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

**MAT/100** Válogatott fejezetek: Extremális gráfelmélet

Győri Ervin - GYEMAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Turán tétel és alkalmazásai. Nem-páros kizárt részgráfok: Erdős-Stone tétel, Erdős-Simonovits tétele az aszimptotikusan extrém gráfok szerkezetéről, túltelített gráfokban a) a kisebb részgráffal együtt egy nagyobb is megjelenik (Dirac tétele), b) a részgráf sok példányban jelenik meg. Páros kizárt részgráfok: Erdős-Gallai tétele utak Turán-számáról, Kővári-T.Sós-Turán becslése a  $K(p,q)$ -et nem tartalmazó gráf maximális élszámára, Erdős-Rényi-T.Sós-Brown véges geometriai konstrukciója  $K(2,2)$  esetére, Füredi élesítése.

Szemerédi regularitási lemma és alkalmazása az Erdős-Stone tételre.

Kocka mint tiltott részgráf. Turán-Ramsey típusú tételek: maximális élszám keresése teljes  $k$ -as mentes gráfban, ha nincs nagy üres sem a gráfban (Erdős-T.Sós és Erdős-Hajnal-T.Sós-Szemerédi tétele).

Extremális hipergráf problémák: Turán sejtése, Bollobás és Szidorenko tételei olyan hipergráfokra, amelyekben nincs két  $(3, \text{ill. } 4)$ -él, melyek szimmetrikus differenciáját tartalmazza egy harmadik. Erdős tétele a tiltott  $K_r(t, \dots, t)$  esetére.

Sperner tétele és alkalmazásai, YBLM egyenlőtlenség. Erdős-Ko-Rado tétele egy-metszésre. Permutációs módszer, balratolás módszere. árnyék minimalizálása. árnyék minimalizálása metsző halmazrendszerre.  $t$ -metsző rendszerek. Csillag módszer, Erdős-Ko-Rado  $t$ -metszőkre. Algebrai módszer extrémális halmazrendszerekre. Kneser-gráfok kromatikus száma. Keresztben metsző halmazpár-rendszerek (Bollobás).

Extremális problémák más parciálisan rendezett halmazokra.

irodalom:

Lovász L.: Combinatorial Problems and Exercises bizonyos fejezetei, Akad. Kiadó 1995

Babai L. Frankl P.: Linear algebra methods in combinatorics jegyzet, Univ. Chicago, 1992

Károlyi Gy.: Symmetric structures, TEMPUS jegyzet, 1993.

**MAT/101** Approximációelmélet

Halász Gábor - HAGKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Approximálhatóság trigonometrikus polinomokkal. Fejér közepek. Bernstein polinómok. Pozitív lineáris operátorok. Folytonossági modulus. Jackson és Timan tételei. Analitikus függvények approximációja. Legjobb közelítő polinomok és jellemzése. Csebisev rendszerek. Csebisev polinomok és kapcsolatuk a kapacitással.

Bernstein, Markov és Dzjadik becslései polinomok deriváltjaira. Komplex függvénytan módszerek. Inverz tételek Lipschitz osztályok, a Zygmund osztály és analitikus függvények jellemzésére. Lagrange interpoláció. Fejér-Hermite interpoláció. Konvergencia és divergencia  $L_p$  normákban. Vetítőoperátorok.

Irodalom: Zygmund "Trigonometric Series",  
Lorentz "Approximation Theory".

**MAT/102** Fejezetek a komplex függvénytanból

*Halász Gábor – HAGKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

A cél betekintést adni az egyváltozós komplex függvénytan különböző fejezeteibe, amelyek közül a 2. félévben az érdeklődés szerint meghirdetendő előadások, tanulószemináriumok, gyakorlatok egyeseket részletesebben feldolgoznak. Az alábbi, lényegében különálló témák közül általában hatra egy hónap, heti 2 óra jut.

*Tematika:*

Phragmén-Lindelöf típusú tételek.

Kapacitás. Csebisev konstans. Transzfinit átmérő. Green függvény. Kapacitás és Hausdorff mérték. Konform sugár.

Területi elv. Koebe torzítási tételei. Egyrétű függvények együtthatóinak a becslése.

Terület-ív hossz elv. Extremális hossz. Négyszögek és gyűrűk modulusa.

Kvázikonform leképezés. Kiterjesztésük a határra. Kváziszimmetrikus függvények.

Kvázikonform görbék.

Divergencia- és rotációmentes áramlások a síkon. Komplex potenciál. Áramlás akadály körül, fázisok között.

Laplace integrál. Inverziós képletek. Alkalmazások Tauber típusú tételekre, kvázianalitikus függvényekre, Müntz tételére.

$L_p$ -beli függvények Poisson integrálja. Hardy terek. Riesz Marcell tétele.

Interpoláció  $L_p$  terek között. A Riesz fivérek tétele.

Meromorf függvények a síkon. A Nevanlinna elmélet két főtétele.

Kötelező irodalom: Halász Gábor „Fejezetek a komplex függvénytanból”, „Fourier integrál” és „Kis hidrodinamika” c. egyetemi jegyzete és az azokban megadott további irodalom

**MAT/103** Komplex függvénytan szeminárium

*Halász Gábor – HAGKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, ismételt

Fix tematika nélkül, az 1. félév komplex függvénytan témáinak (akár különálló témájú cikkek révén való, akár nagyobb témák tanulószemináriumi ) feldolgozása elsősorban a résztvevő hallgatók előadásában.

**MAT/104** Riemann felületek EA.

*Kalmár Boldizsár, Tóth Árpád*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

RIEMANN FELÜLETEK (1 félév, heti 2 óra)

Riemann felületek absztrakt definíciója. Univerzális fedés. Egyszeresen összefüggő felületek konform leképezés. Uniformizáció. Fundamentális tartomány a síkon és az egységkörben. Többértékű függvények Riemann felülete. Kompakt Riemann felületek. Irodalom: Nevanlinna "Uniformisierung", Springer "Riemann Surfaces".

**MAT/106** Nyelvek és automaták

*oktató: Szőnyi Tamás – SZTKABT.ELTE*

*Horváth Sándor – HOSKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Betű, szó, nyelv; a Chomsky-féle nyelvtan és nyelvosztályok; az utóbbiak néhány, algebrai jellegű zártsági tulajdonsága. A Chomsky-féle nyelvhierarchia megfelelése

az absztrakt automaták egy hierarchiájának.  
Kombinatorikai jellegű tulajdonságok. Néhány eldönthetőségi/eldönthetetlenségi eredmény.

Programozási nyelvek nem-környezetfüggetlen volta.

Környezetfüggetlen nyelvek szintaktikai elemzése.

irodalom:

Révész György: Bevezetés a formális nyelvek elméletébe I.--II., ELTE jegyzet

Demetrovics J. et al.: A számítástudomány mat. alapjai, Tankönyvkiadó, 1985.

#### **MAT/107** Adatbányászat szeminárium

Lukács András

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Hiányzó leírás.

#### **MAT/108** WWW és hálózatok matematikája

ifj. Benczúr András – BEAKAET.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

A Webkeresőrendszerek felépítése: robot architektúra és robotkizáró protokoll, a dokumentumfeldolgozás menete, invertált index. A találati lista rangsoroláskor használt jellemzők.

Markov-láncok és véletlen séták gráfokon. Elérési és visszatérési valószínűségek, erősen összefüggő komponensek, ergodikus Markov láncok. Sajátértékek, sajátvektorok és a stacionárius eloszlás.

Page Rank és alkalmazásai: személyre szabott rangsor, hasonlóságkeresés.

Átfogalmazás séták végpont-eloszlására és hatékony algoritmusok.

Szinguláris felbontás: a felbontás létezésének bizonyítása. Mátrixnormák, kis rangú közelítések.

A HITS algoritmus: meghatározó tartalmak és gyűjtőoldalak rangsora. Az algoritmus és a szinguláris felbontás kapcsolata, egy szinguláris felbontás algoritmus bemutatása.

Spektrál gráfklaszterezés, a sajátérték rés és az expanzió kapcsolata. Expanderek.

Gráfmodellek: a Barabási-féle preferált illeszkedés és kapcsolódó modellek. Kis világ modellek. Fokszámeloszlással és átmérővel kapcsolatos tételek.

Weboldalak átmeneti tárolása. Keresőrendszerek adatbázisának frissítése.

Ajánlott irodalom: Searching the Web. A Arasu, J Cho, H Garcia-Molina, A

Paepcke, S Raghavan. ACM Transactions on Internet Technology, 2001

Randomized Algorithms, R Motwani, P Raghavan, ACM Computing Surveys, 1996

The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web, L. Page, S. Brin, R.

Motwani, T. Winograd. Stanford Digital Libraries Working Paper, 1998.

Authoritative sources in a hyperlinked environment, J. Kleinberg. SODA 1998.

Clustering in large graphs and matrices, P Drineas, A Frieze, R Kannan, S Vempala, V Vinay

Proceedings of the tenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms, 1999.

Barabási Albert László: Behálózva. Magyar Könyvklub. 2003.

David Karger, Alex Sherman, Andy Berkheimer, Bill Bogstad, Rizwan Dhanidina, Ken Iwamoto, Brian Kim, Luke Matkins, Yoav Yerushalmi: Web Caching and Consistent Hashing, in Proc. WWW8 conference.

#### **MAT/109** Analitikus konvexitás I.

ifj Böröczky Károly – BOKLABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

A metrikus projekció. Támasz és elválasztás. Extremális reprezentáció. Konvex függvények. Dualitás. A támaszfüggvény. Hausdorff-metrika. Konvex testek lapstruktúrája. Szingularitások. Szakaszok a határon. Politópok. Regularitás és görbület. Szimmetrizációk.

**MAT/110** Analitikus konvexitás II.

*íj Böröczky Károly – BOKLABT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Zonoidok és konvex testek további speciális osztályai. Vegyes térfogat kiterjesztései. Görbületi és felületi mértékek. A Brunn-Minkowski-tétel. Izoperimetrikus egyenlőtlenségek. Az Alexandrov-Fenchel-egyenlőtlenség.

**MAT/111** Kombinatorikus konvexitás I.

*Naszódi Márton*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

A  $d$ -konvexitás normált terekben:  $d$ -konvex halmazok támasztulajdonságai,  $d$ -konvex halmazok el-sága, halmazok családjának Helly-dimenziója. A  $H$ -konvexitás: a  $H$ -konvex burok,  $H$ -konvex testek támaszkúpjai, Helly tétele  $H$ -konvex halmazokra. A Szőkefalvi-Nagy-probléma és általánosításai. Borsuk partíciós problémája normált terekben. A Hadwiger-Gohberg-Levi-Markus-probléma és általánosításai.

**MAT/112** Kombinatorikus konvexitás II.

*íj Böröczky Károly – BOKLABT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

A Bateman-Erdős-probléma és általánosításai normált terekben. Minkowski-féle „gömb”-elhelyezések normált terekben. Konvex testek Hadwiger-számai (ill. egyoldali Hadwiger-számai), konvex test eltoltjaiból álló  $k^+$ -szomszédos elhelyezések. A Koebe-Andreev-Thurston-tétel, konvex testek elhelyezéseinek érintkezési számai. Erdős-problémák normált terekben. A megvilágítási probléma normált térben ill. szférikus térben. Normált terek Petty-számai.

**MAT/113** Kombinatorikus konvexitás III.

*íj Böröczky Károly – BOKLABT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Egységtávolságok, minimális illetve maximális távolságok a magasabb dimenziós euklideszi terekben. Adott területű háromszögek, adott térfogatú szimplexek. Gráfok kereszteszési száma felületeken. Szemerédi-Trotter-tétel. Illeszkedési tételek magasabb dimenzióban.

**MAT/115** A lineáris programozás belsőpontos módszerei

*Illés Tibor – ILTKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Goldman-Tucker modell. Önduális lineáris programozási feladat. Belsőpont feltétel, beágyazás. Centrális út. Goldman-Tucker tétel. Analitikus centrum, Sonnevend-tétel. Optimális partíció. Erős dualitás tétel, Farkas-lemma. Szigorúan komplementáris megoldás. Belsőpontos algoritmusok. Komplexitási tételek.

Ajánlott irodalom:

1. Katta G. Murty: Linear Programming. John Wiley & Sons, New York, 1983.
2. Vašek Chvátal: Linear Programming. W. H. Freeman and Company, New York, 1983.
3. C. Roos, T. Terlaky and J.-Ph. Vial: Theory and Algorithms for Linear Optimization: An Interior Point Approach. John Wiley & Sons, New York, 1997.
4. Illés T., Nagy M. és Terlaky T.: Belsőpontos algoritmusok, Informatikai Algoritmusok II., szerk.: Iványi Antal, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2005, 1230-1297.

**MAT/117** Folytonos optimalizálás

*Bérczi Kristóf*

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Lineáris egyenlőtlenségek: Farkas-lemma és egyéb alternatíva tételek. A lineáris programozás dualitás elmélete, pivot algoritmusok (criss-cross és szimplex), belsőpontos módszer. Mátrix játékok: Nash-egyensúly, Neumann-tétel. Konvex optimalizálás: dualitás, szeparálás és algoritmusok. Konvex Farkas-tétel, Kuhn-Tucker-Karush tétel, regularitási feltételek. Nemlineáris programozási modellek. Sztochasztikus programozás: alapmodellek, gyakorlati problémák.

Ajánlott irodalom:

Katta G. Murty: *Linear Programming*. John Wiley & Sons, New York, 1983.

Vašek Chvátal: *Linear Programming*. W. H. Freeman and Company, New York, 1983.

C. Roos, T. Terlaky and J.-Ph. Vial: *Theory and Algorithms for Linear Optimization: An Interior Point Approach*. John Wiley & Sons, New York, 1997.

Kovács Margit: *A nemlineáris programozás elmélete*. TYPOTEX Kft., Budapest, 1997.

Béla Martos: *Nonlinear Programming: Theory and Methods*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.

M. S. Bazaraa, H. D. Sherali and C. M. Shetty: *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons, New York, 1993.

Illés T. és Mészáros K.: A Farkas-lemma egy új és elemi bizonyítása, *Új utak a magyar operációkutatásban*, szerk.: Komlósi S. és Szántai T., Dialógus Campus Kiadó, Budapest, 1999, 73-88 oldalak.

Szidarovszky Ferenc: Játékelmélet, *Informatikai Algoritmusok I.*, szerk.: Iványi Antal, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004, 314-360.

Illés T., Nagy M. és Terlaky T.: Belsőpontos algoritmusok, *Informatikai Algoritmusok II.*, szerk.: Iványi Antal, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2005, 1230-1297.

J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal: *Convex Analysis and Minimization Algorithms I-II*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

E. de Klerk, C. Roos, Terlaky T.: *Nemlineáris Optimalizálás*. Budapest, 2004.

#### **MAT/118** Játékelmélet

Király Tamás

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Kooperatív játékok. Kooperatív játékok megoldási koncepciói. Nem teljes információjú játékok. Szekvenciális egyensúly. Ismételt játékok. Játékelméleti modellek és alkalmazások.

Ajánlott irodalom: Forgó F., Szép J., Szidarovszky F., *Introduction to the theory of games: concepts, methods, applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

Szidarovszky Ferenc: Játékelmélet, *Informatikai Algoritmusok I.*, szerk.: Iványi Antal, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004, 314-360.

Osborne, M. J., Rubinstein A., *A course in game theory*, The MIT Press, Cambridge, 1994.

J. P. Aubin: *Mathematical Methods of Game and Economic Theor.* North-Holland, Amsterdam, 1982.

#### **MAT/120** Lineáris programozás I.

Illés Tibor – ILTKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Hiányzó leírás.

#### **MAT/121** Lineáris programozás II.

Illés Tibor – ILTKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Hiányzó leírás.

**MAT/123** Nemlineáris optimalizálás II.

Illés Tibor – ILTKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Feltétel nélküli minimalizálás. Szükséges és elégséges optimalitási feltételek. Iránymenti keresés. Algoritmusok. Feltételes minimalizálás. Belsőpontos módszerek sima konvex optimalizálásra. Megengedett irányok módszere. Gradiens és vetített gradiens módszerek. Teljes információjú, nem kooperatív, konkáv hasznosság függvényű véges játékok. Brower- és Kakutani-féle fixpont tételek. Nikaidó-tétel. Legjobb válaszok módszere. Nikaidó-Isoda tétel.

Ajánlott irodalom: Kovács Margit: *A nemlineáris programozás elmélete*. TYPOTEX Kft., Budapest, 1997.

Béla Martos: *Nonlinear Programming: Theory and Methods*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.

M. S. Bazaraa, H. D. Sherali and C. M. Shetty: *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons, New York, 1993.

J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal: *Convex Analysis and Minimization Algorithms I-II*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

J. P. Aubin: *Mathematical Methods of Game and Economic Theor.* North-Holland, Amsterdam, 1982.

D. P. Bertsekas: *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, 2004.

E. de Klerk, C. Roos, Terlaky T.: *Nemlineáris Optimalizálás*. Budapest, 2004.

**MAT/124** Nemlineáris programozás I.

Illés Tibor – ILTKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

A konvex optimalizálás alapjai: a konvex analízis alapjai, optimalitási feltételek, a feltétel nélküli optimalizálás algoritmusai, feltételes konvex optimalizálási feladatok optimalitási feltételei, a konvex optimalizálás dualitáselmélete, algoritmusok feltételes optimalizáláshoz.

A nemlineáris optimalizálás belsőpontos módszerei: dualitás és centrális út, a logbarrier módszer, speciális szerkezetű feladatok.

Ajánlott irodalom:

E. De Klerk – C. Roos – Terlaky T.: *Nemlineáris optimalizálás*, Aula kiadó (BKÁE gondozásában), 2004.

**MAT/125** Nemlineáris programozás II.

Illés Tibor – ILTKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Hiányzó leírás.

**MAT/130** Végeselem módszerek alkalmazása

Izsák Ferenc – IZFKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

A végeselem módszerek bevezetése után egydimenziós tesztfeladatokon mutatjuk be a módszert. Az általános hibaanalízist elliptikus peremérték feladatok esetében ismertetjük, használva a Szoboljev-terek elméletének elemeit. Többdimenziós problémák megoldásának implementációját ismertetjük egy mintafeladaton a Matlabot használva. Irodalom: Brenner - Scott: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, 2002. Stoyan Gisbert (szerk.): *Matlab 4. és 5. verzió*, Typotex, 1999.

**MAT/131** Approximációs algoritmusok

Jordán Tibor – JOTKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Közelítő algoritmusok NP-nehéz feladatokra. Klasszikus problémák: Steiner fa, utazóügynök feladat, halmazfedés, hátizsák feladat. Lineáris programozási módszerek. Körlefogó ponthalmaz, többutas vágás feladatok. Minimális méretű többszörösen összefüggő részgráfok.

Irodalom. V. Vazirani: Approximation algorithms (Springer, 2003).

**MAT/132** Kombinatorikus algoritmusok I.

Jordán Tibor – JOTKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Gráfok bejárásai. DFS, BFS keresés és alkalmazásai.

Dinamikus programozás. Fafelbontás, favastagság. Ritka tanúk.

Nagamochi és Ibaraki algoritmusai, Gomory Hu fa.

Merevkörű gráfok. Legrövidebb utak. Merev gráfok.

Irodalom. Jordán T.: Kombinatorikus algoritmusok, elektronikus jegyzet.

**MAT/133** Kombinatorikus algoritmusok II.

Jordán Tibor – JOTKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Folyamok, áramok. Algoritmusok (Edmonds-Karp, színtező algoritmus). Súlyozott változatok. Kombinatorikus és egyéb alkalmazások.

Lokális keresés. Párosítások. Edmonds algoritmusai.

Gráfok faktorai, T-kötések és alkalmazásaik. Szerkezetek merevsége.

Irodalom. Jordán T.: Kombinatorikus algoritmusok, elektronikus jegyzet.

**MAT/134** Kombinatorikus struktúrák és algoritmusok feladatmegoldó szeminárium

Bérczi Kristóf

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Feladatmegoldó szeminárium. Témakörök: kombinatorika, gráfelmélet, algoritmusok, véges matematika.

Irodalom. Lovász L.: Kombinatorikai problémák és feladatok (Typotex, 2000)

**MAT/135** Ütemezéselmélet

Kis Tamás

Jordán Tibor – JOTKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Egygépes feladatok. SPT, EDD sorrendek. Hodgson algoritmus.

Párhuzamos gépek. Listás ütemezés. Hu algoritmusai. Uniform gépek.

Shop modellek. Johnson sorrendje. Órarend készítés.

Közelítő algoritmusok LP relaxációval, kombinatorikus módszerekkel, branch and bound heurisztikával.

**MAT/138** Extremális halmazrendszerek

2025 szeptemberétől: Extremális halmazrendszerek szeminárium

Katona Gyula – KAGLAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Egy  $n$  elemű halmaz részhalmazainak rendszerei közül keressük a legnagyobbat (legkisebbet) valamilyen korlátozó feltételek mellett.

A Sperner tétel például megadja a tartalmazásmentes legnagyobb rendszert.

A szeminárium célja az irodalom követése.

Egy jó könyv, ami sok előismeretet tartalmaz: Konrad Engel, Sperner Theory, Cambridge University Press, 1997.

**MAT/139** Extremális kombinatorika

2025 szeptemberétől: Extremális halmazrendszerek

Szőnyi Tamás – SZTKABT.ELTE

Katona Gyula – KAGLAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Turán tétel és alkalmazásai. Erdős-Stone-Simonovits tétel. Utak kizárása, Erdős-Gallai tétel. Teljes páros gráfok izárása általában, Kővári-T. Sós-Turán tétel és véletlen konstrukció. Projektív síkok, polaritás gráf. Brown konstrukció. Alon-Rónyai-Szabó és Kollár-Rónyai-Szabó konstrukció. Szemerédi regularitási lemma és alkalmazásai. Metsző halmazrendszerek uniform és nem-uniform esetben, Erdős-Ko-Rado tételek. Sperner rendszerek. Sperner tétel és alkalmazások, YBL M egyenlőtlenség. Permutációs módszer, transzformációs módszer, balra tömörítés. Árnyék, Katona-Kruskal tétel és alkalmazásai. Lineáris algebrai módszerek, Ray-Chaudhuri-Wilson tételek L-metsző rendszerekről.

**MAT/140** Keresés és kommunikációs komplexitás

2025 szeptemberétől: Keresés és kommunikációs komplexitás szeminárium

Katona Gyula – KAGLAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételtető

A kereselmélet alapproblémája: egy véges halmaz egy ismeretlen elemét keressük kérdésekkel, ahol egy kérdésre adott válasz megmondja, hogy az ismeretlen elem benne van-e egy adott részhalmazban.

Gyakorlati alkalmazásai például a a bioinformatikában vannak. A kommunikációs komplexitás alapproblémája: két résztvevő közösen számol ki egy kétváltozós függvényt, ahol mindkettőjük csak a saját változóját ismeri.

Minimalizálandó a két résztvevő között átvendő információ mennyisége a számolás során. A két probléma matematikai háttere nagyon hasonló.

A szeminárium célja az irodalom követése, a résztvevők új cikkeket ismertetnek.

Az alapismeretek megtalálhatók a következő könyvekben.

M. Aigner: Combinatorial Search, Teubner, 1988

E. Kushilevitz, N. Nisan: Communicational Complexity, Cambridge University Press, 1997

**MAT/141** Kriptológia

2025 szeptemberétől: Kriptológia szeminárium

Katona Gyula – KAGLAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételtető

A kriptológiai irodalom új eredményeit tekintik át a szeminárium résztvevői.

A témák között szerepelnek pl. az azonosítási módszerek (vízjel, ujjlenyomat), többrésztvevős számítások, választási rendszerek, aukciók, stb.

Irodalom:

Boyd, Mathuria: Protocols for authentication and key establishment (Springer),

Pieprzyk: Fundamentals of computer security (Springer),

Menezes: Handbook of applied cryptography,

Uj irodalom: <http://eprint.iacr.org>

**MAT/142** Valós függvénytan feladatmegoldó szeminárium

Keleti Tamás – KETKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételtető

A valós függvénytan feladatmegoldó szemináriumon otthon megoldandó gondolkodtató feladatok szerepelnek. A szemináriumon a diákok mondják el megoldásaikat. A feladatok félénként változnak. A valós függvénytan mellett különböző határterüle-

tek (geometriai mértékelmélet, leíró halmazelmélet, halmazelmélet, általános topológia, euklideszi terek topológiája) feladatai is szerepelni szoktak. Irodalom: Laczkovich Miklós: Valós függvénytan, ELTE TTK egyetemi jegyzet, 1993. Petruska György: Analízis I. és II., ELTE TTK egyetemi jegyzet, 1998. Hajnal András és Hamburger Péter: Halmazelmélet, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., 1994.

**MAT/143** Valós függvénytan III.

Keleti Tamás – KETKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Geometriai mértékelmélet. Hausdorff-mérték és a Hausdorff-dimenzió.

Vitali és Besicovitch lefedési tételei.

Önhasonló halmazok és dimenziójuk.

**MAT/144** Valós függvénytan IV.

Keleti Tamás – KETKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Integrálok és mértékek differenciálása. A maximális operátor.

Approximatív folytonos függvények. Deriváltak és Zahorski-osztályok.

Ajánlott irodalom: } Laczkovich Miklós: Valós függvénytan,

ELTE 1995. P. Mattila: Geometry of Sets and Measures in

Euclidean Spaces, Cambridge University Press 1999.

**MAT/145** Valós függvénytan kutatászeminárium

Keleti Tamás – KETKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételtető

A valós függvénytan kutatászemináriumon a szeminárium résztvevői, szervezői valamint meghívott előadók tartanak előadásokat a valós függvénytan területén elért eredményeikről valamint a felmerült megoldásra váró problémákról. A szeminárium egyik fő célja, hogy a doktoranduszok és az érdeklődő felsőbbéves hallgatók betekintést kapjanak az ELTE-n vagy akár máshol folyó valós függvénytan kutatásokba és hogy lehetőségük legyen ezekbe bekapcsolódni, valamint friss eredményeiket elmondani. Irodalom: Laczkovich Miklós: Valós függvénytan, ELTE TTK egyetemi jegyzet, 1993.

**MAT/146** Komb. Strukt kalsszif szeminárium

Kéri Gerzson – KEGNABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételtető

Hiányzó leírás.

**MAT/147** Kombinatorikia struktúrák klasszifikációja (MXXN9C40)

Kéri Gerzson – KEGNABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Elsősorban meghatározott értelemben optimális kombinatorikai objektumok (mint optimális hibajavító kódok, fedő kódok, design-ok) klasszifikációjával foglalkozunk. A klasszifikációt az különbözteti meg a sima leszámllástól, hogy ugyanazon feltételekhez és paraméter-értékekhez tartozó több objektum létezése esetén ezek eltérésének leírását, struktúrájuk összehasonlítását is fontosnak tartjuk.

Ajánlott irodalom:

Cohen, Honkala, Litsyn and Lobstein, Covering Codes, Elsevier, Amsterdam, 1997.

Kaski and Ostergard, Classification Algorithms for Codes and Designs, Springer, Berlin, 2006.

**MAT/148** Algoritmosos Geometria I.

Bezdek Károly – BEKKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Általános matematikai eszközök:  $E^d$ -beli politópok és tulajdonságaik, szimpliciális komplexusok, Euler-formulák, konvex rétegek. Speciális típusú egyszerű poligonok és tulajdonságaik. Lineáris programozási alapfeladat és a szimplexmódszer lényege. Döntési fákkal kapcsolatos tételek. A hatékonyság jellemzésére vonatkozó „mester tétel”. Sík- és térsőprés szemléletű algoritmustervezés. Gráfok tárolása duplán láncolt éllistával. A szakaszfa. A sík darabolása. Politópok reprezentációja.

Konvex burok algoritmusok síkban és térben.

Térdarabolások:  $E^d$  darabolása hipersíkokkal, sík darabolása egyenesekkel, sík darabolása szakaszhalmazzal, síkdarabolás síkbarajzolható gráffal, térdarabolás háromszögekkel. Triangulációk.

Ajánlott irodalom:

- 1) J-D. Boissonnat, M. Yvinec: Algorithmic Geometry, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

#### **MAT/149** Algoritmikus Geometria II.

Bezdek Károly – BEKKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Térdarabolások: A Voronoi-diagramok és a Delaunay-komplexus tulajdonságai a  $d$ -dimenziós térben. Síkbeli ponthalmaz és síkbeli szakaszhalmaz Voronoi-diagramja.

1-2-3-dimenziós metszetek: Kollineáris intervallumhalmaz metszete. Metszéspontok egysíkú szakaszhalmazban. Két egysíkú konvex poligon metszete. Egysíkú konvex poligonhalmaz metszete. Két konvex poliéder metszete. Félterek metszete.

Alkalmazások:  $d$ -dimenziós ponthalmaz maximális elemének keresése. Egyszerű síkpoligon átmérőjének keresése. Legközelebbi pár keresése síkbeli ponthalmazban. Minimális feszítőfa keresése síkbeli ponthalmazban. Útvonalkeresés síkbeli ponthalmazban. Síkbeli ponthalmaz legszűkebb befoglaló körének keresése. Síkbeli ponthalmaz legnagyobb üres körének megkeresése. A 2-dimenziós lineáris programozási alapfeladat optimális megoldása. A  $d$ -dimenziós lineáris programozási alapfeladat alkalmazása konvex burok meghatározására.

Ajánlott irodalom:

- 1) J-D. Boissonnat, M. Yvinec: Algorithmic Geometry, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

#### **MAT/150** Egészértékű programozás

Király Tamás – KITEAGT.ELTE

Kis Tamás

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Alapvető feladattípusok, modellezési technikák. Hilbert bázisok, unimodularitás, teljes duális egészértékűség. Általános heurisztikus algoritmusok: szimulált lehülés, tabu keresés. Heurisztikus algoritmusok az utazó ügynök feladatra, approximációs eredmények. A Held-Karp korlát, módszerek a kiszámolására. Gomory-Chvátal vágások. Vágások a vegyes programozási feladatra. Szuperadditív dualitás, csoportelméleti módszer. Leszámlálási algoritmusok.

Sperner rendszerek, egyenlőtlenségekkel definiált bináris ponthalmazok. Rácsok, bázis-redukció. Fix-dimenziós egészértékű programozási feladat megoldása polinom időben. Az ellipszoid módszer, szeparáció és optimalizálás ekvivalenciája. A Balas-féle Korlátozás és vágás módszere. Vágások az utazó ügynök feladatra. LP alapú közelítő algoritmusok.

Kötelező irodalom: Vizvári Béla: Egészértékű programozás, Typotex, Budapest, 2006.

Király Tamás és Szegő László; Kiegészítés az Egészértékű Programozás I-II tárgyhoz, elektronikus jegyzet

Ajánlott irodalom: G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey: Integer and Combinatorial

Optimization, John Wiley and Sons, New York, 1999.

D. Bertsimas, R. Weismantel: Optimization over Integers, Dynamic Ideas, Belmont, 2005.

#### **MAT/151** Adatstruktúrák

Király Zoltán - KIZKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Alapvető adatstruktúrák: tömbök, listák, láncolt listák, sorok, veremek. Gráfok, fák tárolása. Halmazok tárolása. Adatstruktúrák az unió--holvan feladathoz.

Kereső-fák. Kiegyensúlyozott, félig kiegyensúlyozott fák, Fibonacci-fák, Sleator--Tarjan fabillentéses algoritmus. Kupacok: 2--3 fák, kupacok, elsőbbségi sorok, összefésülhető és összefűzhető

kupacok. Amortizált költség. Fibonacci kupac, párosító kupacok. Adatstruktúrák gráfalgoritmusokban.

Hash-elés. Adatkompresszió: Huffman kódolás, Lempel--Ziv algoritmus.

Irodalom:

Robert Endre Tarjan: Data Structures and Network Algorithms, 1983

#### **MAT/152** Alkalmazott diszkrét matematika szeminárium

Király Zoltán - KIZKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Az alkalmazott diszkrét matematika különböző területeiről az aktuális eredmények, érdekes cikkek megtárgyalása, nagyrészt a hallgatók előadásában. Kiemelt témák: telekommunikációs hálózatok tervezése, hálózati kódok és alkalmazásaik. Irodalom: Aktuális FOCS, STOC, SODA konferencia-kötetek, ECCC.

#### **MAT/153** Bonyolultságelmélet

2025. szeptemberétől: Bonyolultságelmélet szeminárium

Király Zoltán - KIZKAAT.ELTE

*Pálvölgyi Dömötör*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Randomizált algoritmusok. Prímtesztelés. Univerzális bejáró sorozatok, térfogatszámítás. Döntési fák. Alsó becslések döntési fák mélységére.

Nem-determinisztikus és randomizált döntési fák.

Kommunikációs bonyolultság (determinisztikus és nemdeterminisztikus). Randomizált kommunikációs bonyolultság. Interaktív és zero--knowledge bizonyítások. Kriptográfia. RSA--kód. Információs

bonyolultság. Kolmogorov--bonyolultság, entrópia, kódolás. álvéletlen bitek generálása és

tesztelése. Párhuzamos algoritmusok, összeadás és szorzás. Brent tétele. Mátrixszorzás alkalmazásai.

Determináns számítása. A párhuzamos számí

tások különböző modelljei. Rendezés. Randomizált

párhuzamos algoritmusok. Alsó becslések Boole-hálózatokon

irodalom:

irodalom

Lovász László: Algoritmusok bonyolultsága, jegyzet, 1992

Hopcroft-Ullman: Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation, 1979

Cormen-Leiserson-Rivest: Algoritmusok, 1997

Aho-Hopcroft-Ullman: Számí tógépalgoritmusok tervezése és analízise, 1982

D. E. Knuth: A számítógép-programozás művészete, III. kötet, 1988  
Ivanyos-Rónyai-Szabó: Algoritmusok, 1998  
Papadimitriou: Computational Complexity, 1994

**MAT/154** Számítástudomány szeminárium

Király Zoltán - KIZKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

A bonyolultságelmélet (theoretical computer science) különböző területeiről az aktuális eredmények, érdekes cikkek megtárgyalása, nagyrészt a hallgatók előadásában. Kiemelt témák: kommunikáció bonyolultsága, randomizált algoritmusok, derandomizálás. Irodalom: Aktuális FOCS, STOC konferencia-kötetek, ECCC.

**MAT/155** Véges geometria

Kiss György - KIGKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Véges síkok létezésének problémája. Bruck–Ryser-tétel. Projektív síkok Hall-féle koordinátázása. Konfigurációs tételek (Desargues, Pappos) és a koordinátastruktúra kapcsolata. Baer-tétel. Projektív síkok kollineációcsoportja.

Ívek, oválisok. Segre-tétel a páratlan rendű desarguesi síkok oválisairól.

Magasabb dimenziós projektív terek. Polarítások. Kvádrák, Hermite-görbék, általánosított négyszögek. Plücker-koordináták, lineáris komplexusok.

A véges geometria néhány kombinatorikai és kriptográfiai alkalmazása.

Ajánlott irodalom:

1) Kiss György, Szőnyi Tamás: Véges geometria, Polygon Kiadó, Szeged, 2001.

**MAT/156** Véges geometriai szeminárium

Nagy Zoltán Lóránt

Csajbók Bence

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

A szeminárium a véges geometria új eredményeit dolgozza fel.

**MAT/157** Fejezetek a halmazelméletből

2025. szeptemberétől: Halmazelmélet I.

Komjáth Péter - KOPKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Kombinatorikus halmazelmélet. Végtelen gráfok. Stacionárius halmazok.

Ramsey-tétel és partíció kalkulus.

Elérhetetlen, Mahlo, gyengén kompakt, mérhető, superkompakt számosságok.

A szinguláris számosság probléma.

Axiomatikus halmazelmélet.

Forszolás, Cohen valóságok. \diamondsuit, Szuszlin-fa forszolása. Lévy omlasztás, Kurepa-fák.

Iterált forszolás. Martin axióma. Prikry forszolás.

Konzisztens hogy  $\kappa$  mérhető és  $2^\kappa > \kappa^{++}$ .

$L$ , tulajdonságok.  $L \models \text{ÁKH}$ , \diamondsuit.

$O^\sharp$ , Kunen tétele, lefedési lemma.  $L[U]$ , iterált ultrahatvány.

Irodalom:

Hajnal András--Hamburger Péter: Halmazelmélet, Tankönyvkiadó, 1994.  
Komjáth Péter

K.Kunen: Set Theory:

An Introduction to Independence Proof, North-Holland.

A. Kanamori: The higher infinite, Springer, 1994.

Handbook of Set Theory, (eds. M. Foreman, A. Kanamori, M. Magidor), Springer, 1999.

**MAT/158** Halmazelmélet 2.

Komjáth Péter – KOPKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Konstruálhatóság. Szorzatforszolás. Iterált forszolás. Lévy-szuvasztás. Kurepa-fa. A Martin-axióma konzisztenciája. Prikry-forszolás. Szuperkompakt számosságok. Erősen kompakt számosságok. Laver-káró. Extenderek. Erős, szupererős és Woodin-számosságok. A szinguláris számosság probléma. Szaturált ideálok. Óriási és majdnem óriási számosságok. Chang-sejtés. Pcf-elmélet. Shelah tétele.

Ajánlott irodalom: Hajnal A., Hamburger P.: Halmazelmélet.

K. Kunen: Set Theory.

A. Kanamori: The Higher Infinite.

T. Jech: Set Theory.

**MAT/159** Halmazelmélet 4.

Komjáth Péter – KOPKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Hiányzó leírás.

**MAT/161** Matematika problémamegoldó szeminárium

Kós Géza – KOGKABI.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételtető

Hiányzó leírás.

**MAT/162** Makrogazdaságtan

Fullér Róbert – FURKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételtető

A makroökonómia tárgya, alapfogalmai. Nemzeti össztermék, aggregált javak, aggregált kereslet és kínálat. Fogyasztás, beruházás, megtakarítás, kormányzati költség. Nominál és reál mennyiségek. A gazdaság szereplői: vállalatok, háztartások, kormányzat. Nyitott gazdaság, az export és import szerepe. A gazdaság alapvető piacai: munkapiac, javak piaca, pénzpiac, értékpapírpia. Foglalkoztatás. Árak és infláció. Költségvetési és monetáris politika.

A makroökonómia elemzési módszerei, modelljei.

**MAT/163** Életbiztosítás

Arató Miklós

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Halandósági táblák. A díjkalkuláció alapelvei. A legfontosabb életbiztosítási módok: halálzási, elézési, vegyes és járadék biztosítások. Nettó és bruttó díjak számítása, évi és havi fizetéssel. A díjtartalék számítása (prospektív és retrospektív díjtartalék; nettó, bruttó és Zilmer-tartalék; rekurziós formulák). Visszavásárlás, díjmentesítés. Kétszemélyes életbiztosítások. Baleseti és rokkantsági kiegészítő biztosítások.

Ajánlott irodalom:

Banyár J. – Popper K.: Az életbiztosítás. Aula, 2003.

Krekó Béla: Életbiztosítás I., Aula, 1994.

Szabó L. I.–Viharos L.: Az életbiztosítás alapjai. Polygon, Szeged, 2001.

**MAT/164** Absztrakt integrálemélet

Kristóf János - KRJKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Hiányzó leírás.

**MAT/166** Banach-algebrák

Kristóf János - KRJKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

C\*-algebrák ábrázolásai., pozitív funkcionálok és a GNS-konstrukció, B\*-algebrák ábrázolásai, absztrakt Gelfand-Rajkov tétel, második Gelfand-Najmark tétel, ábrázolások Hilbert-integrálja, spektráltételek C\*-algebrákra és mérhető függvényszámítás.

Topologikus csoportok alaptulajdonságai, folytonos topologikus és unitér ábrázolások, Radon-mértékek lokálisan kompakt tereken, baloldali Haar-mérték egzisztenciája és unicitása, moduláris függvény, reguláris ábrázolások, lokálisan kompakt csoport mértékalgebrája, a harmonikus analízis alaptétele, Gelfand–Rajkov tétel, kompakt csoportok folytonos unitér ábrázolásai (Peter-Weyl tételek), kommutatív lokálisan kompakt csoportok folytonos unitér ábrázolásai (Stone-tételek), Radon-mértékek faktorizációja, indukált unitér ábrázolások és Mackey tételei.

Kötelező irodalom: Kristóf János Analízis IV. <http://cs.elte.hu/~krja>

**MAT/167** C\*-algebrák

Tarcsay Zsigmond

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Hiányzó leírás.

**MAT/168** Felületi mértékek

Kristóf János - KRJKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Hiányzó leírás.

**MAT/169** Geometriai funkcionálanalízis

oktató: Kristóf János - KRJKABT.ELTE

Gruber Tibor - GRTMAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Konvex halmaz extrémális pontjai; Krein-Milman tétel; Carathéodory-Minkowski tétel; pozitív Radon-mérték által generált felső integrál és Carathéodory-féle külső mérték; Fatou-tétel; szubtraktivitás-formulák; külső regularitás és moderáns halmazok; mérhető halmazok; mérhető moderáns halmazok belső regularitása; mértékelméleti Reisz-féle reprezentációs tétel; Radon-mérték koncentráltasága; kompakt konvex halmaz feletti valószínűségi Radon-mérték baricentruma; az extrémális pontok halmazán topologikusan koncentrált valószínűségi radon-mérték létezése; Choquet-tétel metrizálható kompakt konvex halmazokra; Mokobodzki-lemmák; a baricentrum „belső” jellemzése; Bauer-féle maximum-minimum elv; Choquet-féle rendezés és maximális mértékek létezése; Choquet-tétel kompakt konvex halmazokra (a nem metrizálható eset)

**MAT/170** Harmonikus analízis I.

Kristóf János - KRJKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Hiányzó leírás.

**MAT/171** Harmonikus analízis II.

Kristóf János - KRJKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Hiányzó leírás.

**MAT/172** Modellezés alapjai

Kristóf János - KRJKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Hiányzó leírás.

**MAT/173** Topologikus vektorterek II.

Tarcsay Zsigmond

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Hiányzó leírás.

**MAT/174** Valós függvénytan I.

Kristóf János - KRJKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Topológiai alapok. Lengyel terek. A kategória-tétel. A monotonitási tétel és következményei. Folytonos függvények tipikus tulajdonságai. A Banach-tétel és következményei. A Banach-Mazur játék és alkalmazásai.

Ajánlott irodalom: Laczkovich Miklós: Valós függvénytan, ELTE 1995. J. C. Oxtoby: Measure and Category, Springer 1980.

**MAT/175** Valós függvénytan II.

Keleti Tamás - KETKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

A leíró halmazelmélet elemei.

Borel halmazok. A Baire-féle függvényosztályok. Analitikus és koanalitikus halmazok. Alkalmazások.

Ajánlott irodalom: Laczkovich Miklós: Valós függvénytan, ELTE 1995. A. S. Kechris: Classical Descriptive Set Theory, Springer 1995.

**MAT/177** Általános differenciálgeometriai struktúrák

Kalmár Boldizsár

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Az előadás témáját az előadó határozza meg. Két lehetséges tematika:

Szimplektikus sokaságok. Lagrange-féle részsokaságok. Darboux tétele. Poisson-sokaságok és ezek felbontása szimplektikus levelekre. Szimplektikus struktúra a koadjungált reprezentáció orbitjain. Homogén szimplektikus sokaságok osztályozása. Szimplektikus sokaságok geometriai kvantálása, az orbitmódszer.

Ajánlott irodalom:

3) V. I. Arnold: A mechanika matematikai módszerei, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.

4) V. Guillemin, S. Sternberg: Symplectic Techniques in Physics, Cambridge University Press 1996.

Hiperbolikus sokaságok. A Mostow-féle merevségi tétel, Kazhdan és Margulis lemmája. A hiperbolikus geometria szerepe a 3-dimenziós sokaságelméletben. A Thurston–Jorgensen-elmélet elemei.

**MAT/178** Differenciálformák

Kalmár Boldizsár

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

De Rham-kohomológia. Poincaré-lemma. Mayer–Vietoris-sorozat. Künneth-formula. Poincaré-dualitás. Thom-izomorfizmus. Kévék és előkévék. Axiomatikus kévekohomológia. A klasszikus kohomológiaelméletek. A de Rham-tétel. Karakterisztikus osztályok (Chern- és Pontrjagin-osztályok, Euler-osztály) bevezetése differenciálformákkal, alkalmazások.

A térfogati forma és a Hodge-operátor Riemann-tereken. A Laplace–Beltrami-operátor. Harmonikus formák, Hodge tétele. Elliptikus operátorok.

- 1) R. Bott, L.W. Tu: Differential Forms in Algebraic Topology, Graduate Texts in Mathematics 82. Springer, New York, 1982.
- 2) F. Warner: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Graduate Texts in Mathematics 94, Springer, 1983.

**MAT/179** Bonyolultságelmélet II.

Lovász László - LOLKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Véletlenített bonyolultságosztályok. Pszeudovéletlen generátorok. Interaktív protokollok. Shamir tétele:  $IP=PSPACE$ . Nehéz problémák közelíthetőség és közelíthetetlensége, a PCP tétel. Alsó becslések Boole-hálózatokon. Párhuzamos algoritmusok aritmetikai problémákra, rendezésre, gráfproblémákra és lineáris algebrai feladatokra. Párhuzamos algoritmusok kisfokú hálózatokon. Kolmogorov bonyolultság.

**MAT/180** Gráf-homomorfizmusok I.

Lovász László - LOLKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Gráfok homomorfizmusai, algebrai tulajdonságaik. Homomorfizmusfüggvények jellemzése. Nagy gráfok elmélete, konvergens gráfsorozatok, grafonok mint gráf-limeszek. Regularitási lemmák. Ezek alkalmazásai a gráftulajdonság-tesztelés és az extrémális gráfelmélet területén.

**MAT/183** Topológiai és egyéb módszerek a gráfelméletben

Lovász László - LOLKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Az algebrai topológia és nemlineáris algebra módszereinek alkalmazásai a gráfelmélet területén. Szimpliciális komplexusok, topológikus összefüggőség. Összefüggő részekre bontás, Kneser gráfok és hipergráfok. Algebrai és bináris döntési fák méretének topológiai becslése. Kombinatorikus Nullstellensatz és alkalmazásai.

**MAT/184** Válogatott fejezetek a gráfelméletből szeminárium

Jordán Tibor

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Az elsajátítandó ismeretanyag rövid (néhány soros) leírása:

Válogatott fejezetek a gráfelméletből. Néhány téma: sajátértékek, automorfizmusok, gráf-polinomok (pl. Tutte polinom), topológiai problémák.

Ajánlott irodalom:

Lovász L.: Kombinatorikai problémák és feladatok, Typotex

**MAT/185** Véletlen struktúrák és alkalmazások

Lovász László - LOLKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Hiányzó leírás.

**MAT/186** Haladó Adatbányászat

Lukács András - LUALAAE.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Gyakori mintázat keresés. Asszociációs szabályok. Szintenként haladó algoritmusok, Apriori. Partíciós és Toivonen algoritmus. Mintanövelő algoritmusok, FP-growth. Hierarchikus asszociációs szabályok. Kényszerek kezelése. Korrelációkeresés.

Dimenziócsökkentési eljárások. Spektrál módszerek, közelítés kis rangú mátrixszal. Szinguláris felbontás. Fingerprintek, lenyomat alapú hasonlóságkeresés. Klasszifikáció. Döntési fák, neurális hálók, k-NN, Bayes-módszerek. Kernel-módszer, SVM. Klaszterezés. Particionáló algoritmusok, k-közép. Hierarchikus algoritmusok. Sűrűség és link alapú módszerek, DBSCAN, OPTICS. Spektráلكlaszterezés. Alkalmazások és implementációs kérdések. Adatbányászati rendszerarchitektúrák. Adatszerkezetek.

Ajánlott irodalom:

Bodon Ferenc adatbányászati jegyzete,

<http://www.cs.bme.hu/~bodon/magyar/adatbanyaszat/>

Jiawei Han és Micheline Kamber: *Data Mining: Concepts and Techniques*, Morgan Kaufmann Publishers, 2000, ISBN 1558604898, magyarul „Adatbányászat, Konceptiók és technikák”, Pannem 2004, ISBN 9635453949.

Dr. Abonyi János (szerk.): *Adatbányászat - a hatékonyság eszköze*, Computerbooks Kiadó, 2006.

Pang-Ning Tan, Michael Steinbach, Vipin Kumar: *Introduction to Data Mining*, Addison-Wesley, 2006, ISBN 0321321367.

T. Hastie, R. Tibshirani, J. H. Friedman: *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction*, Springer-Verlag, 2001.

**MAT/187** Lie-csoportok reprezentációi

Magyar Zoltán – MAZOAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Hiányzó leírás.

**MAT/188** Lie-csoportok, algebrai csoportok

Frenkel Péter Ernő

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Hiányzó leírás.

**MAT/189** Idősorok elemzése 1.

Márkus László – MALKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Idősorok összefüggési struktúráinak klasszikus (autokovariancia, autokorreláció és parciális autokorreláció), és újabban előtérbe került jellemzése (dinamikus kopulák, Kendall tau). Unitér operátorok és a stacionárius folyamat spektrárelőállításának kapcsolata. Fáziskapcsoltság. Az integrált autoregressziós mozgóátlag ARIMA(p,d,q) folyamatok tulajdonságainak áttekintése. Sztochasztikus rekurziós egyenletek stacionárius megoldásának létezése Ljapunov exponenssel. Kesten-Vervaat-Goldie tétel reguláris változású eloszlással bíró stacionárius eloszlás létezéséről. Az ARCH(1) egyenlet stacionárius megoldása létezésének feltétele. GARCH folyamatokra vonatkozó eredmények. Bilineáris folyamatokra reguláris eloszlású megoldás létezésének feltétele. Véletlen együtthatós AR, és a SETAR modellek. A várható érték becslése a spektrálmérték tulajdonságai függvényében. Az autokorreláció függvény becslésének torzítása, szórása, konzisztenciája és határeloszlása – különös tekintettel a nem-normális határeloszlásra. A periodogram a diszkrét spektrum becslésére, tulajdonságai. A spektrálsűrűségfüggvény becslése ablakolással, ennek torzítása, szórása és konzisztenciája. Az ablak feladatra szabása – sávszélesség. Az előfehérítés módszere, CAT kritérium.

Ajánlott irodalom:

Michelberger-Szeidl-Várlaki: *Alkalmazott folyamatstatisztika és idősor analízis*, Typotex, 2001.

Priestley, M.B.: *Spectral Analysis and Time Series*, Academic Press 1981

Brockwell, P. J., Davis, R. A.: *Time Series: Theory and Methods*. Springer, N.Y.

1987

Tong, H. : *Non-linear time series: a dynamical systems approach*, Oxford University Press, 1991.

Hamilton, J. D.: *Time series analysis*, Princeton University Press, Princeton, N. J. 1994

Brockwell, P. J., Davis, R. A.: *Introduction to time series and forecasting*, Springer. 1996.

Pena, D., Tiao and Tsay, R.: *A Course in Time Series Analysis*, Wiley 2001.

#### **MAT/190** Idősorok elemzése 2.

Márkus László – MALKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Idősorok korrelálatlansági, független értékűségi, tesztjei: Box-Pierce és Ljung-Box fordulópont stb. próbák és általánosításai. Egységgyök-próbák: Dickey-Fuller teszt és általánosításai, KPSS-teszt, stb. A modellek paraméterbecslései. AR folyamatra Yule-Walker becsléssel és Burg-algoritmussal. MA folyamatra a Box-Jenkins módszer, ARMA folyamatra Durbin-Levinson és Hannan-Rissanen algoritmusok. GARCH folyamatra kvázi maximum-likelihood becslés, ennek aszimptotikus torzítatlansága, konzisztenciája és aszimptotikus normalitása. Rendszelekcio az Akaike-, a Bayes- és a Hannan-Quinn információk kritériumokkal. Hosszú távú összefüggőség avagy hosszú emlékezet: 3 definíció ekvivalenciája. A frakcionálisan integrált folyamatok és önhasznó folyamatok, kapcsolatuk a hosszú emlékezettel. Donsker tétel – invariancia elv – Lamperti tétel hármassal. Frakcionális Brown-mozgás, frakcionális fehér zaj, és a FARIMA folyamatok. Hosszú emlékezetű folyamatok funkcionáljaira valamint spektrumára vonatkozó határeloszlás-tételek. A Hurst együttható becslésére adjusted range (R/S) statisztikák (klasszikus, Taqqu-féle grafikus, Lo féle módosított R/S) és tulajdonságaik. Becslés a V/S és a KPSS statisztikákkal, majd az aggregált variancia módszerrel. Spektrum alapú becslések: Geweke – Porter-Hudak, és Lobato – Robinson. A frakcionális differenciálás rendjének parametrikus becslései közül a Whittle és a lokális Whittle becslés. A rezsimváltó folyamatok definiálása után megmutatjuk, hogy ezek képesek hosszú emlékezetet mimikálni a detektáló statisztikákban. A rezsimváltó ill. általánosabban a rejtett állapotú folyamatok egyik lehetséges, Bayes-elven nyugvó identifikációs eljárásaként vezetjük be a Markov Chain Monte Carlo (MCMC) becsléseket, szót ejtve ezek diagnosztikájáról is.

Idősorok maximumai. A maximumok klasztereződése, és az extrémális index.

Ajánlott irodalom:

Michelberger-Szeidl-Várlaki: *Alkalmazott folyamatstatisztika és idősor analízis*, Typotex, 2001.

Priestley, M.B.: *Spectral Analysis and Time Series*, Academic Press 1981

Brockwell, P. J., Davis, R. A.: *Time Series: Theory and Methods*. Springer, N.Y. 1987

Tong, H. : *Non-linear time series: a dynamical systems approach*, Oxford University Press, 1991.

Beran, J.: *Statistics for Long-Memory Processes*. Chapman and Hall, New York. 1994

Hamilton, J. D.: *Time series analysis*, Princeton University Press, Princeton, N. J. 1994

Brockwell, P. J., Davis, R. A.: *Introduction to time series and forecasting*, Springer. 1996.

Pena, D., Tiao and Tsay, R.: *A Course in Time Series Analysis*, Wiley 2001.

#### **MAT/193** A modellezés alapjai

Matolcsi Tamás – MATKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Hiányzó leírás.

**MAT/194** A téridő struktúrája

Matolcsi Tamás – MATKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Hiányzó leírás.

**MAT/197** Független változók határeloszlás-tételei

Michaletzky György - MIGKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Korlátlanul osztható eloszlás és karakterisztikus függvény. Poisson folyamat, összetett Poisson folyamat. Poisson pontfolyamat általános karakterisztikus mérték mellett. Pontfolyamat szerinti integrál. Lévy–Hincsin formula. Nem negatív és véges szórású korlátlanul osztható eloszlások karakterisztikus függvénye. Stabilis eloszlások karakterisztikus függvénye. Stabilis eloszlások generálása, farokvalószínűség nagyságrendje. Szériasorozatok határeloszlásai.

Ajánlott irodalom:

Y. S. Chow – H. Teicher: Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales. Springer, New York, 1978.

W. Feller: An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. 2. Wiley, New York, 1966.

**MAT/198** Stacionárius folyamatok paramétereinek becslése

Márkus László

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Stacionárius folyamatok várható értékének és kovarianciafüggvényének becslése. A spektrum becslése. Periodogram. Diszkrét spektrum. Folytonos spektrum. A spektrum konzisztens becslése, simítás, ablakfüggvények használata. Kevert spektrumú folyamatok. Hipotézisvizsgálat.

**MAT/199** Kockázati folyamatok

Michaletzky György - MIGKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Kárfolyamat, teljes kárfolyamat. Speciális esetek: összetett Poisson-folyamat, Markov-folyamat, felújítási folyamat. A kárfolyamat eloszlásának közelítő meghatározása.

Tönkremenés-elmélet. A tönkremenés valószínűsége összetett Poisson-folyamat esetén (véges, illetve végtelen időhorizontra). Lundberg- tétel (Cramer-Lundberg-féle közelítés), autoregressziós folyamat esetén (C-L-közelítés stabil autoregressziós polinom esetén), általános független növekményű folyamatok esetén.

A tönkremenés valószínűsége felújítási folyamatok esetén.

Ajánlott irodalom:

Michaletzky György: Kockázati folyamatok. ELTE Eötvös Kiadó, egyetemi jegyzet, 2001

P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch: Modelling extremal events. Springer, 1999.

H. U. Gerber: An introduction to mathematical risk theory. S.S.Heubner Found. Philadelphia, 1979.

H. H. Panjer, G. E. Willmot: Insurance Risk Models. Society of Actuaries, 1992.

**MAT/200** Markov-láncok

Csiszár Villő – CSVKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Sztochasztikus folyamatok: Markov-tulajdonság, erős Markov-tulajdonság, homogenitás. Diszkrét paraméterű Markov-láncok: definíció, átmenetmátrix, az állapotok osztályozása. Periódus, visszatérőség. Az átmenetvalószínűségek konvergenciája. Stacionárius eloszlás. Nagy számok törvénye és centrális határeloszlás-tétel irreducibilis, pozitív rekurrens Markov-lánc funkcionáljára. Átmenetvalószínűségek tabu állapotokkal. Reguláris mérték, Doeblin hányados tétele. Megfordított Markov-lánc. Elnyelődési valószínűségek. Perron-Frobenius tételek.

Ajánlott irodalom:

Karlin – Taylor: Sztochasztikus folyamatok. Gondolat Kiadó, 1985.

Chung: Markov Chains With Stationary Transition Probabilities. Springer, 1967.

Isaacson – Madsen: Markov Chains: Theory and Applications. Wiley, 1976.

#### **MAT/206** Tömegkiszolgálási rendszerek

Michaletzky György - MIGKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

A tömegkiszolgálási rendszerek elméletének alapjai. Little-formula.

Tömegkiszolgálási modellek: Lindley-tétel, Kiefer-Wolfowitz tétel, Wiener-Hopf egyenlet általános modellekre. A beérkezési folyamat jellemzése. Grigelionis-tétel. Felújítási folyamatok, Blackwell-tétel. Speciális egykiszolgálós modellek stacionér megoldása. Extremális érték és nagy eltérés problémák tömegkiszolgáló rendszerekben. Többkiszolgálós rendszerek approximációja. Markov-modellek, beágyazott Markov-folyamatok. Pollaczek-Hincsin formula. Wiener-Hopf faktorizáció.

Ajánlott irodalom:

L. Kleinrock: Sorbanállás-kiszolgálás. Bevezetés a tömegkiszolgálási rendszerek elméletébe. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

#### **MAT/207** Véletlen mátrixok sajátértékeinek eloszlása

Michaletzky György MIGKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Független elemű szimmetrikus mátrixok sajátértékeinek határeloszlása (Wigner-tétel).

Határeloszlás alacsony rendű momentumok végeessége esetén (Arnold-tétel).

A várható érték konvergenciája, sztochasztikus konvergencia, 1 valószínűségű konvergencia.

Kovariancia típusú mátrixok sajátértékeinek aszimptotikus eloszlása (Marcsenko–Pasztur tétel, Bai–Lin tétel).

Lindeberg típusú szükséges és elégséges feltétel független elemű szimmetrikus mátrixok határeloszlására (Girko-tétel). Stieltjes-transzformált, folytonossági tétel. A várható érték konvergenciájának és az 1 valószínűségű konvergenciának az ekvivalenciája.

Ajánlott irodalom:

V. L. Girko: Szlucsajnüle matricü. Vücsca Skola, Kijev, 1975

V. L. Girko: Szpektralnaja tyeorija szlucsajnüh matric. Nauka, Moszkva, 1988

Marchenko, V.A., Pastur L.A.: Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices. Math. USSR, Sb. 1, 457-483 (1967)

Wigner, E.: On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. Ann. of Math. 67, 325-327 (1958)

#### **MAT/208** A matematikai statisztika alapjai 1.

Móri Tamás – MOTKAAT.ELTE

9 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

A sűrűségfüggvény becslése. Simított tapasztalati eloszlás, Parzen-Rosenblatt féle tapasztalati sűrűségfüggvény, hisztogram.  
 Elégségesség, minimális elégségesség, teljesség, korlátosan teljesség.  
 Exponenciális eloszláscsalád statisztikai vizsgálata  
 Másodlagos mintavétel, jackknife, bootstrap.  
 A Jeffrey-féle nem-informatív a priori eloszlás. Általánosított (formális) Bayes-becslések.  
 Ekvivariáns becslések, Pitman-becslés.  
 L-becslések, korrelált hibájú lineáris modell. Az eltolásparaméter aszimptotikusan optimális L-becslése.  
 M-becslések, robusztusság. M-becslések aszimptotikus viselkedése. A Huber-féle M-becslés aszimptotikus minimax-tulajdonsága. Kapcsolat az M- és az L-becslések között.  
 Véges sokaságból való mintavétel. Állandó együtthatós lineáris becslések megengedhetősége.

Ajánlott irodalom:

E. L. Lehmann: Theory of point estimation. Wiley, New York, 1983.

**MAT/209** A matematikai statisztika alapjai 2.

Móri Tamás – MOTKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Egyoldali ellenhipotézis monoton likelihood-hányadosú osztályban. Kétoldali ellenhipotézis exponenciális eloszláscsaládban. Hasonlóság, Neyman-struktúra. Hipotézisvizsgálat zavaró paraméterek jelenlétében.

A klasszikus paraméteres próbák optimalitása. Aszimptotikus próbák. Általánosított likelihood-hányados próba, a khi-négyzet próbák levezetése.

A tapasztalati folyamat konvergenciája Brown-hídhöz. Gauss-folyamatok Karhunen-Loève sorfejtése. A klasszikus nemparaméteres próbák aszimptotikus elemzése.

Invariáns és Bayes-próbák.

A konfidenciahalmazok elméletének kapcsolata a hipotézisvizsgálattal.

Ajánlott irodalom:

E. L. Lehmann: Testing Statistical Hypotheses, 2nd Ed., Wiley, New York, 1986.

Móri Tamás: Statisztikai hipotézisvizsgálat (e-könyv). Typotex, Budapest, 2011. [ [www.interkonyv.hu](http://www.interkonyv.hu) ]

**MAT/210** Élettartam-adatok elemzése

Móri Tamás – MOTKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Alapfogalmak, meghibásodási idők, cenzorálás típusai, összműködési idő. Hazárd-függvény, meghibásodási tényező.

Élettartam-eloszlások. Exponenciális minta elemzése

Nemparaméteres maximum likelihood. Túlélésfüggvény becslése cenzorált mintából: a Kaplan–Meyer-féle szorzatbecslés. Greenwood-formula. Aktuárius becslés.

Arányos hazárd-modell. Teljes, feltételes, ill. parciális likelihood.

Öregedő eloszlások osztályai: IFR, IFRA, NBU. Tartalmazási kapcsolatok. Az osztályok zártsága gyenge konvergenciára és konvolúcióra.

Monoton és koherens rendszerek, a rendszer megbízhatósága. Az IFRA és NBU osztály zártsága. Az IFR osztály lezárása.

Víztorló-modell. Öregedő tulajdonságok megőrződése sokk-modellekben.

IFRA eloszlásfüggvény ML becslése, inkonzisztencia. IFR eloszlásfüggvény ML becslése, legnagyobb konvex minoráns. Konzisztencia.

A bioassay-probléma.

Az EM algoritmus.

Ajánlott irodalom:

Móri Tamás - Élettartamadatok elemzése (e-könyv). Typotex, Budapest, 2011. [ [www.interkonyv.hu](http://www.interkonyv.hu) ]

D. R. Cox–D. Oakes: Analysis of Survival Data. Chapman and Hall, London, 1984.

R. E. Barlow–F. Proschan: Statistical Theory of Reliability and Life Testing. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1975.

#### **MAT/211** Martingálemélet

Móri Tamás – MOTKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Martingálok 1 valószínűségű és  $L_p$ -beli konvergenciája, reguláris martingálok.

Reguláris megállási idők, Wald-azonosság.

Négyzetesen integrálható martingálok konvergenciahalmaza.

Hilbert-tér értékű martingálok.

Centrális határeloszlás-tétel martingálokra.

Fordított martingál,  $U$ -statisztikák, felcserélhetőség.

Alkalmazások: Martingálok a pénzügyi matematikában, a Conway-algoritmus, optimális stratégiák nyereséges játékokban, elágazó folyamat kétféle típusú egyedekkel.

Ajánlott irodalom:

Móri Tamás - Diszkrét paraméterű martingálok (e-könyv). Typotex, Budapest, 2011. [ [www.interkonyv.hu](http://www.interkonyv.hu) ]

Y. S. Chow – H. Teicher: Probability Theory – Independence, Interchangeability, Martingales. Springer, New York, 1978.

J. Neveu: Discrete-Parameter Martingales. North-Holland, Amsterdam, 1975.

#### **MAT/213** Hálóelmélet

Pálfy Péter Pál – PAPKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Partícióhálók, minden háló beágyazható egy partícióhálóba. Szabad hálók, Whitman feltétele, az elemek kanonikus alakja, szabad hálók atomjai, a szabad hálók féldisztributívak, a műveletek folytonosak. Létezik fixpontmentes monoton leképezés. Lezárási rendszerek. Teljes algebrai és geometriai hálók. Moduláris hálók. A három elemmel generált szabad moduláris háló. A Jordan–Dedekind-féle láncfeltétel. Félig moduláris hálók. Disztributív hálók. Hálók és geometria kapcsolata: projektív geometriák altérhálója. A Desargues-azonosság, geomoduláris hálók. Koordinátázás. Hálókongruenciák. Hálóvarietások. A Jónsson-lemma.

Komplementumos hálók. A relatív komplementumos hálók kongruenciái.

Részalgebrahálók. Kongruenciahálók. A Grätzer–Schmidt-tétel.

#### **MAT/214** Algebra szeminárium

Pálfy Péter Pál – PAPKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételt

Kutatószeminárium.

#### **MAT/215** Lie-algebrák

Halasi Zoltán

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Alapfogalmak; feloldható és nilpotens Lie-algebrák. Deriválások. Reprezentációk és modulusok. Nilpotens Lie-algebrák feletti modulusok; súlyok. Cartan-részalgebra, Cartan-felbontás. Killing-forma. Féligegyszerű Lie-algebrák Cartan-felbontása, gyökök. Fundamentális gyökök, fundamentális tükrözések. Weyl-csoport. Cartan-mátrix, Dynkin-diagram. Az összefüggő Dynkin-diagramok osztályozása. A

komplex test feletti egyszerű Lie-algebrák, konstrukciók. Kivételes Lie-algebrák. Valós test feletti, ill. moduláris Lie-algebrák.

Ajánlott irodalom:

Humphreys: Introduction to Lie Algebras and Representation Theory

**MAT/216** Lie-típusú egyszerű csoportok

oktató: Pálfy Péter Pál – PAPKAAT.ELTE

Pelikán József - PEJKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Klasszikus csoportok: speciális lineáris, szimplektikus, ortogonális, unitér csoportok. Véges Chevalley-csoportok: diagonális, monomiális és parabolikus részcsoporthoz; BN-párok. Csavart típusú egyszerű csoportok. Sporadikus egyszerű csoportok (Mathieu-csoportok, Higman–Sims-csoport, Leech-rács, Conway-csoportok, Monster).

**MAT/217**  $p$ -csoportok

Pálfy Péter Pál – PAPKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Kombinatorikus csoportelmélet: szabad csoportok, a Nielsen–Schreier-tétel, a Schreier-féle indexformula, Cayley-gráfok. Földoldható csoportok: a Sylow-tételek általánosítása Hall-részcsoporthoz,  $p$ -földoldhatóság. A transzfer alkalmazásai (Burnside tétele  $p$ -komplementum létezéséről, Schur tétele: a kommutátor-részcsoporthoz véges, ha a centrum indexe véges). Kommutátorok, centrálancok  $p$ -csoportokban. Reguláris  $p$ -csoportok, maximális osztályú  $p$ -csoportok. Hatványteljes csoportok: Abel-csoportok (és reguláris csoportok) egyes tulajdonságainak analogonja, nagy hatványteljes részcsoporthoz létezése tetszőleges csoportban. Lineáris módszerek a véges  $p$ -csoportok elméletében. Aszimptotikus csoportelmélet.

Ajánlott irodalom:

Robinson: A Course in the Theory of Groups

**MAT/218** Permutációcsoportok

Pálfy Péter Pál – PAPKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Alapfogalmak: csoportthatás, stabilizátorok, orbitok, blokkok. Primitivitás, 2-tranzitív és sokszorosan tranzitív csoportok, szigorú tranzitivitás, Frobenius-csoportok, Zassenhaus-csoportok. A koszorúsorhoz imprimitív és primitív hatása, a csavart koszorúsorhoz. A primitív csoportok szerkezete, az O’Nan–Scott-tétel. Uniprimitív és 2-tranzitív csoportok rendjére és minimális fokára vonatkozó korlátok.

Ajánlott irodalom:

Dixon-Mortimer: Permutation groups

**MAT/220** Csoportkarakterek alkalmazásai

Pelikán József - PEJKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Csoportrepresentációk, a csoportalgebra. Schur-lemma. Maschke tétele. A féligegyszerű algebrákhoz vonatkozó Wedderburn–Artin-tétel. Irreducibilis és teljesen reducibilis representációk. Karakterek. Ortogonalitási relációk. Centrum, kommutátor részcsoporthoz, normálosztók meghatározása a karaktertáblákból. Algebrai egészek. A Burnside-féle  $p^a q^b$ -tétel. Karakterek fokára vonatkozó tételek. Karakterek szorzata. Indukált representációk és karakterek.  $M$ -csoportok, Taketa tétele. Frobenius-csoportok. A Frobenius-magra vonatkozó Frobenius-tétel. TI-halmazok és kivételes karakterek. Csoportok jellemzése a 2-Sylow-részcsoporthozjukkal és az

involúciók centralizátorával.

Ajánlott irodalom:

Isaacs: Character Theory of Finite Groups

**MAT/222** Fejezetek a csoportelméletből

*Halasi Zoltán*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Változó témakörök a véges csoportok elméletéből.

Permutációcsoportok. Többszörösen tranzitív csoportok, Mathieu-csoportok.

Primitív permutációcsoportok, O’Nan-Scott-tétel.

Egyszerű csoportok. Klasszikus csoportok, Lie-típusú egyszerű csoportok, sporadikus csoportok.

Csoportbővítések. Projektív reprezentációk, Schur-multiplikátor.

$p$ -csoportok. Frattini-részcsoport. Speciális és extraspeciális  $p$ -csoportok. Maximális osztályú csoportok.

Részcsoporthálók. Ore és Iwasawa tétele.

Ajánlott irodalom: D. J. S. Robinson: A course in the theory of groups, Springer, 1993

P. J. Cameron: Permutation groups, Cambridge University Press, 1999

B. Huppert: Endliche Gruppen I, Springer, 1967

**MAT/223** Fejezetek a gyűrűelméletből

*Ágoston István*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Struktúraelmélet (primitív gyűrűk, sűrűségi tétel, Jacobson-radikál, kommutativitási tételek). Centrális egyszerű algebrák (algebrák tenzorszorzata; Noether–Skolem-tétel, kettős centralizátor tétel, Brauer-csoport, keresztszorzat). Polinom-azonosságok (struktúratételek, Kaplansky tétele, Kuroš-probléma). Noether-gyűrűk (Goldie-elmélet és általánosításai, dimenzióelmélet). Neumann-reguláris gyűrűk. Kvázi-Frobenius gyűrűk (csoportalgebrák, szimmetrikus algebrák, homológikus tulajdonságok).

Ajánlott irodalom:

Herstein: Noncommutative Rings

**MAT/224** Kommutatív algebra

*Frenkel Péter*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Prím-, primér ideálok, nilradikál, Jacobson-radikál. Zariski-topológia, Krull-dimenzió. Faktorgyűrűk, faktormodulusok. Lokális tulajdonságok, lokális gyűrűk. Primér felbontás, egyértelműségének esetei. Egész-függőség, egészre zárt gyűrűk. A "Going-Up" és "Going-Down" tételek. Értékelésgyűrűk. Noether-gyűrűk, Lasker–Noether-tétel. Artin-gyűrűk, struktúratételük. Diszkrét értékelésgyűrűk, Dedekind-gyűrűk. Dimenzióelmélet, Hilbert-függvény. Reguláris lokális gyűrűk. Gröbner-bázis.

Ajánlott irodalom:

Atiyah—McDonald: Introduction to Commutative Algebra

**MAT/225** Sporadikus egyszerű csoportok

*Pelikán József - PEJKABT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Affin és projektív algebrai sokaságok, görbék, teljes metszetek, koordinátagyűrűk,

biracionális leképezések, Riemann–Roch-tétel, elliptikus görbék, szingularitások megszüntetése.

Ajánlott irodalom:  
Hartshorne: Algebraic Geometry

**MAT/226** Operátorfélcsoportok Hilbert térben II.

Bátkai András – BAAKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Az operátorfélcsoportokkal kapcsolatos alapfogalmak áttekintése. Alapvető példák valamint konstrukciók. A generátor fogalma, a rezolvens integrálrepresentációja a félcsoport Laplace transzformációjaként. Hille-Yosida tételkör. Disszipatív operátorok, Lumer-Phillips tétel. Alkalmazások első- és másodrendű differenciáloperátorokra.

Félcsoportok regularitási tulajdonságai (analitikus, differenciálható, normafolytonos, kompakt), közöttük a kapcsolat példák és ellenpéldák segítségével. A korlátos perturbáció, a Dyson-Phillips sor. Kitekintés nemkorlátos perturbációk irányába. Aszimptotikus tulajdonságok, a félcsoport és a generátor spektrumának viszonya. Zabczyk ellenpéldája. Spektráleképezés-tétel normafolytonos félcsoportokra.

Gearhart tétele Hilbert térbeli félcsoportokra.

Operátorfélcsoportok és az Cauchy probléma kapcsolata, jóldefiniáltság. Az inhomogén egyenlet klasszikus, erős, enyhe és gyenge megoldásfogalmi, ezek közötti viszony. Megoldások reprezentációja.

Példák: késleltetett és populációs egyenletek tárgyalása.

Kötelező irodalom:

Engel, K.-J., Nagel R., A Short Course on Operator Semigroups, Springer-Verlag, Universitext, 2006.

Ajánlott irodalom:

Engel, K.-J., Nagel R., One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics 194, 1999.

Bátkai, A., Piazzera, S., Semigroups for Delay Equations, A K Peters, 2005.

**MAT/227** Sztochasztikus modellek

Prékopa András – EHA.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételtető

Statikus és dinamikus modellek. Az adódó sztochasztikus programozási feladatok matematikai jellemzése és megoldó módszereik.

Lonkonkáv mértékek alaptétele. Valószínűségi korlátok illetve valószínűséget tartalmazó célfüggvények logkonkávítása. Kiértékelésük közelítő szimulációs eljárásokkal.

**MAT/229** Független növekményű, stacionárius és Markov-foly.

Prokaj Vilmos – PRVKAAT.ELTE

Michaletzky György MIGKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Korlátlanul osztható eloszlások karakterisztikus függvénye, Lévy-Hincsin formula. Poisson pontfolyamat és integrál. Az eloszlás tulajdonságainak (nemnegativitás, véges szórás) jellemzése a karakterisztikus függvény segítségével. Stabilis eloszlások karakterisztikus függvénye. Stabilis eloszlású változó generálása.

**MAT/230** Sztochasztikus analízis

Prokaj Vilmos – PRVKAAT.ELTE

9 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Lokális martingál, szemimartingál. Integrál szemimartingál szerint. Az integrál tulajdonságai. Kvadratikus variáció, BDG egyenlőtlenség, izometria tétel. Ito formula, Lévy karakterizáció, Girsanov tétel, Kazamaki és Novikov feltétel. Ito integrál.

Ajánlott irodalom:

Revuz–Yor: Continuous martingales and Brownian motion.

Protter: Stochastic integration and differential equation.

#### **MAT/233** A kombinatorikus optimalizálás műszaki alkalmazásai

Recski András – REAKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

A matroidelmélet alapfogalmainak átvizsgálása. Részletesebb kitekintés a matroidok algebrai és geometriai reprezentálásáról. Alkalmazások a villamos hálózatok klasszikus elméletében, hálózatok egyértelmű megoldhatóságának vizsgálata, szabadsági fokok számának meghatározása. Alkalmazások a nagybonyolultságú integrált áramkörök (VLSI) huzalozás-tervezésében. Pontdiszjunkt és éldiszjunkt modell, Manhattan-féle és korlátozás nélküli modell, különböző geometriák (egyetlen sor, csatorna, switchbox). Alkalmazások a statikában, rúdszerkezetek és tensegrity szerkezetek merevsége, leszúrása.

Ajánlott irodalom:

András Recski: Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics, Springer – Akadémiai Kiadó, 1989.

#### **MAT/234** Analízis kutatói szeminárium

Keleti Tamás

6 kredit, elmélet, -, ismételt

A szeminárium célja, hogy a résztvevők, elsősorban is kutatómunkájuk elején lévő fiatal kutatók, végzős vagy doktori iskolai tanulmányokat folytató hallgatók, segítséget kapjanak kutatásra alkalmas fontos, érdekes problémák megismerésében elsősorban a klasszikus analízis területén. A szeminárium módszere, hogy a kijelölt illetve megbeszélendő témákból adott irodalmat - elsősorban cikkeket - egy-egy résztvevő hallgató a szükséges mértékű konzultációval, segítséggel feldolgozza, és arról szemináriumi előadást tart. A szemináriumi előadáshoz kapcsolódóan kerül sor a kutatásra érdemes kérdések megbeszélésére, további javaslatok, esetleg irodalom megadására is. Amennyiben valaki érdemben kutatni kezdi a felvetett kérdéseket, úgy további konzultációkra, segítségre is számíthat.

#### **MAT/235** Bevezetés a potenciálméletbe

Révész Szilárd – RESNAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

A potenciálmélet - akárcsak pl. a Fourier analízis - eléggé "transzverzális" jellegű téma a matematikai analízisben, azaz sok témához kapcsolódik, sok helyen előjön, pl. a harmonikus függvények elméletében, a differenciálegyenletek elméletében, az approximációelméletben, a valószínűségszámításban, a funkcionál-analízisben stb. Az előadás célja megismertetni a klasszikus alapokat, majd bemutatni, hogy a legalapvetőbb elvek - pl. egyensúlyi eloszlás, különböző (formálisan eltérően értelmezett) energia-típusú mennyiségek egybeesése, diszkrét és folytonos értelmezések kapcsolata, Frostman-féle maximum-elv - mennyire általánosan is tárgyalhatóak, és ezáltal mennyi érdekes és váratlan témában alkalmazhatóak.

Irodalom:

- D. H. Armitage, S. J. Gardiner: Classical Potential Theory, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2001.
- O. D. Kellog: Foundations of potential theory, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XXXI, Springer, 1929.
- L.L. Helms: Introduction to potential theory, Pure and Applied Mathematics, Volume XXII, Wiley-Interscience, 1969.
- E. B. Saff, V. Totik: Logarithmic potentials with external fields, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Band 318, Springer, 1997.
- B. Fuglede: On the theory of potentials in locally compact spaces, Acta Math. 103 (1960), 139--215.
- B. Farkas, Sz. Gy. Révész: Potential theoretic approach to rendezvous numbers, Monatshefte für Mathematik, 148 (2006), 309--331.

**MAT/236 Számelmélet szeminárium**

Ruzsa Imre – RUINAAT.ELTE  
6 kredit, elmélet, -, ismételhető  
Kutatószeminárium.

**MAT/237 Modellelmélet I.**

Sági Gábor – SAGEANT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Ultraszűrők, szűrőterek és kombinatorikus alkalmazásai. Reguláris ultraszűrők és univerzális modellek. Homogén modellek. Ultraláncok. Frayne tétele. Jó ultraszűrők, konstrukcióik és szaturált modellek gyenge egzisztenciája, unicitása. A Kesler-Shelah tétel. Definiálhatóság: Svenonius és Beth tételei. Típuselkerülési tétel. Megszámlálható kategoricitás Stone-teres és automorfizmus-csoportos jellemzése. A véletlen gráfok elmélete megszámlálható-kategorikus. Végességi gráfok nulla-egy törvényei.

Ajánlott irodalom:

1. C.C. Chang, H.J. Keisler, Model Theory, Elsevier, North-Holland 1990.
2. W. Hodges, Model Theory, Cambridge Univ. Press, 1997.
3. D. Marker, Model Theory, an introduction, GTM-217, Springer-Verlag, 2002.
4. G. Sági, Válogatott Fejezetek a Modellelméletből, elektronikus jegyzet (kb.164 oldal), 2005.

**MAT/238 Modellelmélet II.**

Sági Gábor – SAGEANT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

A stabilitás definíciója. Példák és a stabilitás alaptulajdonságai. Tipusok definiálhatósága, stabilitás-spektrum, Morley-rang. Diszpergált terek, mint Stone-terek. Minimális halmazok. Atomos és prím-modellek. Kétszámosság-tételek. Morley kategoricitás-tétele. Megkülönböztethetetlen elemek stabil és instabil struktúrákban. Ehrenfrucht-Mostowski modellek. Selah „sokmodell” tétele: megszámlálható, instabil elméletek páronként nem izomorf, nem megszámlálható modelljeinek számossága a lehető legnagyobb. A geometriai stabilitáselmélet alapjai.

Ajánlott irodalom:

1. W. Hodges, Model Theory, Cambridge Univ. Press, 1997.
2. D. Marker, Model Theory, an introduction, GTM-217, Springer-Verlag, 2002.
3. S. Shelah, Classification Theory, Elsevier, North-Holland, 1990.
4. G. Sági, Válogatott Fejezetek a Modellelméletből, elektronikus jegyzet (kb.164 oldal), 2005.

**MAT/239 Additív számelmélet**

*Gyarmati Katalin – GYKKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

A körprobléma, az Erdős–Fuchs-tétel. A Hardy–Littlewood-módszer. A páratlan Goldbach-probléma. Nagy ívek, szinguláris sorok. Kis ívek, Vaughan módszere, Vinogradov–Vaughan és Vinogradov lemmái. A páros Goldbach-probléma ismertetése. A Waring-probléma. Weyl-összegek, a Weyl-módszer, Weyl-eltolás. Weyl lemmái, a Weyl-egyenlőtlenség, a különbségoperátor. Hua lemmája. A kis ívek adaléka. A nagy ívek adaléka a szinguláris sor és integrál függvényében (a bizonyítás vázlatával). Roth tétele a 3 tagú számtani sorozatokról. Négyzetek a különbségsorozatokban (vázlat).

**MAT/240** Exponenciális összegek a számelméletben

*Gyarmati Katalin – GYKKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Additív és multiplikatív karakterek, kapcsolatuk, alkalmazások. A Vinogradov-lemma és duálisa. Gauss-összegek. A Pólya–Vinogradov-egyenlőtlenség. A legkisebb kvadratikusan nemmaradék becslése. Kloosterman-összegek. A nagy szita aritmetikai és karakteres változata, alkalmazások. A számtani sorozatokban való eloszlás irregularitásai, karakterösszegek alsó becslése. Egyenletes eloszlás. Weyl-kritérium. Diszkrepancia. Erdős–Turán-egyenlőtlenség. Van der Corput módszere.

**MAT/241** Kombinatorikus számelmélet

*Gyarmati Katalin – GYKKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

A Brun-szita és alkalmazásai. Schnirelmann addíciós tétele. A prímszámok bázist alkotnak. Additív és multiplikatív Sidon-sorozatok. Osztathóság sorozatokban, primitív sorozatok. A “nagyobb szita”. Hilbert-kocka sűrű sorozatokban. Van der Waerden és Szemerédi számtani sorozatokra vonatkozó tételei.

**MAT/242** Számítógépes számelmélet

*Gyarmati Katalin – GYKKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Elemi műveletek és számelméleti feladatok időigénye.  $n=pq$  estén  $p$ ,  $q$  meghatározása polinomiálisan ekvivalens  $\varphi(n)$ -ével. Moduláris hatványozás. Faktorizáció algebrai azonosságokkal. A kriptográfia alapfogalmai. RSA, diszkrét logaritmus, a Diffie–Hellman-kulcs csere rendszer. Prímtesztelés, pszeudoprímek. Fermat-faktorizáció, a faktorbázis algoritmus, a kvadratikusan szita. Elliptikus görbék, a Diffie–Hellman-kulcs csereanalógja. Pszeudóvéletlen sorozatok, alkalmazásuk a Monte Carlo-módszer kapcsán, illetve a kriptográfiában.

Ajánlott irodalom:

N. Koblitz: A Course in Number Theory and Cryptography

**MAT/243** Nemkorlátos operátorok Hilbert- térben

*Tarcsay Zsigmond*

6 kredit, elmélet, -, ismételt

Nemkorlátos operátorok Hilbert adjungáltja; lezárrható és zárt operátorok Neumann jellemzése. Szimmetrikus operátorok lezárrható, önadjungált kiterjesztések Neumann elmélete. Nemkorlátos normális operátorok Hilbert téren: a spektráltétel általános alakja. Pozitív önadjungált operátorok szerepe. Pozitív szimmetrikus operátor önadjungált kiterjesztésének Neumann féle problémája, Krein elmélete: a Krein–Neumann, ill. Friedrichs kiterjesztés, mint legkisebb és legnagyobb lehetséges pozitív önadjungált kiterjesztés. Nemsűrűn definiált pozitív szimmetrikus operátorok önadjungált pozitívvá való kiterjesztésének problémája. Pozitív kvadratikusan alakok szerepe (Lebesgue felbontása, parallel összegek stb.). Extremális pozitív önadjungált kiterjesztések jellemzése az összes lehetséges kiterjesztések között

**MAT/244** Operátorkiterjesztések

Sebestyén Zoltán – SEZKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Hiányzó leírás.

**MAT/245** Geometriai függvénytan

Halász Gábor – HAGKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Phragmén-Lindelöf-típusú tételek. Kapacitás. Csebisev konstans. Transzfinit átmérő. Green

függvény és Robin konstans. Kapacitás és Hausdorff mérték. Konform sugár. Terület elv. Koebe-féle torzitási tételek. Egyrétű függvények együtthatóinak becslése. Terület-ív hossz elv. Extremális hossz. Konform leképezések kiterjesztése a határra. Négyzög és gyűrű modulusa. Kvázikonform leképezések. Kváziszimmetrikus függvények. Kvázikonform görbék.

Irodalom: Tsuji "Potential Theory", Hayman "Multivalent Functions", Ahlfors "Lectures on Quasiconformal Mappings".

**MAT/246** Speciális függvények

Halász Gábor – HAGKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Gamma függvény. Stirling formula a komplex síkon, nyeregpont módszer.

Zeta függvény. Függvényegyenlet, elemi tények a gyökökről. A Prímszámtétel.

Elliptikus függvények. Elliptikus görbék paraméterezése, rácsok. Az anharmonikus és a moduláris csoport fundamentális tartománya.

A teta függvény függvényegyenlete. Holomorf moduláris formák, alkalmazásuk a Négy Négyzetszám tételére.

Kötelező irodalom: Halász Gábor „Speciális függvények” c. (készülő) egyetemi jegyzete..

**MAT/247** Végtelen dimenziós dinamikai rendszerek kvalitatív elmélete

Sikolya Eszter – SIEKADT.ELTE

Bátkai András – BAAKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Tárgyleírás: A tárgy végtelen dimenziós Banach tereken értelmezett lineáris dinamikai rendszerek mint pl. parciális differenciálegyenletek, sztochasztikus folyamatok, kontrollproblémák, késleltetett egyenletek stb. megoldásához és a megoldások viselkedésének leírásához jól használható operátorfélcsoportelméletbe nyújt betekintést. Foglalkozik a félcsoportok alapvető tulajdonságaival (generátor, spektrálmélet, perturbáció stb.), fontos speciális osztályaival (pl. analitikus félcsoportok), továbbá a lehetséges alkalmazási területekkel.

Kötelező irodalom: K.-J. Engel and R. Nagel, A Short Course on Operator Semigroups, Universitext. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2006.

Ajánlott irodalom: K.-J. Engel and R. Nagel, One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Graduate Texts in Math., vol. 194, Springer-Verlag, New York, 2000.

**MAT/248** Lineáris parciális differenciálegyenletek

Simon László – SILKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Fourier-transzformáció. Szoboljev-függvényterek. Rugalmasságtani problémákra és a stacionárius hővezetés egyenletére vonatkozó peremérték és sajátérték feladatok gyenge (Szoboljev-térbeli), variációs és klasszikus megoldása. Kezdeti-peremérték feladatok lineáris egyenletekre: a klasszikus megoldás vizsgálata a Fourier-

módszerrel és a Galjorkin-módszerrel.

Ajánlott irodalom: Simon L. – E.A. Baderko, Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983

**MAT/249** Nemlineáris parciális differenciálegyenletek

*Simon László – SILKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Divergencia alakú kvázilineáris elliptikus egyenletekre vonatkozó peremérték feladatok gyenge (Szoboljev-térbeli) megoldása a monoton és pszeudomonoton operátorok elméletének felhasználásával. Elliptikus variációs egyenlőtlenségek. Divergencia alakú kvázilineáris parabolikus egyenletek és funkcionál differenciálegyenletek gyenge megoldása a monoton típusú operátorok elméletének felhasználásával.

Ajánlott irodalom: Application of monotone-type operators to nonlinear PDEs, author's edition, Budapest, 2013, ill. tanszéki honlap.

**MAT/250** Parciális differenciálegyenletek elmélete I.

*Simon László – SILKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Magasabb indexű Szoboljev-terek, kapcsolat a Fourier-transzformációval. paraméteres elliptikus problémák, peremérték feladatok klasszikus megoldásának létezése. Monoton típusú operátorok elméletének alkalmazása nemlineáris elliptikus egyenletekre.

Ajánlott irodalom: Simon L. – E.A. Baderko, Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

Application of monotone-type operators to nonlinear PDEs, author's edition, Budapest, 2013, ill. tanszéki honlap.

**MAT/251** Parciális differenciálegyenletek elmélete II.

*Simon László – SILKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Elliptikus variációs egyenlőtlenségek. Kompakt beágyazási tétel időfüggő Szoboljev-terekben. Nemlineáris evolúciós egyenletek vizsgálata pszeudomonoton operátorokkal. Alkalmazás nemlineáris parabolikus egyenletekre és funkcionál differenciálegyenletekre.

Ajánlott irodalom: Application of monotone-type operators to nonlinear PDEs, author's edition, Budapest, 2013, ill. tanszéki honlap.

**MAT/256** Alacsony dimenziós sokaságok topológiája

*Földvári Viktória Andrea*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

A kurzus a 3- és 4-dimenziós sokaságok topológiájába illetve csomok elméletébe nyújt bevezetést. Az érintett témák: Seifert 3--sokaságok, Thurston sejtése, Freedman és Donaldson tetelei. Kirby diagramok és Kirby kalkulus. Csomok invariánsai. Ezgotikus 4-sokaságok, Seiberg-Witten és Heegaard Floer elmélet. Irodalom: Gompf-Stipsicz: 4-manifolds and Kirby calculus (AMS, 1999) Stipsicz: Negydimenziós topologia (<http://www.renyi.hu/~stipsicz/magyar/index.html>)

### **MAT/257** Bevezetés az univerzális algebraiba

*Pálfy Péter Pál*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Hasonlósági típus, algebra, klónok, termek, polinomok. Részalgebra, homomorfizmus, direkt szorzat, azonosság, varietás, Birkhoff tételei. Kongruenciaháló, részalgebraháló, Malcev-lemma. Szubdirekt fölbontás, szubdirekt irreducibilis algebra. A Quackenbush-probléma. Gráfalgebra. Malcev-feltételek, a kongruenciafölcserélhető, a kongruenciadisztributív és a kongruenciamoduláris varietások jellemzése. A Jónsson-lemma, Fleischer tétele. Baker végesbázis-tétele. Teljességi kérdések, primál és függvényteljes algebra és jellemzésük (Foster–Pixley, Baker–Pixley, Rosenberg, Murskii). Diszkriminátor, Werner tétele. A Boole-szorzat és alkalmazása a diszkriminátorvarietások algebrainak leírására. A Quackenbush-féle jellemzés. Direkt reprezentálható varietások. Kommutátorelmélet. Abel-féle algebra, centralitás, a kommutátor tulajdonságai moduláris varietásokban. A Gumm-féle eltolás-lemma, a kommutátor szemantikai definíciója, a kommutátor tulajdonságainak bizonyítása. Differenciaterm, az Abel-féle algebra alaptétele (Taylor–Hermann). Az Abel-féle kongruenciák szerkezete, a hozzájuk rendelt modulus. A centralitás Gumm-féle jellemzése. Általánosított Jónsson-tétel.

Ajánlott irodalom:

Burris-Sankappanavar: A course in Universal Algebra

Freese-McKenzie: Commutator theory for congruence modular varieties

### **MAT/258** Fejezetek az univerzális algebraiból

*Kiss Emil – KIEKAAT.ELTE*

*Szabó Csaba – SZCKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

A kommutátorelmélet alkalmazásai: a Gumm–McKenzie–Werner-tétel: kongruenciafölcserélhető varietásban minden véges egyszerű algebra vagy függvényteljes vagy polinomiálisan ekvivalens egy modulussal. A Freese–Lampe–Taylor-tétel a kevés alapművelettel rendelkező algebra kongruenciahálójáról. Freese és McKenzie tétele: a végesen generált moduláris varietások jellemzése. Moduláris varietások egyszerű algebrai. Gumm eredményei a fölcserélhetőségről. A nilpotens algebra szerkezete, Freese és Vaughan-Lee végesbázis-tétele. A szelíd kongruenciák elmélete. Egy részhalmazon indukált algebra. A környezetek geometriája, környezetben indukált algebra kongruenciahálójára. Minimális algebra szerkezete: az iker-lemma, az öt különböző típus. A kongruenciaháló alakja és megcímkézése közötti kapcsolat. Interpretálás. Földoldható algebra és varietások. Magasabb dimenziós minimális halmazok. Centralitás és nilpotencia az általános esetben (Kearnes). Alkalmazások: véges algebra kongruenciahálójára vonatkozó eredmények (McKenzie, Pálfy, Pudlák). Olyan lokálisan véges varietások szerkezete, melyeknek az elsőrendű elmélete eldönthető (Burris, McKenzie, Valeriote). Az RS-sejtés nemtriviális kongruenciaazonosságot kielégítő varietásokra, és általában a típusalgebra eldönthetetlensége (McKenzie, Wood). Részvarietásháló. Szabad spektrum. Abel-féle varietások.

Ajánlott irodalom:

Freese-McKenzie: Commutator theory for congruence modular varieties

Hobby-McKenzie: The structure of finite algebras (Tame congruence theory)

### **MAT/259** Adattömörítés

*Szabó István – SZILAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Tömörítési modellek. A veszteségmentes tömörítés korlátai (Kraft-Fano egyenlőtlenség, entrópia).

Gyakorlati veszteségmentes adattömörítő eljárások és a hatékonyságuk becslése

(Shannon, Gilbert-Moore, Huffman kód, blokk kódok, aritmetikai kód). Vizsgálatok a Huffman kódok témakörében (élesebb korlát, hossz-korlátozott Huffman kódok). Az írott szöveg tömörítésének korlátai. LZ77, LZ78, LZW, LZSS kódolások és gyakorlati megvalósításai (GZIP, PKZIP, Compress, GIF,...). Markov forrás tömöríthetősége, az egy- és kétdimenziós futamhossz tömörítések: RLE, a FAX tömörítés elve.

A veszteséges tömörítések módszerei: a pszicho-vizuális- és pszicho-akusztikus tömörítések alapelvei, képtömörítések (JPEG, farktál tömörítés,...), videó-tömörítési szabványok, Shannon mintavételi tétele, kvantálás, modulációk, a hang-és beszédtömörítés elvi alapjai, minőségi kiértékelési módszerek.

Ajánlott irodalom:

Gyórfi L.- Győri S.- Vajda I.: Információ és kódelmélet;

D. Salomon: Data Compression

### **MAT/260** Kriptográfia

Szabó István – SZILAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

A kriptográfia helye az adatvédelemben: jogi környezet, veszélyek csoportosítása, programozott fenyegetések: vírusok, rejtett csatornák,... A szteganográfia-kriptográfia alapfogalmai.

Kriptográfiai primitívek: algoritmusok és a biztonság garanciális /bizonyítási/ módszerei. A kriptográfia története, történelmi hibák és kihasználásuk.

Információelméleti biztonság. Szimmetrikus (titkos) kulcsú rendszerek. Pszeudo-véletlen sorozatok kriptográfiai követelményei. Stream ciphers: lineáris visszacsatolású shift-regisztereken alapuló titkosítás, a lineáris kriptó-analízis alapjai. Block ciphers: LUCIFER, DES, Advanced Encryption Standard, differenciál kriptó-analízis. Aszimmetrikus (nyilvános) kulcsú (PKI) rendszerek, egyirányú függvények, klasszikus matematikai problémákon alapuló algoritmusok, kulcsegyeztetők, PKI kódolók (RSA, ECC), hash függvények. Kriptográfiai protokollok (blind signature, secret sharing, ...) Faktorizációs módszerek, protokollhibák.

Gyakorlatban alkalmazott kriptográfiai rendszerek és biztonságuk: GSM, WLAN, BlueTooth, Skype, elektronikus aláírási rendszerek, Secure Electronic Transaction Standard,... Nemzetközi és hazai szabványok és projektek.

Ajánlott irodalom:

Nemetz-Vajda: Algoritmos adatvédelem,

Buttyán-Vajda: Kriptográfia és alkalmazásai

Bruce Schneier: Applied Cryptography

Alfred J. Menezes, Paul C. van Oorschot, Scott A. Vanstone: Handbook of Applied Cryptography, CRC Press, 1997, <http://www.cacr.math.uwaterloo.ca/hac/>

### **MAT/261** Analitikus számelmélet

Zábrádi Gergely

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Prímszámtétel az alábbi alakú hibataggal:

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)} + O(x \exp(-c\sqrt{\log(x)}))$$

Szabálytalanságok a prímek eloszlásában. Számítási sorozatokra vonatkozó prímszámtétel, Siegel-gyök, a Siegel-Walfisz-tétel bizonyítása.

### **MAT/262** Algebrai geometria és differenciáلتopológia

Stipsicz András – STALAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

A MTA Renyi Alfred Matematikai Kutatóintézet 'Algebrai Geometria és

Differenciatopologia" osztalyanak heti szeminariuma a legfrissebb kutatasi eredményekrol, meghivott kulfoldi es magyar eloadokkal. Hetente valtozo tema, altalaban angolul.

**MAT/263** Galois-elméletek a matematikában

Szamuely Tamás – SZTKAKT.ELTE

6 kredit, elmGalois-elmélet testekre. Klasszikus Galois-elmélet (rövid ismételés). Provéges csoportok, a Galois-elmélet főtétele végtelen bővítésekre. Véges étale algebrák, a Galois-elmélet főtételének Grothendieck-féle alakja. Galois-elmélet topológiai fedésekre. Fedések a topológiában, Galois-fedések. A Galois-elmélet főtételei fedésekre. Univerzális fedés létezése, kapcsolat a fundamentális csoporttal. Monodrómiascsoportok. Lokálisan konstans kérék klasszifikációja a fundamentális csoport által. Lokális rendszerek, monodrómiascsoport. Differenciálegyenletekhez tartozó lokális rendszerek, a Riemann–Hilbert-probléma. Riemann-felületek Galois-elmélete. Alapfogalmak Riemann-felületekről. Riemann-felületek elágazó fedései, kapcsolat a függvénytest feletti véges étale algebrákkal. Alkalmazás: minden véges csoport Galois-csoport  $C(t)$  felett. A merevségi módszer. A komplex projektív egyenes elágazó fedései mint algebrai görbék, ezek definiálása  $\mathbf{Q}$  egy véges bővítése felett. Az algebrai fundamentális csoport. A merevségi módszer Galois-csoportok realizálására  $\mathbf{Q}$  felett. Thompson tétele: a Monster Galois-csoport  $\mathbf{Q}$  felett.

**MAT/265** Differenciálgeometriai feladatok és problémák

Szenthe János – SZJKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Az előadás célja annak bemutatása, hogyan lehet klasszikus görbe- és felületelméleti illetve modern differenciálgeometriai problémákat a Mathematica program segítségével megoldani, továbbá hogyan lehet szemléltetni különféle differenciálgeometriai fogalmakat kihasználva a Mathematica program grafikai és animációs képességeit.

Ajánlott irodalom:

- 2) Alfred Gray: Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, CRC Press 1999.

**MAT/266** Fizika és Geometria

Szenthe János – SZJKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Az előadás témáját az előadó határozza meg. Két lehetséges tematika:

Lagrange-mechanika. A második érintőnyaláb geometriája, másodrendű differenciálegyenlet egy sokaság felett, az általános spray fogalma és alaptulajdonságai, Lagrange-függvény és az Euler–Lagrange-egyenlet. Lagrange-rendszerek szimmetriái, Noether-tétel. Legendre-transzformáció, a Lagrange-féle és a Hamilton-féle mechanika kapcsolata.

Ajánlott irodalom:

- 2) Szenthe János: A mechanika újabb matematikai eszközei, Budapesti Műszaki Egyetem Továbbképző Intézete, Budapest, 1976.
- 3) V. I. Arnold: A mechanika matematikai módszerei, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.

Donaldson-elmélet. Maxwell-egyenletek, kalibrált mezők, Yang-Mills-funkcionál. Instantonok. K-funktor, Adams-operációk, Hopf-invariáns, exotikus differenciálható struktúrák  $\mathbf{R}^4$ -en.

Ajánlott irodalom:

- 2) M.M. Postnikov: Lecons de geometrie, Geometrie differentielle, Semester 4.
- 3) D. Freed, K.K. Uhlenbeck: Instantons and Four-Manifolds, Springer 1984.

**MAT/267** Hajós szeminárium

Kiss György

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

A szeminárium a geometria új eredményeit dolgozza fel.

**MAT/268** Riemann- sokaságok I.

Szabó Szilárd

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Levi-Civita-féle kovariáns deriválás a Riemann-sokaságon. Geodetikusok. Az érintőnyalábon vett exponenciális leképezés. A normális koordináta-rendszer. A görbületi tenzor azonosságai. Az állandó görbületű sokaságok, Schur tétele. A geodetikus görbe mentén vett Jacobi-mezők. Konjugált pontok. A Gauss-lemma. Metrika az összefüggő Riemann-sokaságon. Az ívhosszra vonatkozó első és második variációs formula. A geodetikus szegmenshez rendelt index-forma. A szemi-Riemann-sokaság és a Lorentz-sokaság. A Schwarzshild-megoldás.

Ajánlott irodalom:

- 1) D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer: Riemannsche Geometrie im Grossen. Springer-Verlag, Berlin, 1968.
- 2) M. Do Carmo: Riemannian geometry. Birkhäuser, Boston, 1992.
- 3) B. O'Neill: Semi-Riemannian geometry. Academic Press, New York, 1983.

**MAT/269** Riemann- sokaságok II.

Verhóczy László – VELKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Az összefüggő Riemann-sokaság teljességének problémája, a Hopf–Rinow-tétel. A Morse-féle index-tétel. Az index-formák összehasonlítása két Riemann-sokaságnál, Rauch tétele. A nempozitív Gauss-görbületű sokaságok, az Hadamard-Cartan-féle tétel. Lokális izometriák, a Cartan-Ambrose-Hicks-tétel.

A Riemann-sokaság egy részsokaságának jellemzői: a második alapforma, Weingarten-leképezések, konnexió a normális vektornyalábon. A görbületi tenzorokra vonatkozó Gauss-egyenlet, Codazzi-egyenlet és Ricci-egyenlet. A minimál-részsokaságok. A részsokaság fokális pontjai. A részsokaság körül vett Fermi-féle koordináta-rendszer. Izometrikus beágyazások az euklideszi térbe.

Ajánlott irodalom:

- 1) D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer: Riemannsche Geometrie im Grossen. Springer-Verlag, Berlin, 1968.
- 2) M. Do Carmo: Riemannian geometry. Birkhäuser, Boston, 1992.
- 3) B. O'Neill: Semi-Riemannian geometry. Academic Press, New York, 1983.

**MAT/270** Alkalmazott titkosítás szeminárium

Sziklai Péter – SZPKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

A kriptográfia aktuális kérdéseit dolgozzuk fel, egy elméleti bevezető után főleg cikkeket olvasunk. A cél olyan tudás megszerzése, ami a gyakorlatban felmerülő titkosítási feladatokban alkalmazható. Ajánlott szakirodalom a kurzushoz kapcsolódóan készülő jegyzet:

<http://www.cs.elte.hu/~rfid/elte-notes.pdf>

**MAT/271** Nemlineáris funkcionálanalízis

Karátson János – KAJKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Az elsajátítandó ismeretanyag rövid (néhány soros) leírása:  
Nemlineáris operátorok alapfogalmi normált terekben. Hemi- és bihemifolytonos operátorok. Gateaux- és Frechet-derivált, középértéktételek. Potenciáloperátorok, a potenciál fogalma és létezésének feltételei. Monoton operátorok és konvex funkcionálok. Térstruktúrák. Nem korlátos pozitív lineáris operátorok energiateret, gyenge megoldás, Friedrich-kiterjesztés. Dualitás reflexív Banach-terekben.

Operátoregyenletek megoldhatósága. Variációs elv nemlineáris operátoregyenletre, egyenlet megoldásának és funkcionál minimalizálásának kapcsolata. Kvadratikusan funkcionál. Funkcionál minimumának létezése. Nemlineáris leképezés bijekció voltának általános feltételei, inverzfüggvény-tételek. Fixponttételek. A variációs elv kiterjesztése nem konvex funkcionálra, a „mountain pass” lemma. A megoldhatósági tételek alkalmazása nemlineáris differenciálegyenletekre

Közelítő módszerek. Iterációs módszerek: Gradiens-módszer Hilbert-térben. Operátoregyenletek megoldása folytonos operátorra. Konstrukció és konvergencia lineáris operátorokra a kvadratikusan funkcionál alapján, ill. nemlineáris monoton potenciáloperátorokra. Nem folytonos operátor esete, prekondicionálás és energiateret. A konjugált gradiens-módszer lineáris operátorokra. Konstrukció és konvergencia szimmetrikus és nem szimmetrikus operátorokra. Kompakt perturbációk és szuperlineáris konvergencia. Prekondicionálás. A Newton-Kantorovics módszer nemlineáris operátorokra Banach-térben. Csillapított és inegzakt változat. Ritz–Galjorkin-féle projekciós módszerek lineáris és nem lineáris operátorokra.

Kötelező irodalom: -----

Ajánlott irodalom:

Zeidler, E.: Nonlinear functional analysis and its applications I-III.  
Kantorovich, L.V., Akilov, G.P.: Functional Analysis

#### **MAT/273** Komplex sokaságok

Szabó Szilárd

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Komplex és majdnem komplex struktúrák sokaságokon, komplex fibrált nyalábok, vektornyalábok, Lie csoportok és transzformációcsoportok, kohomológia, Serre dualitás, faktor és részsokaságok, felfújás, Hopf, Grassmann, projektív algebrai sokaságok, Weierstrass előkészítési, osztási tétele, analitikus halmazok, Riemann Stein tétele, meromorf függvények, Siegel tétele, Levi kiterjesztési tétel, Chow tétel, racionális függvények.

Ajánlott irodalom: Klaus Fritzsche, Hans Grauert: From holomorphic functions to complex manifolds, Springer Verlag, 2002

K. Kodaira: Complex manifolds and deformations of complex structures, Springer Verlag, 2004

Huybrechts: Complex geometry: An introduction, Springer Verlag, 2004.

#### **MAT/274** Többváltozós komplex függvények

Szőke Róbert – SZRKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Hatványsorok, integrálformulák, kiterjesztési tételek, biholomorfizmusok, inhomogén Cauchy-Riemann egyenlet egy és

többszámú változóban, Dolbeault csoportok, holomorf konvexitás, polinomiális poliéderek.

Ajánlott irodalom:

1. Lars Hörmander: An introduction to complex analysis in several variables (North-Holland, 1990)
2. Takeo Ohsawa: Analysis of several complex variables (American Math. Society, Translations of Mathematical monographs vol. 211, 1998)
3. Szőke Róbert: Többszámú változós komplex függvénytan (egyetemi jegyzet, Eötvös kiadó, 2003).

#### **MAT/275** Hibajavító kódok

Szőnyi Tamás – SZTKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Korlátok a kód paramétereire. Lineáris, ciklikus kódok. Nevezetes példák (Hamming, BCH,  $oR$ , Reed-muller). Perfekt kódok, a Golay kódok.

Véletlen kódok, aszimptotikusan jó kódok (Forney féle konkatenált kódok, Justesen kódok).

Irodalom:

Gyorfai László, Győri Sándor, Vajda István, Információ- és kódelmélet, Typotex, 2002

J. H. van Lint, Introduction to Coding theory, Springer, 1992

#### **MAT/276** Leszámlálások

Szőnyi Tamás – SZTKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Generátorfüggvények és változataik. Szám- és halmazpartíciós problémák, azonosságok Stirling-számokra. Módszerek azonosságok bizonyítására: Snake Oil módszer, WZ párok, Gosper-Zeilberger algoritmus. Részbenrendezett halmazok és Möbius-függvényük. A Pólya-Redfield módszer.

#### **MAT/277** Szimmetrikus kombinatorikai struktúrák

Szőnyi Tamás – SZTKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Projektív és affin síkok definíciója, tulajdonságai, kapcsolatuk ortogonális latin négyzetekkel. A páronként ortogonális latin négyzetek számára vonatkozó néhány eredmény (Erdős-Chowla-Straus)

Testre épített síkok és különböző reprezentációik. Projektív és affin terek.

Kombinatorikus kérdések: lefogó pont-halmazok projektív síkokon és testre épített affin terekben. De Bruijn-Erdős tétel, Steiner-rendszerek.

$t$ - $(v, k, \lambda)$  blokkrendszerek. Megszorítások a paraméterek között. Fisher-egyenlőtlenség ( $t=2$ -re). Ferdén metsző rendszerek, négyzetes blokkrendszerek.

A Fisher-egyenlőtlenség kiterjesztése nagyobb  $t$ -re (Wilson és Petrenjuk). Lineáris algebrai módszerek, Oddtown-tétel, Hoffmann-Singleton tétel.

További nemlétezési tételek: a Bruck-Ryser-Chowla tétel és variánsai. Projektív síkok létezésével kapcsolatos kérdések.

A projektív terek hipersíkjai alkotta blokkrendszer karakterizálása (Dembowski-Wagner); a paraméterek nem definiálják a blokkrendszert egyértelműen (Kantor).

Biplane-ek ( $\lambda=2$ ), Hadamard-mátrixok és Hadamard-féle blokkrendszerek ( $t=2$ ). Néhány példa, Paley-blokkrendszer  $PG_{n-1}(n, 2)$ .

Erősen reguláris gráfok: megszorítások a paraméterekre. Blokkrendszerek pont-gráfjai és erősen reguláris gráfok. Erősen reguláris gráfok módosítása: a "switching" (Seidel). Példák: a létra-gráf, a trianguláris gráf, stb.

Blokkrendszerek rekurzív konstrukciói: pont-reziduális és blokk-reziduális rendszer, bővítés. Hadamard 3-blokkrendszerek, affin síkok bővítése (Möbius-síkok). Projektív síkok bővítése, általában négyzetes blokkrendszerek bővítése (Cameron tétele). A Mathieu-csoportokhoz tartozó Witt-féle blokkrendszerek (vázlatos konstrukciója).

Aszimptotikus eredmények blokkrendszerek létezéséről (Wilson tétele, Teirlinck tétele a  $t > 5$  blokkrendszerek létezéséről). (Ezek biz. nélkül).

Differencia-halmazok és a Hall-féle multiplikátor-tétel.

irodalom

F. De Clerck, M. J. de Resmini: Symmetric structures, TEMPUS jegyzet, 1993

Szőnyi T.: Szimmetrikus struktúrák, oktatási segédanyag, 1997.

J. H. van Lint, R. Wilson: A course in combinatorics, Cambridge, 1992

**MAT/278** Válogatott fejezetek (Hibajavító kódok)

Szőnyi Tamás – SZTKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Kódok Csatornakódolás, kapacitás, Shannon alaptétele. Hibajavító kódok, nevezetes példák (

Hamming kódok, Reed--Solomon kódok, Reed--Muller kódok, BCH kódok).

Korlátok a kód paramétereire (pl. Hamming, Singleton, Griesmer). Véletlen kódok

(Gilbert--Varshamov korlát, Forney féle konkatenált kódok), explicit aszimptotikusan jó kódok (Justesen). Perfekt kódok és kapcsolatuk

blokkrendszerekkel. A Golay-kódok.

**MAT/279** Differenciáltopológia III.

Szűcs András – SZAKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Felületek immerzióinak kobordizmus csoportja.

Rohlin tételei: A gömbök harmadik stabil homotopikus csoportjának kiszámolása. Spin 4-sokaság szigantúrája osztható 16-tal. Az irányított sokaságok kobordizmus gyűrűje  $Q$ -val tenzorszorozva.

Irodalom:

Milnor- Stasheff: Characteristic classes.

Szűcs András honlapja: <http://www.cs.elte.hu/~szucs/>

Topologia sáv jegyzet 4. félév.

**MAT/280** Extraordinális kohomológiaelméletek

Kalmár Boldizsár

Fehér László

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Extraordináris homológia és kohomológia elméletek homotopikus leírásai terek spektrumai segítségével. Példák: stabil homotopikus és kohomotopikus csoportok, bordizmusok és kobordizmusok,  $K$ -elmélet. Alkalmazás immerziók vizsgálatára. Csoporthatások sokaságokon, ezek kobordizmuscsoportjai.

Irodalom:

Stong: Notes on cobordism theory

Conner-Floyd: Differentiable periodic maps.

**MAT/281**  $K$ -elmélet és kobordizmus

Fehér László

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

K-elmélet kohomológikus tulajdonságai. Alkalmazások: Hopf invariáns, vektormezők gömbökön.

Atiyah: K-theory

**MAT/282** Sima leképezések globális tulajdonságai

Kalmár Boldizsár - Szűcs András – SZAKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Az adott típusú szingularitásokkal bíró sima leképezések kobordizmuscsoportjai, klasszifikáló tér megépítése, homotopikus vizsgálata, homológia osztályok realizálásához nincs véges, elégséges multiszingularitás halmaz.

Irodalom:

Rimányi R, Szűcs, A: Pontrjagin-Thom type construction for maps with singularities. *Topology* 37: (6) pp. 1177-1191 (1998)

Szűcs, A: Cobordism of singular maps, *Geometry & Topology* 12: (4) pp. 2379-2452 (2008)

**MAT/283** Szingularitáselmélet

Kalmár Boldizsár - Szűcs András – SZAKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Hiányzó leírás.

**MAT/284** Topológia szeminárium

*Földvári Viktória Andrea*

6 kredit, elmélet, -, ismételtető

A tantárgy leírása: Az általános topológia modern eredményeinek feldolgozása és ismertetése kiválasztott dolgozatok segítségével és a szemináriumvezetők irányításával.

Ajánlott irodalom: Változó.

**MAT/288** Algoritmikus problémák pontrácsokon

*Uhrin Béla – UHBOAAI.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Hiányzó leírás.

**MAT/289** Bonyolultságelmélet III.

oktató: Grolmusz Vince – GRVKAAT.ELTE

*Varga Dániel – VADKABT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Veges automata és kistarú (o(n)) Turing-gepek, Hierarchia tettek, PAD-eles, Sekely Boole-halozatok, Polinomialis hierarchia, PSPACE-teljes problemak, gyakorlofeladatok az eloadashoz.

**MAT/290** Transzformációcsoportok és szimmetrikus terek

Verhóczy László – VELKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

A differenciálható hányadosterek, a homogén Riemann-terek. A lokálisan szimmetrikus terek jellemzése a görbületi tenzorral. Az összefüggő kompakt Lie-csoport, mint szimmetrikus tér. A szimmetrikus Riemann-tér izometria-csoportja, mint Lie-csoport. A Riemann-féle szimmetrikus hármastól történő konstrukció. Az exponenciális

leképezés és a görbületi tenzor egzakt leírása a szimmetrikus térben. Totálgeodetikus részsokaságok és Lie-hármas-rendszerek. A rang értelmezése. A féligegyszerű szimmetrikus Riemann-terek osztályozása. Az irreducibilis szimmetrikus terek.

Ajánlott irodalom:

- 1) S. Helgason: Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces. Academic Press, New York, 1978.
- 2) J. Cheeger, D. Ebin: Comparison theorems in Riemannian geometry. North Holland, Amsterdam, 1975.

#### **MAT/291** A 3D grafika geometriai alapjai

Verhóczy László – VELKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Az alakzatok vetületeinek előállítás a hagyományos ábrázoló geometriai módszerekkel. Az euklideszi tér affin transzformációinak analitikus leírása. A projektív tér kollineációinak leírása homogén koordinátákkal. A számítógépes grafikában a parallel és centrális vetítések leírásához felhasznált koordináta-rendszerek. A merev test pozíciójának megadása (az alap koordináta-rendszerben).

Színelméleti alapfogalmak. A három alapszín, a fénynyalábhoz rendelt  $r$ ,  $g$ ,  $b$  koordináták értelmezése. Az árnyaláshoz tartozó geometriai és fotometriai fogalmak, a felületelem adott irányhoz tartozó radianciája. A fotometria alapképlete. A fényforrásra vonatkozó fogalmak: teljes fluxus, fényerősség. A fényforrással megvilágított felület adott irányú radianciájának meghatározása a Phong-féle módszerrel.

A raszteres kép digitális leírása. Egyszerűsített kalkuláció egy pixel fényerősségeinek a meghatározására. Árnyalt kép létrehozása a fénysugárkövető módszerrel. A tesszellált határfelületű testekre alkalmazott Phong-féle árnyalás és a Gouraud-féle árnyalás.

Ajánlott irodalom:

- 1) J. D. Foley, A. van Dam, S. K. Feiner, and J. F. Hughes: Computer Graphics, Principles and Practice. Addison-Wesley, Bonn, 1990.
- 2) Szirmay-Kalos László, Antal György, Csonka Ferenc: Háromdimenziós grafika, animáció és játékfejlesztés. Computerbooks, Budapest, 2003.

#### **MAT/292** Geometriai modellezés

Verhóczy László – VELKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Alapvető modellezési eljárások. A drótváz-modell és a határfelület-modell. A testek határoló felületeinek leírása kétváltozós vektorfüggvénnyel és implicit egyenlettel. A konstruktív tömörtest geometria.

Interpolációs görbeillesztés adott pontsorozathoz. Az Hermite-féle harmadfokú görbévek alkalmazása. Az egyváltozós polinomiális spline függvények.

Approximációs görbeillesztés a kontrollpontokhoz. A Bernstein-féle polinomok, mint súlyfüggvények. A Bézier-féle görbévek. A de Casteljau-algoritmus. Az adott számsorozathoz illő  $B$ -spline függvények meghatározása a Cox-de Boor-féle algoritmussal. A racionális  $B$ -spline görbék, a kontrollpontokhoz rendelt súlyok alkalmazása. Harmadfokú  $B$ -spline görbévek másodrendben sima csatlakozása, a csatolási együtthatók szerepe.

Interpolációs felületillesztés egy kétindexes pontsorozathoz az Hermite-féle bikubikus felületdarabok alkalmazásával. Approximációs felülettervezés. A Bézier-féle felület-darabok és a  $B$ -spline felületek értelmezése. A racionális  $B$ -spline felületek. A felület-darabok elsőrendben (és másodrendben) sima csatlakozása.

Ajánlott irodalom:

- 1) G. Farin: Curves and surfaces for computer aided geometric design. Academic Press, New York, 1988.
- 2) I. D. Faux, M. S. Pratt: Computational geometry for design and manufacture. Ellis Horwood, New York, 1979.

**MAT/293** Matematikatörténet

Vesztergombi Katalin – VEKMAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Hiányzó leírás.

**MAT/294** Diszkrét matematikai modellek

Sziklai Péter

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Hiányzó leírás.

**MAT/296** Egészértékű programozás II.

Király Tamás – KITEAGT.ELTE – Kis Tamás

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Sperner rendszerek, egyenlőtlenségekkel definiált bináris ponthalmazok. Rácsok, bázis-redukció. Fix-dimenziós egészértékű programozási feladat megoldása polinom időben. Az ellipszoid módszer, szeparáció és optimalizálás ekvivalenciája. A Balas-féle Korlátozás és vágás módszere. Vágások az utazó ügynök feladatra. LP alapú közelítő algoritmusok.

Kötelező irodalom:

Vizvári Béla: Egészértékű programozás, Typotex, Budapest, 2006.

Király Tamás és Szegő László; Kiegészítés az Egészértékű Programozás I-II tárgyhoz, elektronikus jegyzet

Ajánlott irodalom:

G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey: Integer and Combinatorial Optimization, John Wiley and Sons, New York, 1999.

D. Bertsimas, R. Weismantel: Optimization over Integers, Dynamic Ideas, Belmont, 2005

**MAT/299** Mikro gazdaságtan

Vizvári Béla – VIBKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Kereslet és kínálat; termelési függvény, Cobb-Douglas és Leontief technológia, a profitmaximalizálás gyenge axiómája, optimalitási feltételek; a költség minimalizálása; Hotelling lemma, LeChatelier elv; költségfüggvények; profit és költség viszonya; fogyasztói preferencia, hasznossági függvény, Marshall és Hicks keresleti függvénye, Roy azonosság; fogyasztói magatartás és kereslet, Engel görbe, Slutsky egyenlet; a versengő piac, adók hatása.

Kötelező irodalom: Hal R. Varian, Microeconomic Analysis, 3. kiadás, Norton, 1992, New York.

Ajánlott irodalom: Hal R. Varian, Mikro gazdaságtan, Aula Kiadó

**MAT/301** Termelésirányítás

Kis Tamás

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

A termelés mint fizikai és információs folyamat, a termelésirányítás kapcsolatai a vállalaton belül, Harris formula, sorozatnagyság meghatározása: Wagner-Within modell és általánosításai, szerelőszalag kiegyensúlyozása, rugalmas gyártó rendszerek ütemezése, csoportos technológia, MRP és JIT rendszerek.

Kötelező irodalom:

Vizvári Béla, Bevezetés a termelésirányítás matematikai elméletébe, ELTE, 1994

**MAT/304** Környezeti adatok statisztikai elemzése

Zempléni András – ZEAKAAT.ELTE

Márkus László – MALKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

A témához kapcsolódó modern modellek szakirodalmának feldolgozása szemináriumi formában. A legfrissebb cikkekből válogatunk az alábbi témákban: idősoros, térbeli modellek, Markov-modellek. Többdimenziós struktúrák (kopulák) becslése, tesztelése. Szimulációs technikák (bootstrap, Markov lánc Monte Carlo módszerek). A módszerek programozása R nyelven, alkalmazásuk valódi és szimulált adatokra.

**MAT/306** Indukált unitér ábrázolások

Kristóf János - KRJKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Radon-mérték faktorizációja lokálisan kompakt csoporton; Bruhat-féle keresztmetszet-függvény létezése; invariáns, relatív invariáns és kváziinvariáns Radon-mértékek létezése és egyértelműsége mellékosztály-tereken; indukált lineáris ábrázolások; a Mackey-féle skalárszorítás és az indukált unitér ábrázolások; példák indukált unitér ábrázolásokra; az irreducibilitás tétele; Frobenius-féle reciprocitási tétel; az unitér ekvivalencia tétele; imprimitivitás-rendszerek; Mackey-féle imprimitivitás-tétel; Mackey reprezentációs tétele; az indukált unitér ábrázolások alternatív alakja; az aritmetikai Poincaré-csoport univerzális fedőcsoportjának irreducibilis folytonos unitér ábrázolásai

**MAT/307** Hitelkockázat 1.

Gerencsér László – GELLAAE.ELTE

Rásonyi Miklós – ELTE.EHA

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

A kamatelmélet alapfogalmai. Hitelkockázati swap (CDS) ügyletek. Strukturális modellek. Pontfolyamatok. Fedezeti ügyletek. Kalibráció: maximum likelihood.

**MAT/308** Abszolútumok

Császár Ákos – CSAMAAE.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

EDC terek. Abszolútumok: olyan EDC terek, amelyek bizonyos tulajdonsagu lekepezések altali kepekent minden (Hausdorff) topologikus ter eloallithato.

**MAT/309** Komplex dinamika II.

Halász Gábor – HAGKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Siegel körök. Cremer pontok. Herman gyűrűk. Racionális törtfüggvények Fatou komponenseinek dinamikája Kritikusan véges leképezések. Polinomok zérushelyeinek keresése iterációval. A Mandelbrot halmaz.

**MAT/310** Moduláris formák

Tóth Árpád – TOALAJT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető Ruziewicz azt sejtette, hogy  $S^2$ -n, és általában,  $S^n$ -en,  $n > 1$  esetén a Lebesgue mérték konstans erejéig az egyetlen végesen additív, elforgatás invariáns halmazfüggvény a Lebesgue mérhető halmazokon. A sejtést először Margulis és Sullivan igazolta  $n > 3$ -re, majd Drinfeld  $n=2$  és  $3$ -ra. A kurzus célja ennek a témának a körüljárása, a bizonyításhoz felhasznált eszközök

bemutatása. A hangsúly a Lie-csoportok, a reprezentáció-elmélet, és a funkcionálanalízis néhány absztrakt definíciójának és tételének vizsgálata és megértése konkrét helyzetekben.

**MAT/312** Character theory of finite groups

*Pelikán József - PEJKABT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Group representations, the group algebra. Schur's lemma. Maschke's theorem. Wedderburn's theorem on semisimple algebras. Irreducible and completely reducible representations. Characters. The orthogonality relations. Determination of center, commutator subgroup, normal subgroups from the character table. Algebraic integers. Burnside's  $p^a q^b$  theorem. Theorems on character degrees. Products of characters. Induced representations and characters. M-groups, Taketa's theorem. Frobenius groups. Frobenius' theorem on Frobenius kernels. TI-sets and exceptional characters. Characterizations of groups by 2-Sylow subgroups and centralizers of involutions. Normal subgroups. Clifford's Theorem Irodalom: I. Martin Isaacs: Character Theory of Finite Groups.

**MAT/313** Geometric graph theory

*Lovász László - LOLKAAT.ELTE*

*Vesztergombi Katalin – VEKMAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Introduction: a survey of spectra of graphs. Unit distance graphs. Bounds on the number of edges and on the chromatic number. Planar graphs, straight line drawing. Polyhedra and planarity, Steinitz's Theorem. Rubber band representation, Tutte's method for drawing planar graphs. Applications of rubber band representations to non-planar graphs; connectivity testing. Touching circle representations. Koebe's and Andre'ev's theorems. Applications to planar separators and bisections. Orthogonal representations. Applications to Shannon capacity and perfect graphs. The Colin de Verdiere number of a graph. Van der Holst's Lemma and characterizing planar graphs.

**MAT/314** Algebrai és valószínűségi módszerek a gráfelméletben

*Lovász László - LOLKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

A gráfelméletben alkalmazott legfontosabb módszerek a matematika más területeiről, elsősorban algebrából és valószínűségelméletből. Fő témák: Lineáris algebrai módszerek, gráfok sajátértékei; bolyongások gráfokon, elérési, fedési és keverési idő; expander és extraktor gráfok; erősen szimmetrikus gráfok; véletlen gráfok növekedése.

**MAT/315** Interaktív bizonyítások

*Lovász László - LOLKAAT.ELTE*

*Király Zoltán - KIZKAAT.ELTE*

*Grolmusz Vince – GRVKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, kötelezően -, nem ismételhető

Interaktív bizonyítási rendszerek és Artúr-Merlin osztályok. A két modell kapcsolata. Interaktív bizonyítások néhány nevezetes problémára (gráfizomorfia, permanens, ...).  $IP=PSPACE$ . Több résztvevős bizonyítások,  $MIP=NEXP$ , NP jellemzése. Zero-knowledge bizonyítások, példák. Fiat-Shamir protokoll, kapcsolatok a kriptográfiával. Tökéletes, statisztikus és számítási zero-knowledge bizonyítások. Csaló ellenőrök.

**MAT/316** Gráfok és algebrák II.

*Fried Ervin – FREKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

A duális diszkriminátorhoz kapcsolódó univerzális algebrai ismeretek, valamint

olyan gráfok tárgyalása, amelyek generálta varietásban a részvarietások kontinuumnyi sokan vannak.

**MAT/317** Invariánselmélet

Domokos Mátvás - DOMKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

A kurzus bevezetés az invariánselmélet nevezetes problémáiba, módszereibe, eredményeibe és alkalmazásaiba. Tárgyalt problémák: véges csoportok polinominvariánsai, klasszikus csoportok vektorinvariánsai, binér formák invariánsai, alkalmazások (pl. az algebrai geometriában, kombinatorikában, kódelméletben), nyitott problémák.

**MAT/318** Véges egyszerű csoportok

Pelikán József - PEJKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Az előadás a véges egyszerű csoportok  $16+1$  végtelen sorozatát és a 26 sporadikus egyszerű csoportot ismerteti, sokuk esetében az egyszerűség részletes bizonyításával. Végtelen egyszerű csoportokra is megvizsgálunk néhány nevezetes példát.

**MAT/319** Bevezetés a funkcionálanalízisbe

Czách László - CZLMAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

A funkcionálanalízis alapvető terei. Normált, Banach- ill. Hilbert-terek közötti operátorok.

**MAT/320** Spektrálszintézis Abel-csoportokon

Laczkovich Miklós - LAMKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

A kurzus bevezetést nyújt a harmonikus analízis egy nevezetes fejezetébe, amelynek centrális tétele azt állítja, hogy a számegyenesen értelmezett komplex értékű folytonos függvények terében érvényes a spektrálszintézis. A kurzus célja e fontos tétel bizonyítása, majd e tétel lehetséges általánosításainak vizsgálata a diszkrét Abel-csoportok körében.

**MAT/321** Intervallumrendszerek kombinatorikája

Gyárfás András - GYALAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Hiányzó leírás.

**MAT/322** Hitelkockázat 2.

Gerencsér László - GELLAAE.ELTE

Rásonyi Miklós - ELTE.EHA

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

CDS forward ügyletek és opciók. Árazás strukturális modellekben. Kötvénycsomagok, indexek, tranche-ok. Kalibráció: kopulák, ritkítás. Feedback folyamatok.

**MAT/323** Bevezetés a véges geometriába

Sziklai Péter - SZPKABT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

A kurzus véges testekre épített geometriákba nyújt gyorsított bevezetést. Felvázoljuk az elméleti alapokat (affin, projektív geometriák, véges testek, polinomok, algebrai görbék), elsősorban az algebrai módszerekre koncentrálnunk. Sok megoldatlan kutatási problémát mutatunk be/járunk körül.

Ajánlott irodalom: 1) Kiss György, Szőnyi Tamás: *Véges geometriák*, Polygon Kiadó, Szeged, 2001.

- 2) Hirschfeld, J.W.P.: *Projective Geometries over Finite Fields*, 2nd edition, Clarendon Press, Oxford, 1999.  
3) Hirschfeld, J.W.P.: *Finite Projective Spaces of Three Dimensions*, Clarendon Press, Oxford, 1985..

**MAT/324** Konvex testek térfogatáról

Ifj Böröczky Károly

3 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

A tárgy célja annak az alapvető kérdésnek a tárgyalása, hogy hogyan számítjuk ki egy magas dimenziós konvex test térfogatát. Áttekintjük a konvex testek térfogatára vonatkozó legfontosabb tételeket (pl. Brunn-Minkowski egyenlőtlenség). Megmutatjuk a pontos kiszámítás nehézségét, és leírjuk a térfogat közelítő kiszámítására szolgáló randomizált polinomiális idejű algoritmust. Az algoritmus elemzéséhez megismerkedünk a matematika több ágához tartozó eredményekkel: a Markov-lánc-Monte-Carlo módszerrel, a logkonkáv függvények elméletével, konvex testek izoperimetrális problémáival, és a hőterjedésre vonatkozó Poincaré egyenlőtlenség diszkrét formájával.

**MAT/325** Nemlineáris parciális differenciálegyenletek II.

Simon László – SILKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Hiperbolikus és parabolikus egyenletekre vonatkozó vegyes feladat klasszikus megoldásának létezése. Nemlineáris egyenletek vizsgálata a pszeudomonoton operátorok elméletével. Elliptikus variációs egyenlőtlenségek. Nemlineáris evolúciós egyenletek vizsgálata a pszeudomonoton operátorok segítségével. A megoldások kvalitatív tulajdonságai. Szemilineáris hiperbolikus egyenletek.

Ajánlott irodalom: Simon L. – E.A. Baderko, *Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

Application of monotone-type operators to nonlinear PDEs, author's edition, Budapest, 2013, ill. tanszéki honlap.

**MAT/326** Válogatott fejezetek a dinamikai rendszerek elméletéből

Szász Domokos – EHA.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Az utóbbi 20-30 év egyik --- számos tudományt is érintő --- izgalmas témája a káosz volt. Matematikailag ez egyszerűen megadható, de technikailag csak igényesen kezelhető alacsony dimenziós leképezések sztochasztikus viselkedésének megértését követelte (jelesül az 1D logisztikus, vagy a 2D Hénon, vagy a 3D Lorenz leképezéscsaládok). Céloom minél egyszerűbb példák, paradigmákon keresztül megmutatni a kapcsolódó látványos eredmények hátterét. Előkészítésül kb. 2 órában összefoglalom a korábbi Ergodelmélet és Dinamikai Rendszerek kurzus legfőbb szükséges eszközeit, utána a matematika számos ágában is jól alkalmazható szubadditív és multiplikatív ergodtétellel, majd a dinamikáknál alapvető Lyapunov-exponensek bevezetésével foglalkozom. Ezután kerülnek sorra az említett paradigmák. Tervezem olyan modell tárgyalását is, amely polinomiális korreláció lecsengést mutat, ami szoros kapcsolatban van az igen érdekes jelenségekben (internet, tőzsde, ...) megjelenő önhasznós folyamatokhoz, mint pl. a frakcionális Brown-mozgás.

A heti 2 órás kurzus különlegessége, hogy heti 2 órás gyakorlatot is tart hozzá Dr. Bálint Péter adjunktus.

**MAT/ 327** Elliptikus görbék

Zábrádi Gergely

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető  
Mordell-Weil-tétel, Hasse-Weil-tétel, primfelbontás elliptikus görbékkel, Birch és Swinnerton-Dyer sejtése.

**MAT/328** Differenciálszámítás normált terekben

Czách László – CZLMAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Folytonos lineáris és multilineáris leképezések, Frechet-derivált, irány menti és parciális derivált, az inverz függvény tétel és alkalmazásai, magasabb rendű deriváltak, Taylor-formula, függvények szélső értékei,  $R^n$ -ben értelmezett függvények.

**MAT/329** Additív kombinatorika I.

Hegyvári Norbert – HENKAAF.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Az additív kombinatorika manapság intenzíven kutatott terület (vezető kutatói: Green, Tao, Bourgain, Ruzsa, Sárközy és mások). A téma fő kérdésköre: Algebrai struktúrákban az összeg-, különbség-, szorzathalmazok szerkezete illetve elemszáma. A vizsgálat eszközei nagyon változatosak: kombinatorikus és algebrai módszerek, Fourier analízis stb. Az előadások fő célja a témában az utóbbi 20 évben elért legfontosabb eredmények ismertetése.

**MAT/330** Polinombecslések

Kós Géza – KOGKABI.ELTE

2 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Polinomok együtthatóinak, értékeinek, gyökeinek eloszlásával kapcsolatos régi és újabb problémákat vizsgálunk, részben Prasolov Polinomok című könyve alapján.

**MAT/ 331** Brauer csoportok

Szamuely Tamás – SZTKAKT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Centrális egyszerű algebrák, Galois-leszállás, nemkommutatív  $H^1$ . A Galois-kohomológia alapjai, kohomologikus Brauer-csoport. Kohomologikus dimenzió,  $C_1$ -testek. Alkalmazások: Invariáns-testek racionalitása. Lokális osztálytestelmélet, Hilbert-szimbólum.

Ajánlott irodalom:

P. Gille – T. Szamuely: Central Simple Algebras and Galois-cohomology, Cambridge 2006.

**MAT/332** Forszolás

Csirmaz László – CSLLAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

A halmazelmélet ZFC axiómái; tranzitív modellek; osztálymodellek. Gödel operációk, konstruálható halmazok. Forszolás, kényszerképzet. Kényszerképzetek kombinatorikus tulajdonságai és a forsolt modellben igaz állítások kapcsolata. A kontinuumhipotézis tagadása. Martin axiómája, annak következményei. A kiválasztási axióma függetlensége.

**MAT/333** Halmazelmélet és valós függvénytan

Elekes Márton – ELMKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Halmazelméleti módszerek (kontinuum-hipotézis, egyéb axiómák, forsolás,  $V=L$ ) alkalmazása a valós számok és a valós függvénytan témakörében. Függetlenségi eredmények (tehát eldönthetetlen állítások), abszolútsági tételek (tehát bizonyos állítások biztosan eldönthetőek, még ha nem is tudjuk őket eldönteni).

**MAT/334** Perkolációelmélet

Tóth Bálint – TOBNAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

- o A prekoláció jelensége, véletlen gráfok geometriája, fázisátmenet.
- o Elemi eszközök: Harris egyenlőtlenség (FKG egyenlőtlenség) és a kritikus valószínűség ( $p_c$ ) legegyszerűbb becslései.
- o Végtelen klaszterek száma (unicitási tétel: Aizenman-Kesten, Burton-Keane). A perkolációs valószínűség folytonossága  $p_c$  felett.
- o További eszközök: Russo formula, van den Berg-Kesten egyenlőtlenség.
- o Szubkritikus tartomány: fűrt méret eloszlásának exponenciális lecsengése és a fázisátmenet „élessége” (Aizenman-Barsky és Menshikov tételei).
- o Két dimenzió 1. : Gráfok topológikus dualitása, Sykes-Essam sejtés, Russo-Seymour-Welsh tétel.
- o Két dimenzió 2.: Kesten és Russo tételei:  $p_c + p^*_c = 1$
- o Két dimenzió 3.: Kritikus perkoláció konform-invarianciája, Cardy formula, Smirnov tétele, SLE.
- o Kitekintés.

Irodalom:

1. G. Grimmett: Percolation (2nd edition), Springer 1999
2. H. Kesten: Percolation Theory for Mathematicians, Birkhäuser 1982
3. Tóth Bálint: Perkoláció -- kéziratok jegyzet, <http://math.bme.hu/~balint>
4. cikkek

**MAT/335** Geometriai analízis szeminárium

Fehér László – FELKABT.ELTE

Szőke Róbert – SZRKAAT.ELTE

Tóth Árpád – TOALAJT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

A geometria és az analízis együttműködése a modern matematika egyik legaktívabb területe. Ezen sokirányú kapcsolatokról adunk ízelítőt feladatsorokon keresztül. Általános elmélet helyett konkrét, a lényegét megvilágító példákra helyezzük a hangsúlyt, így különösebb előismeretet nem tételezünk fel.

**MAT/336** Gráfok és szerkezetek merevségének kombinatorikus vizsgálata

Jordán Tibor – JOTKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Áttekintjük a kombinatorikus merevségi vizsgálatok alapvető eredményeit: elsősorban a rúd-csukló szerkezetek két- és háromdimenziós generikus merevségi és globális merevségi tulajdonságait vizsgáljuk, de kitérünk test-rúd és test-zsanér szerkezetekre és nem generikus realizációkra is. Bevezetjük a merevségi matroidokat és az algoritmikus következményeket is tárgyaljuk. A témakör nyitott kérdéseit és az eredmények potenciális alkalmazásait is vizsgáljuk.

**MAT/337** Parcialis differenciálegyenletek irányításelmélete

Komornik Vilmos – EHA.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

- véges dimenziós lineáris rendszerek megfigyelhetősége, irányíthatósága és stabilizációja
- rezgő testek mozgásának teljes leírása a határuk menti viselkedés megfigyelése alapján: a multiplikátor módszer és a Fourier-sorok módszere
- rezgő testek mozgásának teljes irányíthatósága a határukon való kontroll segítségével: a Lions -féle "Hilbert unicitási módszer"
- rezgő testek mozgásának exponenciális csillapítása a határukon alkalmazott feedback kontroll segítségével: multiplikátorok és Ljapunov-függvények

Irodalom:

Komornik V., Lineáris parciális differenciálegyenletek irányításelmélete, Matematikai Lapok 5 (1995) 1--2, 28--52, megjelent 2000-ben.  
V. Komornik, Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method, Collection RMA, vol. 36, Masson-John Wiley, Paris-Chicester, 1994.  
V. Komornik, P. Loreti, Fourier Series in Control Theory, Springer-Verlag, New York, 2005.

**MAT/338** A kanonikus felcserélési reláció algebrája

Petz Dénes – PEDOAAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

A Heisenberg-féle felcserélési reláció  $pq-qp=iI$ , ami könnyen láthatóan nem elégíthető ki mátrixokkal, sőt még korlátos operátorokkal sem. Egy lehetőség a könnyebb tárgyalásra az, hogy áttérünk az önadjungált  $p$  és  $q$  által generált egyparaméteres unitér csoportokra:  $U(t)=\exp(itp)$  és  $V(t)=\exp(itq)$ . Ilyen unitér csoportokkal van meghatározva a kanonikus felcserélési reláció algebrája, a CCR-algebra.

A kurzus bevezetést ad a  $C^*$ -algebrák elméletébe és ezután a CCR-algebra tárgyalása következik. Mivel az algebra Fock-reprezentációja nemkorlátos operátorokat is előhoz, ezekről is szó esik. Az algebra Gauss-állapotai a normális eloszlásokra emlékeztetnek, azért mert maximalizálják az entrópiát a második momentum rögzítése mellett, és központi határeloszlás tétellel is előállnak.

A funkcionálanalízis és valószínűségszámítás tárgyak alapjaira szükség van.

**MAT/339** Additív Kombinatorika II

Hegyvári Norbert – HENKAAF.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Az előadás Terence Tao és Van Vu „Additive Combinatorics” c. nemrég megjelent könyvének két fejezetén alapul, számos kiegészítéssel, kapcsolódó témákkal. Az I. félévben az „Összehalmazok” fejezetet, ill. az ehhez kapcsolódó kérdéseket vizsgálunk. Összehalmazon (különbség-, szorzat- stb. halmazon) a szokásos  $A+B:=\{a+b\}$  ( $A-B:=\{a-b\}$  stb.) halmazt értjük. A tipikus kérdés az, hogy milyen viszonyban vannak e halmazok elemszámai egymással, ill. néhány inverz kérdés; az elemszám ismeretéből mire lehet következtetni a halmazokra vonatkozóan. E kérdések és válaszok meglepő módon kapcsolatban vannak más megoldatlan kérdésekkel, mint pl. a Kakeya sejtés. A tematika a következő: Néhány inverz kérdés. További tételek a Cauchy-Davenport lemma ekvivalens formáival kapcsolatban.

Összehalmazon bevezetett távolság, alapvető tulajdonságok; háromszög-egyenlőtlenség. További tételek az additív reprezentációs függvény és momentumaival kapcsolatban. Additív energia. Néhány ezzel kapcsolatos összegkülönbség halmaz elemszámára vonatkozó becslés. A háromszög-egyenlőtlenség egy általánosabb formája; Freiman két problémájáról.

A távolság függvényre vonatkozó további tételek. Kapcsolat összehalmaz, különbség-halmaz elemszámai között. Halmazok „duplázójának” ( $\text{Dbl}(A)$ ) vizsgálata. Tételek additív és halmaz műveletek és a  $\text{Dbl}(\cdot)$  közötti kapcsolatra. További becslések a duplázó, a távolságfüggvény és az additív energiára vonatkozó tételek segítségével. Ruzsa tételei. Plünnecke-Ruzsa tétel. „Statisztikus Plünnecke-Ruzsa tétel”. Additív halmazok gráfokon. Katz-Tao tétel és kapcsolata a Kakeya sejtéssel. Néhány megjegyzés a nem kommutatív esetre vonatkozóan.

**MAT/340** Halmazelmélet szeminárium

Böröczky Károly – BOKKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

A MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet Halmazelmélet és általános topológia osztálya heti szemináriuma a legfrissebb kutatási eredményekről, meghívott külföldi és magyar előadókkal. Hetente változó téma, általában angolul.

**MAT/341** Algoritmikus kérdések a bioinformatikában

*Grolmusz Vince – GRVKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

A MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet Halmazelmélet és általános topológia osztálya heti szemináriuma a legfrissebb kutatási eredményekről, meghívott külföldi és magyar előadókkal. Hetente változó téma, általában angolul.

**MAT/342** Geometriai mértékelmélet

*Elekes Márton*

6 kredit, gyakorlat, -, nem ismételhető

Hausdorff mérték, energiaintegrál és kapacitás. Szorzat dimenziója. Vetítési tételek. Vitali és Besicovitch fedési tételei. Mértékek differenciálása.

Keakeya probléma, Besicovitch halmaz, Nikodym halmaz.

Dini deriváltak. Kontingenciatétel. Denjoy–Young–Saks-tétel.

**MAT/343** Geometriai mértékelmélet

*Elekes Márton*

9 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Hausdorff mérték, energiaintegrál és kapacitás. Szorzat dimenziója. Vetítési tételek. Vitali és Besicovitch fedési tételei. Mértékek differenciálása.

Keakeya probléma, Besicovitch halmaz, Nikodym halmaz.

Dini deriváltak. Kontingenciatétel. Denjoy–Young–Saks-tétel.

**MAT/344** Leíró halmazelmélet szeminárium

*Elekes Márton*

6 kredit, gyakorlat, -, ismételhető

A szeminárium célja részben a leíró halmazelmélet klasszikus eredményeinek (Borel, projektív halmazok tulajdonságai), részben a halmazelméleti és valószínűségi kapcsolatok feldolgozása, részben kutatások indítása és koordinálása.

**MAT/345** Leíró halmazelmélet EA

*Elekes Márton*

9 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Általános topológiai alapok. A Baire-tulajdonság. A kategória-tétel. Tipikus folytonos függvények. Borel-halmazok és transzfinit osztályozásuk. A Baire-fele függvényosztályok. Szuszlin-operáció. Analitikus és ko-analitikus halmazok. Projektív halmazok.

**MAT/346** Leíró halmazelmélet

*Elekes Márton*

6 kredit, gyakorlat, -, nem ismételhető

Általános topológiai alapok. A Baire-tulajdonság. A kategória-tétel. Tipikus folytonos függvények. Borel-halmazok és transzfinit osztályozásuk. A Baire-fele függvényosztályok. Szuszlin-operáció. Analitikus és ko-analitikus halmazok. Projektív halmazok.

**MAT/347** Dinamikai rendszerek

*Buczolich Zoltán – BUZKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Kontrakciók, fixponttétel. Példák dinamikus rendszerekre. Newton-módszer, intervallum

leképezések, kvadratikus függvénycsalád, differenciálegyenletek, a kör forgatásai. Grafikus

analízis. Hiperbolikus fixpontok. Cantor halmazok mint taszító hiperbolikus halmazok,

szimbólumsorozatok tere, mint metrikus tér. Szimbolikus dinamika és kódolás. Topologikus

transzitivitás, a kezdeti értékektől való érzékeny függés, káosz/kaotikus leképezések, strukturális stabilitás, káosz és három szerint periodikus pontok. Schwarz derivált. Bifurkációelmélet. Periódus kettőzés.

#### **MAT/348** Komplex dinamika I.

Sigray István

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Julia és Fatou

Leau-Fatou tétele. Cremer pontok és Siegel körök. Holomorf fixpont formula.

A Julia halmaz sűrű részhalmazai. Herman gyűrűk. Vándorló tartományok.

Polinomok iterációja. A Mandelbrot halmaz. Gyökkeresés iterációkkal.

Hiperbolikus leképezések. Lokális összefüggőség vizsgálata.

A tárgy célja kettős. Egyrészt viszonylag elemi módszerekkel alapos leírást ad a komplex dinamika jelenségeiből, másrészt alapot kíván nyújtani azoknak, akik alaposabban szeretnék a matematikának ebbe a területébe belemerülni, amely terület több képviselője is Fields érmet kapott.

#### **MAT/349** Bioinformatika

Grolmusz Vince – GRVKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

A tárgy a bioinformatika algoritmikus világába nyújt bevezetést. A

tárgy célja, hogy a hallgatók megismerjék a bioinformatika különböző területein jelentkező elméleti problémákat és matematikai modelleket.

A félév során számos ilyen problémát vizsgálunk algoritmikus szempontból: áttekintjük az irodalomban szereplő alapvető

algoritmusokat, közelítő algoritmusokat és bonyolultsági eredményeket.

A tárgy elsajátításához biológiai előismeretek nem szükségesek.

Főbb témakörök: mintaillesztés, szekvenciaillesztés, fizikai feltérképezés, DNS-szekventálás algoritmikus kérdései, blokkátrendeződések, evolúciós fák, haplotípus-meghatározás, térszerkezet-előrejelzés.

#### **MAT/350** Additív Kombinatorika II.

Hegyvári Norbert – HENKAAF.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Fourier módszer additív kérdések vizsgálatára

A félév kommutatív csoportokon (később véges testeken) felvetett problémák Fourier analízis segítségével történő megközelítéséről szól.

A félév az említett Tao-Vu könyv megfelelő fejezetén alapul, számos egyéb tétel vizsgálatával kiegészítve.

1-3. hét: További fogalmak a harmonikus analízisben; bilineáris forma, ortogonalitási tulajdonság, a Fourier inverziós formula. A kétféle konvolúció és FT-ja. FT és  $L_p$  norma. Kapcsolata additív

problémákkal. Négyzetszámok számtani sorozatokban, Rudin sejtés.

4-6. hét: Additív energia és a halmazfüggvény FT-jának normája. Néhány példa additív kérdés Fourier módszerrel történő kezelésére

„Határozatlansági reláció”, egy erősebb határozatlansági reláció és kapcsolata a Cauchy-Davenport lemmával.

7-9. hét: Halberstam, Green, Freiman, Ruzsa, Sárközy, tételei.

Számtani sorozatok összeghalmazokban. Összeg-szorzat tételek.

10-12. hét: Bohr halmaz. Bogolyubov, Folner tételek és kapcsolataik differencia és iterált differencia halmazokkal.

Additív halmaz spektruma. Kapcsolata additív halmazokkal.

**MAT/351** Algebrai geometria*Szamuely Tamás – SZTKAKT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Operátor-félcsoportok rövid áttekintése; Analitikus félcsoportok, szektorális operátorok; Dunford függvénykalkulus;  $H^\infty$ -függvénykalkulus; bevezető Banach tér interpoláció; inhomogén differenciálegyenletek; maximális regularitás; szemilineáris egyenletek.

Lunardi: Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems

Arendt, Batty, Hieber, Neubrander: Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems

Engel, Nagel: One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations

**MAT/352** Analitikus operátor-félcsoportok*Farkas Bálint - FABKACT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Affin varietások, Nullstellensatz, morfizmusok. Racionális függvények és leképezések, dimenzió. Kváziprojektív varietások, direkt szorzat, szeparáltság. Projektív varietások morfizmusai, az eliminációelmélet főtétele. Érintőtér, sima pontok, kapcsolat reguláris lokális gyűrűkkel. Biracionális leképezések, felfűjás. Felületek biracionális leképezéseinek faktorizációja. Elemi metszetelmélet felületeken, Bezout tétele. Felületen fekvő görbék szingularitásainak feloldása.

**MAT/353** Harmonikus analízis, a szimmetria tudománya*Laczkovich Miklós - LAMKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Számos matematikai probléma megoldásához kulcs, hogy felfedezzük a probléma szimmetriáit. Hogy aztán a megoldásban a szimmetriákat hogyan használjuk ki, annak módját a harmonikus analízis (más néven reprezentációelmélet) adja meg. Az előadássorozat egyik célja, hogy megismertesse a hallgatóságot a harmonikus analízis—reprezentációelmélet alapjaival, a másik pedig, hogy bemutassa az elmélet és alkalmazásainak kölcsönhatását, kezdve Fermat XVII. századi számelméleti vizsgálódásaitól a kvantummechanikai alkalmazásokig.

Az érintett témák: Az alapelv; véges Abel-csoportok; korai valószínűségszámítási alkalmazások; kvadratikus formák a számelméletben (Fermat, Euler, Lagrange és Gauss); Dirichlet és a harmonikus analízis; nemkommutatív reprezentációelmélet (Frobenius); parciális differenciálegyenletek; közönséges differenciálegyenletek és Lie-csoportok; Weyl és a Lie-csoportok; régi és új kvantummechanika; Wigner és az atomok energiaszintjei; Weyl, Stone, Neumann, Mackey és a kanonikus felcserélési reláció.

**MAT/354** Mátrixanalízis*Petz Dénes – PEDOAAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Véges dimenziós Hilbert-terek (bázis, lineáris leképezések és mátrix reprezentáció), spektrum, nyom, determináns. Tenzorszorzat és tenzor hatvány (Szimmetrikus és antiszimmetrikus). Pozitív definit mátrixok, Hadamard-szorzat. Függvénykalkulus mátrixokra, exponenciális függvény, deriválás. Block-mátrixok.

Mátrixközepek (aritmetikai, geometriai, logaritmus). Mátrix monoton és mátrix konvex függvények. Alkalmazások a kvantumelméletben.

A lineáris algebra alapjaira feltétlenül szükség van, a funkcionálanalízis tárgya ismerete előnyös.

Ajánlott irodalom:

R. Bhatia, Matrix Analysis, Springer, 1997.

D. Petz, Introduction to matrix analysis and its applications,

**MAT/356** Sztochasztikus kölcsönható részecske-rendszerek

Tóth Bálint – TOBNAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Tematika:

1. Kölcsönható részecske-rendszerek alap-példái: aszimmetrikus kizárásos folyamat, zero range, K-kizárásos folyamat, egyéb példák
2. Generátor, félcsoport (alpok), grafikus konstrukció
3. Monte Carlo szimulációk, multispin kódolás
4. Stacionárius eltolásinvariáns szorzatmértékek; ergodicitás
5. Kondenzáció zero range folyamatokban
6. TASEP: Burke tétel
7. Stacionárius nem eltolásinvariáns szorzatmértékek (blokkoló mérték); reverzibilitás
8. Matrikszorzat technika nem szorzat alakú stacionárius mértékek keresésére
9. Hidrodinamika heurisztikus levezetése; lökés- és ritkulási hullámok
10. Határok által indukált fázisátmenetek
11. Csatlások, attraktivitás, a másodosztályú részecske
12. Lökéshullámok mikroszkopikus tulajdonságai (Ferrari-Kipnis-Saada; szorzateloszlások)
13. Részecskeáram és másodosztályú részecske kapcsolata, Nagy számok törvénye (áram-fluktuációk)
14. Áramok nagyeltérés függvényei, Gallavotti-Cohen szimmetria

Irodalom:

- Thomas M. Liggett: Interacting particle systems, Springer, 1985  
Thomas M. Liggett: Stochastic interacting systems: contact, voter and exclusion processes, Springer, 1999  
Gunter M. Schütz: Exactly solvable models for many-body systems far from equilibrium, London: Academic Press, 2001  
Az előadó jegyzetei, <http://www.math.bme.hu/~balazs> cikkek

**MAT/357** Statisztikus fizika matematikai módszerei

Tóth Bálint – TOBNAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Tematika:

1. Valószínűség-számítási bemelegítés
2. A statisztikus fizika tárgya, kanonikus eloszlás, Ising modell
3. Curie-Weiss (mean field) modell
4. Ising modell  $Z^d$ -n, termodinamikai limesz
5. Analitikusság I: Kirkwood-Salsburg egyenletek
6. Analitikusság II: Lee-Yang tétel
7. Fázisátmenet az Ising modellben: Peierls módszer;
8. Griffiths egyenlenségek
9. A klasszikus Heisenberg modell: tükrözési pozitivitás, infravörös korlátok, Frölich-Simon-Spencer tétel
10. A kvantum Heisenberg modell I: Mermin-Wagner tétel
11. A kvantum Heisenberg modell II: Dyson-Lieb-Simon tétel

Irodalom:

- Tóth B.: Statisztikus fizika matematikai módszerei, jegyzet, <http://www.math.bme.hu/~balint/> cikkek  
D. Ruelle: Statistical Mechanics – Rigorous Results. W.A. Benjamin, NY 1969  
R. Griffiths: Rigorous results and theorems. In: Phase Transitions and Critical Phenomena, eds: C. Domb, M.S. Green, Academic Press, 1972

C. Thompson: Mathematical Statistical Physics, Princeton UP 1992  
rengeteg jó könyv és jegyzet van

**MAT/358** Ergodelmélet és dinamikai rendszerek-KIVEZETVE

*Tóth Bálint – TOBNAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

1. Alappéldák: körvonal forgatása, Arnold macskája, pék leképezése, diadikus leképezés, Gauss-leképezés.
2. Poincaré rekurrencia-tétele. Ergodtételek (von Neumann és Birkhoff-Hincsin tételei). Az ergodicitás fogalma.
3. Stacionárius folyamatokkal való kapcsolat. Szimbolikus dinamika, véges típusú eltolások, Bernoulli-leképezések.
4. Keverési tulajdonságok. Egyensúlyhoz való konvergencia.
5. Fourier-módszerek ergodicitás bizonyítására.
6. Káosz és hiperbolicitás (Hopf geometriai módszere).
7. Markov leképezések: Rényi módszere abszolút folytonos invariáns mérték létezésére.
8. A bolygórendszer stabilitásának problémája. Invariáns tóruszok és KAM-tétel. Kis nevezők problémája: a homológikus egyenlet megoldása.
9. Nem-konzervatív (disszipatív) rendszerek és különös attraktorok, fraktálok, a szolenoid leképezése. }

Irodalom:

Szász D.: Dinamikai rendszerek jegyzet, <http://www.math.bme.hu/~szasz/>

M. Brin-G. Stuck: Dynamical Systems, CUP, 2002

**MAT/358** Általános biztosításmatematika

*Arató Miklós - ARMKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Az egyéni kockázat modellje.

Nevezetes kárszámeloszlások.

A kárnagyság eloszlása.

Összetett kockázat modellje.

Díjkalkulációs elvek és tulajdonságaik

Credibility elmélet és a tapasztalati díjszámítás.

Bónusz rendszerek: kármentességi díjvisszatérítések és engedmények, bónusz-málusz.

A viszontbiztosítás célja és típusai.

Viszontbiztosítási díjkalkuláció.

**MAT/360** Riemann-geometria

*Szabó Szilárd*

10 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Az exponenciális leképezés a Riemann-sokaságon. Az ívhosszra vonatkozó variációs formulák. Konjugált pontok. A geodetikushoz rendelt index-forma. A Riemann-sokaság teljességének problémája, a Hopf-Rinow tétel. A Rauch-féle összehasonlítási tételek. A nempozitív Gauss-görbületű sokaságok, a Cartan-Hadamard-tétel. Lokális izometriák Riemann-sokaságok között, a Cartan-Ambrose-Hicks tétel. A lokálisan szimmetrikus Riemann-terek. A részsokaságon indukált lineáris konnexió. A második alapforma, a Weingarten-egyenlet. A totálgeodetikus részsokaság. A térfogat variációja, a minimál-részsokaság értelmezése. A görbületi tenzorokra vonatkozó összefüggések. A részsokaság körül vett Fermi-féle koordináta-rendszer. A részsokaság fokális pontjai.

**MAT/361** Fejezetek a differenciálgeometriából

Csikós Balázs – CSBKABT.ELTE  
Lakos Gyula – LAGEAFT.ELTE  
Moussong Gábor - MOGKAAT.ELTE  
Szenthe János – SZJKAAT.ELTE  
Verhóczy László – VELKAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Konvex felületek differenciálgeometriai jellemzése. Steiner-Minkowski-formula, Herglotz integrálformulája, konvex felületekre vonatkozó merevségi tételek. Vonalfelületek és vonalkongruenciák.

Állandó görbületű felületek. Csebisev-hálók, sine-Gordon-egyenlőség, Bäcklund-transzformáció, Hilbert tétele. Összehasonlítási tételek.

Variációszámítási feladatok a differenciálgeometriában. Euler-Lagrange egyenlet, brachisztocron probléma, geodetikuskok, Jacobi-mezők, Lagrange-féle mechanika, szimmetriák és invariánsok, minimálfelületek, konform paraméterezés, harmonikus leképezések.

#### **MAT/362** Differenciálgeometria és fizika szeminárium

Csikós Balázs – CSBKABT.ELTE  
Szenthe János – SZJKAAT.ELTE  
Verhóczy László – VELKAAT.ELTE

6 kredit, gyakorlat, -, ismételhető

A kutatószeminárium célja az elméleti fizikához kapcsolódó új differenciálgeometriai eredmények feldolgozása.

#### **MAT/363** Lie-csoportok és szimmetrikus terek

*Szabó Szilárd*

10 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Lie-csoportok és Lie-algebrák, exponenciális leképezés, adjungált reprezentáció, a Hausdorff-Campbell-Baker-sor. Lie-algebrák struktúrája, nilpotens, feloldható, féligegyszerű és redukív Lie-algebrák. Cartan-részalgebra, féligegyszerű Lie-algebrák osztályozása.

A differenciálható hányadosterek, a homogén Riemann-terek. Az összefüggő kompakt Lie-csoport, mint szimmetrikus tér. A szimmetrikus Riemann-tér izometria-csoportja, mint Lie-csoport. A szimmetrikus Riemann-tér, mint hányadostér. A Riemann-féle szimmetrikus hármastól történő konstrukció. Az exponenciális leképezés és a görbületi tenzor egzakt leírása. Totálgeodetikus részsokaságok és Lie-hármas-rendszerek. A rang értelmezése. A féligegyszerű szimmetrikus Riemann-terek osztályozása. Az irreducibilis szimmetrikus terek.

#### **MAT/364** Lie-csoportok és szimmetrikus terek

*Szabó Szilárd*

6 kredit, gyakorlat, -, nem ismételhető

Lie-csoportok és Lie-algebrák, exponenciális leképezés, adjungált reprezentáció, a Hausdorff-Campbell-Baker-sor. Lie-algebrák struktúrája, nilpotens, feloldható, féligegyszerű és redukív Lie-algebrák. Cartan-részalgebra, féligegyszerű Lie-algebrák osztályozása.

A differenciálható hányadosterek, a homogén Riemann-terek. Az összefüggő kompakt Lie-csoport, mint szimmetrikus tér. A szimmetrikus Riemann-tér izometria-csoportja, mint Lie-csoport. A szimmetrikus Riemann-tér, mint hányadostér. A Riemann-féle szimmetrikus hármastól történő konstrukció. Az exponenciális leképezés és a görbületi tenzor egzakt leírása. Totálgeodetikus részsokaságok és Lie-hármas-rendszerek. A rang értelmezése. A féligegyszerű szimmetrikus Riemann-terek osztályozása. Az irreducibilis szimmetrikus terek.

#### **MAT/365** Valószínűségi módszerek a konvex geometriában

*Naszódi Márton – NAMKADT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Mértékkoncentráció a gömbön: Lévy-féle szférikus izoperimetrikus egyenlőtlenség. Lévy-családok. Véletlen konstrukciók: Szigorúan antipodális halmazok konstruálása a kocka csúcsaiból (Erdős P. - Füredi Z.), és a gömb pontjaiból. Állandó szélességű halmazok megvilágítása (O. Schramm). Konvex testek Banach-Mazur-távolsága: A definíció különböző általánosításai. John-ellipszoid: A Banach-Mazur-távolságra adott felső becslések. Dvoretzky tétele: Valószínűségi és globális alak. Johnson-Lindenstrauss-féle lapítási lemma: Véges metrikus terek beágyazása az  $n$ -dimenziós euklideszi térbe. Fedési számok: Adott konvex test hány eltoltja fedi az euklideszi gömböt. Sudakov-egyenlőtlenség és duálisa.

**MAT/366** Riemann-geometria

*Szabó Szilárd*

6 kredit, gyakorlat, -, nem ismételhető

Az exponenciális leképezés a Riemann-sokaságon. Az ívhosszra vonatkozó variációs formulák. Konjugált pontok. A geodetikushoz rendelt index-forma. A Riemann-sokaság teljességének problémája, a Hopf-Rinow tétel. A Rauch-féle összehasonlítási tételek. A nempozitív Gauss-görbületű sokaságok, a Cartan-Hadamard-tétel. Lokális izometriák Riemann-sokaságok között, a Cartan-Ambrose-Hicks tétel. A lokálisan szimmetrikus Riemann-terek. A részsokaságon indukált lineáris konnexió. A második alapforma, a Weingarten-egyenlet. A totálgeodetikus részsokaság. A térfogat variációja, a minimál-részsokaság értelmezése. A görbületi tenzorokra vonatkozó összefüggések. A részsokaság körül vett Fermi-féle koordináta-rendszer. A részsokaság fokális pontjai.

**MAT/367** Large networks seminar

*Király Zoltán - KIZKAAT.ELTE*

*Lovász László - LOLKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

The theory of large networks (graphs) has become very important through its applications in other sciences, as well as through the internal development of graph theory. Speakers at the seminar are students presenting recent papers from the literature, and researchers of mathematics and other areas who describe their recent results.

**MAT/368** Operátorfélcsoportok

*Sikolya Eszter - SIEKADT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Operátorfélcsoportokkal kapcsolatos alapfogalmak. Hille-Yosida tételkör. Alkalmazások első- és másodrendű differenciáloperátorokra. Félcsoportok regularitási tulajdonságai (analitikus, differenciálható, normafolytonos, kompakt). Aszimptotikus tulajdonságok, a félcsoport és a generátor spektrumának viszonya. Operátorfélcsoportok és az Cauchy probléma kapcsolata, jóldefiniáltság. Megoldások reprezentációja. Példák: késleltetett és populációs egyenletek tárgyalása. Irodalom: Engel, K.-J., Nagel R., A Short Course on Operator Semigroups, Springer-Verlag, Universitext, 2006.

**MAT/369** Evolúciós egyenletek

*Bátkai András - BAAKAAT.ELTE*

*Sikolya Eszter - SIEKADT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Evolúciós egyenleteket számos jelenség leírására használhatunk. A tárgy célja néhány példa bemutatása és a megfelelő egyenlet(rendszer) megoldása(i)nak vizsgálata. Szeretnénk, hogy aktuális problémákkal ismerkedhessenek meg a hallgatók, részben friss cikkekben található eredmények feldolgozásával. Irodalom: Engel, K.-J., Nagel R., A Short Course on Operator Semigroups, Springer-Verlag, Universitext, 2006. Bátкаи, A., Piazzera, S., Semigroups for Delay Equations, A K Peters, 2005.

**MAT/370** Dinamikai rendszerek és differenciálegyenletek

*Simon Péter – SIPKAAT.ELTE*

12 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Lineáris differenciálegyenletek fázisképeinek osztályozása a topologikus ekvivalencia szerint. Nemlineáris rendszerek osztályozása a Poincaré-féle normálforma segítségével. Stabilis, instabilis, centrális sokaság, Hartman-Grobman tétel. Lokális vizsgálat periodikus megoldások körül. Kétdimenziós vektormező indexe, a trajektóriák végtelenbeli viselkedése. Káosz a Lorenz-féle meteorológiai modellben. Dinamikai rendszerek bifurkációi, alapvető példák és alkalmazások. Nyereg-csomó és Andronov-Hopf bifurkáció. Bifurkációs diagrammok meghatározása, két kodimenziós bifurkációk. Strukturális stabilitás, attraktorok típusai. Diszkrét dinamikai rendszerek. Topologikus ekvivalencia szerinti osztályozás. Intervallum leképezések: sátor leképezések, logisztikus függvénycsalád. Szimbolikus dinamika. Kaotikus rendszerek. Smale-patkó. Sarkovszkij tétel. Bifurkációk.

Perko, L., Differential Equations and Dynamical Systems, Springer, New York, 2008.

Tóth János, Simon L. Péter, Differenciálegyenletek; Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba, Typotex, Budapest, 2009.

Simon L. Péter Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek (elektronikus jegyzet)

<http://www.cs.elte.hu/~simonp/DinRJegyz/dinrendjegyzet.pdf>

Simon L. Péter Differential equations and dynamical systems

(electronic lecture notes)

[http://www.cs.elte.hu/~simonp/dynsysdiffe-](http://www.cs.elte.hu/~simonp/dynsysdiffe-q.pdf)

[q.pdf](http://www.cs.elte.hu/~simonp/dynsysdiffe-q.pdf)

**MAT/371** Időfüggő parciális differenciálegyenletek numerikus módszerei és alkalmazásai

*Izsák Ferenc – IZFKAAT.ELTE*

12 kredit, elmélet, -, ismételt

Az előadás keretében időfüggő parciális differenciálegyenletek megoldására vonatkozó véges differencia és véges elem módszereket tárgyalunk. Nagyrészt lineáris egyenletek megoldását vizsgáljuk, a megoldás konvergenciájához szükséges felosztás-paraméterek megadása az elméleti rész fő célja.

**MAT/372** Matematikai modellalkotás

*Izsák Ferenc – IZFKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, ismételt

Transzportfolyamatok alapjai: mérlegegyenlet, sűrűségek, áramok, vezetési egyenletek. A karakterisztikák jelentése. Navier-Stokes-egyenletek. Hővezetés, diffúziós egyenletek: a hővezetés differenciálegyenlet, szuperpozíció elve, a hő terjedési sebessége, maximumelv, alternatív diffúziós modellek. A hulláme egyenlet: a hullám terjedési sebessége, karakterisztikák. A vízhullámok terjedése, alternatív modellek. Kémiai reakciók: térben homogén, illetve inhomogén rendszerek, reakció mechanizmus, diszkrét és folytonos modellek, sztochasztikus modellek, reakció-diffúziós rendszerek, egzotikus jelenségek: oszcillációk, hullámok. Elektrodinamikai modellek: Maxwell-egyenletek, gerjesztési problémák, speciális peremfeltételek.

**MAT/373** Funkcionálanalízis*Sebestyén Zoltán – SEZKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Banach algebrák: spektrum, spektrál sugár, Gelfand-Mazur tétel, spektrál sugár tétel, Kommutatív Banach algebrák Gelfand reprezentációja: kommutatív Gelfand-Naimark tétel, Hirshfeld-Zelazko tétel, Wiener tétele, Stone-Weierstrass tétel, Gleason-Kahane-Zelazko tétel, Nemkommutatív Gelfand-Naimark elmélet  $C^*$ -algebrákra.

**MAT/374** Közöséges differenciálegyenletek numerikus módszerei*Fekete Imre*

9 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Egylépéses elemi módszerek. Explicit Runge-Kutta típusú módszerek rendje, stabilitása és konvergenciája. Implicit RK módszerek. A-stabil módszerek. Merev feladatok megoldása. Több lépéses módszerek. Rend, stabilitás, konvergencia. Kétpontos peremérték-feladatok numerikus megoldása. A belövéses módszer és alkalmazása. Véges differenciák módszere. Rend és konzisztencia vizsgálata. Konvergencia a 2-es és a maximum normában. Alkalmazás parciális differenciálegyenletek szemidiszkrétizálására.

**MAT/375** Algoritmuselmélet*Király Zoltán - KIZKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Középső elem keresése, gyorsrendezés elemzése, számjegyes rendezés. Számolás nagy számokkal és maradékosztályokkal, RSA, Schönhage-Strassen szorzás. Adattömörítés. Fejlettebb legrövidebb út kereső algoritmusok, Suurballe algoritmus. Stabil házasság páros és nem páros gráfban, az egyetemi felvételi rendszer. Hopcroft-Karp és Dinitz algoritmusai, többtermékes folyamatok. Hálózati kódok. Közelítő algoritmusok, sémák, egészségi hézag. Fix paraméterrel megoldható problémák osztálya. Útvonalkeresők a gyakorlatban. Párhuzamos számítások.

**MAT/376** Operátorfélcsoportok és Numerikus Analízis*Bátkai András – BAAKAAT.ELTE**Farkas Bálint - FABKACT.ELTE**Adminisztrátor: NAAKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

A tárgy célja az operátorfélcsoportok elméletének bemutatása a numerikus analízisbeli alkalmazásokat állítva a középpontba. Bemutatjuk, hogy a térbeli és időbeli diszkretizációk hogyan kezelhetők absztrakt módon, evel egységesítve sok, az irodalomban fellelhető eredményt. Tematika: Motiváló példák és alaptulajdonságok, Trotter-Kato tételek, véges differencia és véges elem térdiszkretizációk. Lax ekvivalenciatétele, Chernoff szorzatformulája, idődiszkretizációk. Racionális approximációk, splitting. A tárgyalást különböző alkalmazások tárgyalása zárja.

**MAT/377** Csoportok és gráfok*Abért Miklós – ABMEAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

A csoportelmélet és a gráfelmélet sok ponton kapcsolatban áll egymással. Ilyen, sokat kutatott kapcsolat a csoportok geometrikus megértése Cayley gráfjai segítségével, illetve a csúcstranzitív gráfok elmélete. Új ilyen kapcsolat a korlátos fokú gráf sorozatok konvergenciája. A kurzus ezeket a kapcsolatokat és a terület fő eredményeit ismerteti.

**MAT/378** Algebrai számelmélet I.

**2025 szeptemberétől: Algebrai számelmélet***Zábrádi Gergely – ZAGGAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Ez a kurzus bevezetést szeretne nyújtani az algebrai számelméletbe. Az első néhány előadáson bevezetjük a számtestek (azaz a racionális számok véges bővítéseinek) algebrai egészeihez kapcsolódó alapvető fogalmakat. Ezután Dedekind gyűrűk ideálméletével, az osztályszám Minkowski-féle becslésével, elágazás-elmélettel, illetve prímeideálnál vett lokalizálással és teljessé tétellel folytatjuk. A félév második felében leginkább lokális testekkel fogunk foglalkozni, azaz olyan testekkel, melyek teljesek egy diszkrét értékelésre nézve és maradéktestük véges. Ezek struktúráját részletesen leírjuk ún. „Witt gyűrűk” segítségével. Ha az idő engedi, megvizsgáljuk lokális testek bővítéseit is, és bevezetjük a Galois-csoportok elágazási részcsoportjait. Szükséges előismeretek: alapvető csoport-, gyűrű- és Galois-elméleti ismeretek. Hasznos, de nem előfeltétel az algebrai geometria.

**MAT/379 Algebrai Számelmélet II.****2025 szeptemberétől: Válogatott fejezetek az aritmetikai geometriából***Zábrádi Gergely – ZAGGAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Fő célunk a lokális osztálytest-elmélet megértése lesz, továbbá ennek (globális) alkalmazásai. Bevezető csoportkohomológiával kezdünk, különös tekintettel a Galois-kohomológiára. Ezután „absztrakt osztálytestelmélettel” folytatjuk: osztály formációk, fundamentális osztályok és reciprocitási leképezések. Kiszámoljuk lokális testek Brauer-csoportját, ezzel bebizonyítva a lokális reciprocitási tételt. Alkalmazásként megmutatjuk, hogy a felépített elméletből milyen egyszerűen következnek olyan klasszikus tételek, mint a Kronecker-Weber tétel  $Q$  Abel-féle bővítéseiről, vagy a kvadratikus reciprocitás. Ha az idő engedi a közönség érdeklődésétől függően a következő témák kerülhetnek még elő: normák teste,  $p$ -adikus Galois-reprezentációk és  $(\varphi, \Gamma)$ -modulusok, a „meredekségek” elmélete,  $p$ -adikus moduláris formák. Szükséges előismeretek: alapvető csoport-, gyűrű- és Galois-elmélet. Ajánlott az Algebrai számelmélet I, de nem formális követelmény. Hasznos továbbá a homológikus algebra és az algebrai geometria, de ezek sem szükségesek.

**MAT/380 Lie-elmélet alkalmazásokkal***Fialowski Alice – FIAKAAT.ELTE**Adminisztrátor: Hermann Péter HEPKAAT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Az alábbi témákat fogom tárgyalni : 1. Lie-algebrák alapjainak áttekintése 2. Kac-Moody algebrák 3. Vektormező algebrák 4. Lie-algebrák kohomológiája 5. Algebrai deformációelmélet 6. Reprezentációelmélet alapjai 7. Lie-algebrák általánosításai 8. Hopf-algebrák és kvantumcsoportok

**MAT/381 Analízis szeminárium***Keleti Tamás – KETKABT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, ismételt

A szeminárium elsősorban az Analízis tanszéken folyó kutatásokról szól, ezekbe kapcsolódhatnak be a hallgatók, akik természetesen szintén tartanak előadást. Az előadások témája lehet komplex vagy valós függvénytan, valamint topológia.

**MAT/382** Leszámlálás - az algebrai geometria találkozik a topológiával

*Fehér László – FELKABT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Hány egyenes metsz négy általános helyzetű egyenest a térben? Hány egyenes van egy harmadfokú felületen? Ehhez hasonló kérdések uralták a 19. század algebrai geometriáját és ma reneszánszát éli. A fő megoldási módszer az ún. Schubert kalkulus lett. A Schubert kalkulust tekinthetjük az algebrai topológia első eredményének, bár maga az algebrai topológia csak jóval később született meg. A téma segítségével betekintést kapunk az algebrai topológia, algebrai geometria és a Lie-csoportok reprezentációinak elméletébe klasszikus példákon keresztül. Témák: Grassmann sokaságok topológiája, kohomológia, vektor-nyalábok, karakterisztikus osztályok,  $GL(n)$  reprezentációi.

**MAT/384** Ekvivariáns kohomológia

*Fehér László – FELKABT.ELTE*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Csoportthatással ellátott tereken egy, a kohomológiánál gazdagabb elmélet, az ekvivariáns kohomológia (EK) is definiálható. Az EK bizonyos értelemben a faktor geometriáját is kódolja. Mivel a pont  $G$ -ekvivariáns kohomológiája a  $G$ -karakterisztikus osztályok gyűrűje így az EK egyben a karakterisztikus osztályok elméletének természetes általánosításának is tekinthető. Klasszifikáló terek, Borel konstrukció. Invariáns részvarietások ekvivariáns Poincaré duálisa. Kapcsolat az obstrukció-elmélettel, elkerülő-ideál. Leszámlálási feladatok. Schur és Schubert polinomok, mint  $G$ -ekvivariáns kohomológia-osztályok. Atiyah-Bott lokalizáció, diszkriminánsok foka. Thom-Porteous-Giambelli tétel. Globális szingularitás-elmélet: Thom polinomok.

**MAT/385** Algebrai és differenciáltopológia EA

*Kalmár Boldizsár*

12 kredit, elmélet, -, nem ismételt

Karakterisztikus osztályok és alkalmazásaik, immerziók, sokaságok kobordizmusgyűrűje, egzotikus gömbök létezése, osztályozásuk. Serre tételei a gömbök homotopikus csoportjairól. Lie csoportok és  $H$ -terek racionális homotopikus csoportjai. Ajánlott irodalom: 1) J. W. Milnor, J. D. Stasheff: Characteristic Classes, Princeton, 1974. 2) R. E. Stong: Notes on Cobordism Theory, Princeton, 1968. 3) Kervaire - Milnor: Groups of homotopy spheres I, Annals of Mathematics, 77 (1963) 504- 537.

**MAT/386** Algebrai és differenciáltopológia GY

*Kalmár Boldizsár*

6 kredit, gyakorlat, -, nem ismételt

Karakterisztikus osztályok és alkalmazásaik, immerziók, sokaságok kobordizmusgyűrűje, egzotikus gömbök létezése, osztályozásuk. Serre tételei a gömbök homotopikus csoportjairól. Lie csoportok és  $H$ -terek racionális homotopikus csoportjai. Ajánlott irodalom: 1) J. W. Milnor, J. D. Stasheff: Characteristic Classes, Princeton, 1974. 2) R. E. Stong: Notes on Cobordism Theory, Princeton, 1968. 3) Kervaire - Milnor: Groups of homotopy spheres I, Annals of Mathematics, 77 (1963) 504- 537.

**MAT/387** Riemann felületek geometrizálása

Tóth Árpád – TOALAJT.ELTE

6 kredit, gyakorlat, -, nem ismételhető

A kurzus során a Ricci folyamat tanulmányozzuk zárt felületeken. Megmutatjuk, hogy a Ricci áram megoldása egy olyan konstans görbületű metrikához tart ami konform ekvivalens az eredeti metrikával. Ezt úgy is értelmezhetjük, hogy minden felületen van egy kanonikus geometria ami lokálisan euklideszi, gömbi, vagy a Bolyai-Lobacsevskij féle. A konstans görbületű metrika létezése, az úgy nevezett uniformizáció tétele, a XIX. századi matematika egyik meghatározó eredménye. A Ricci folyamaton alapuló bizonyítás egy friss és modern megközelítés ami jó bevezetést nyújt a zárt 3-sokaságok osztályozásánál felmerülő Ricci folyam tanulmányozásához.

**MAT/388** Innovatív numerikus integrálások

2025. szeptemberétől: Innovatív numerikus integrátorok

Csomós Petra

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

A tárgy célja parciális differenciálegyenletek, vagy általánosabb evolúciós egyenletek megoldására használatos idődiszkretizációs módszerek a funkcionálanalízis eszközeinek segítségével történő vizsgálatába való bevezetés. A kurzus során a következő témakörök részletes tárgyalásra kerülnek: operátor-splitting, racionális approximációk, exponenciális integrátorok. A szükséges operátorelméleti háttér tárgyalása szintén a tárgy részét képezi.

**MAT/389** Időfüggő parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása

Izsák Ferenc – IZFKAAAT.ELTE

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

- a vizsgált egyenletek köre, a megoldást közelítő sémák általános alakja, a sémák felírásának elvei: megmaradási törvények, szemidiszkrétizáció - konzisztencia és stabilitás: a Lax-féle ekvivalenciatétel - stabilitásvizsgálati módszerek: Gersgorin-tétel alkalmazása, Neumann-féle stabilitási feltétel - a hővezetési egyenlet vizsgálata, explicit, implicit, ADI-típusú sémák két és 3 dimenzióban, stabilitásuk - hiperbolikus egyenletek vizsgálata, nevezetes sémák, stabilitásuk - analitikus és numerikus függési tartomány: szükséges feltétel stabilitásra - többlépéses sémák konstrukciója, alkalmazása hiperbolikus rendszerek és másodrendű hiperbolikus feladatok megoldására - a stabilitás új definíciója, ennek szükségessége, konvergencia - a Burgers-egyenlet numerikus megoldása - végeselem és véges térfogat diszkretizáció elve a térbeli differenciáloperátorra

**MAT/390** Fejezetek a gyűrűelméletből

Ágoston István – AGIKAAT.ELTE

4 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Egyszerű algebrák. Centrális egyszerű algebrák. Algebrák tenzorszorzata. Noether--Skolem-tétel, kettős centralizátor tétel, Brauer-csoport, keresztszorzat. Reprezentációelmélet. Öröklődő algebrák, Coxeter-transzformációk és Coxeter-funktorok, preprojektív, reguláris és preinjektív reprezentációk, majdnem fölhasadó sorozatok, Auslander--Reiten-gráf, Brauer--Thrall-sejtések, véges reprezentációtípus. Homologikus algebra. Derivált funktorok. Projektív és injektív föloldások, az Ext és a Tor funktorok fölépítése és alaptulajdonságai. Egzakt sorozatok és az Ext funktor, Yoneda-szorzat, Ext-algebrák. Homologikus dimenziók. Projektív és injektív

dimenzió, globális dimenzió, domináns dimenzió, finitisztikus dimenzió, reprezentációdimenzió. javasolt irodalom: 1. Herstein: Noncommutative rings (MAA 1968) 2. Rotman: An introduction to homological algebra (AP 1979, Springer 2000) 3. Assem--Simson--Skowronski: Elements of the representation theory of associative algebras (CUP 2007)

#### **MAT/391 Additív Kombinatorika**

Somlai Gábor

6 kredit, gyakorlat, -, nem ismételhető

1. Néhány egyszerű megjegyzés a Minkowski-összeg elemszámára  $Z$ -ben 2. Az  $r_{\{A+B\}}(x)$ ,  $r_{\{A-B\}}(x)$  függvényekről és az  $E_+(A,B)$  additív energiáról 3. Ruzsa távolság-tételei 4. Plünnecke tétel 5. Cauchy-Davenport tétel; Kneser tétel 6. Nem kommutatív Kneser tétel 7. Fedési tételek 8. Megszorított összegek 9. Algebrai módszerek 10. Az Erdős-Heilbronn sejtés, a Cauchy-Davenport és az Erdős-Ginzburg-Ziv tételek (újabb) bizonyításai 11. Gowers-Balog-Szemerédi tétel és alkalmazásai 12. Additív-Multiplikatív kombinatorika véges testekben

#### **MAT/392 Stacionárius folyamatok**

Michaletzky György - MIGKAAT.ELTE

6 kredit, gyakorlat, -, nem ismételhető

Stacionárius folyamatok, kovarianciafüggvény. Bochner-Hincsin tétel. Spektrálfelbontás. Karhunen-Loeve sorfejtés, Kotelnikov-Shannon tétel. Wold-felbontás. Teljesen reguláris és szinguláris folyamatok. Lineáris szűrők. Ergodicitás. Diszkrét paraméterű folyamatok állapotteres leírása. Ho-Kalman algoritmus, Faure-Anderson elmélet. Előrejelzés.

Ajánlott irodalom:

T. W. Anderson, The statistical analysis of time series, Wiley and Sons, 1958.  
S. Karlin – H. M. Taylor: Sztochasztikus folyamatok. Gondolat Kiadó, 1985.  
A. M. Yaglom, Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions, I.- II.,  
Springer Verlag, 1987.

#### **MAT/393 Dinamikai rendszerek és differenciálegyenletek I.**

Simon Péter S8MAN2

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Tárgy rövid leírása:

Lineáris differenciálegyenletek fázisképeinek osztályozása a topologikus ekvivalencia szerint. Nemlineáris rendszerek osztályozása a Poincaré-féle normálforma segítségével. Stabilis, instabilis, centrális sokaság, Hartman-Grobman tétel. Lokális vizsgálat periodikus megoldások körül. Kétdimenziós vektormező indexe, a trajektóriák végtelenbeli viselkedése. Káosz a Lorenz-féle meteorológiai modellben.

Title of Course: Dynamical systems and differential equations

Short description of Course: Topological equivalence, classification of linear systems. Poincaré normal forms, classification of nonlinear systems. Stable, unstable, centre manifolds theorems, Hartman - Grobman theorem. Periodic solutions and their stability. Index of two-dimensional vector fields,

behaviour of trajectories at infinity. Chaos in the Lorenz equation.

Perko, L., Differential Equations and Dynamical Systems, Springer, New York, 2008.

Tóth János, Simon L. Péter, Differenciálegyenletek; Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba, Typotex, Budapest, 2009.

Simon L. Péter Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek (elektronikus jegyzet)  
<http://www.cs.elte.hu/~simonp/DinRJegyz/dinrendjegyzet.pdf>

Simon L. Péter Differential equations and dynamical systems (electronic lecture notes) <http://www.cs.elte.hu/~simonp/dynsysdiffe-q.pdf>

### **MAT/394 Dinamikai rendszerek és differenciálegyenletek II.**

*Simon Péter S8MAN2*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Tárgy rövid leírása:

Dinamikai rendszerek bifurkációi, alapvető példák és alkalmazások. Nyereg-csomó és Andronov-Hopf bifurkáció. Bifurkációs diagrammok meghatározása, két kodimenziós bifurkációk. Strukturális stabilitás, attraktorok típusai.

Diszkrét dinamikai rendszerek. Topologikus ekvivalencia szerinti osztályozás. Intervallum leképezések: sátor leképezések, logisztikus függvénycsalád. Szimbolikus dinamika. Kaotikus rendszerek. Smale-patkó. Sarkovszkij tétel. Bifurkációk.

Title of Course: Dynamical systems and differential equations II

Short description of Course:

Bifurcations in dynamical systems, basic examples. Definitions of local and global bifurcations. Saddle-node bifurcation, Andronov-Hopf bifurcation. Two-codimensional bifurcations. Methods for finding bifurcation curves. Structural stability. Attractors.

Discrete dynamical systems. Classification according to topological equivalence. 1D maps, the tent map and the logistic map. Symbolic dynamics. Chaotic systems. Smale horseshoe, Sharkovski's theorem. Bifurcations.

Perko, L., Differential Equations and Dynamical Systems, Springer, New York, 2008.

Tóth János, Simon L. Péter, Differenciálegyenletek; Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba, Typotex, Budapest, 2009.

Simon L. Péter Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek (elektronikus jegyzet)

<http://www.cs.elte.hu/~simonp/DinRJegyz/dinrendjegyzet.pdf>

Simon L. Péter Differential equations and dynamical systems  
(electronic lecture notes) <http://www.cs.elte.hu/~simonp/dynsysdiff-q.pdf>

### **MAT/395 Folytonos optimalizálás szeminárium**

*Illés Tibor HHGMN1*

6 kredit, elmélet, -, ismételhető

Tárgy rövid leírása:

Az optimalizálás elmélet és alkalmazási területeiről kerülnek témák bemutatásra, különös tekintettel a lineáris és nemlineáris optimalizálás elméletére, algoritmusaira és azok alkalmazására. Fontos témakörök a lineáris komplementaritási feladatok, szemidefinit optimalizálási feladatok, globális optimalizálási problémák, belsőpontos algoritmusok, több célfüggvényes feladatok, egyensúlyi modellek és alkalmazásaik.

A szeminárium lehetőséget nyújt olyan témák ismertetésére, amelyeket Magyarországon művelnek, többek között intervallum aritmetikán alapuló globális optimalizálási algoritmusok, játékelmélet, portfólió optimalizálás, közgazdasági matematika, halmazértékű függvények, közlekedés operációkutatási kérdései, olajipari optimalizálási modellek; termelésstervezési, ütemezési és elhelyezési problémák.

Title of Course: Continuous Optimization seminar

Short description of Course:

The areas of optimization theory and application are presented, in particular the theory of linear and non-linear optimization, related algorithms and their applications. Important topics of the seminar are linear complementarity problems, semidefinite optimization problems, global optimization problems, interior point methods, multi-objective optimization problems, equilibrium models and their applications.

### **MAT/396 Multiplikatív számelmélet**

*Gyarmati Katalin*

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető

Tárgy rövid leírása:

Becslések a prímszámok eloszlásáról. A számtani sorozatok prímjeire vonatkozó

Dirichlet-tétel bizonyítása. Generátorfüggvény additív és multiplikatív problémáknál. A prímszámtétel elemi bizonyítása. Bevezetés az analitikus számelméletbe.

Title of Course: Multiplicative number theory

Short description of Course:

Estimates on the distribution of primes. The proof of Dirichlet's theorem on primes in arithmetic progressions. Generating functions in additive and

multiplicative problems. Elementary proof for the prime number theorem.  
Introduction to analytic number theory.

**MAT/397 Pénzügyi folyamatok elemzése 1.**

*Márkus László XLAPMO*

6 kredit, elmélet, -

Tárgy rövid leírása:

Diszkrét idejű kereskedés: egy kötvény – egy részvény piac. Önfinanszírozó stratégiák. Hedge. Származtatott követelés, opció. Arbitrázs. Bináris piac. Ekvivalens martingál mérték. Teljesség és martingál reprezentáció bináris piacra. Európai opció árazása. Cox-Ross-Rubinstein (CRR) formula. Snell burkoló, optimális megállítások. Amerikai opciók árazása.. Eszközárzás: I. alaptétel: Arbitrázs-mentesség és a martingál mérték léte-zése. II. alaptétel: Piaci teljesség és a martingál mérték egyértelműsége. Opciók vevő és eladó szerinti ára nem teljes piacon. Tranzakciós költségek. Black-Scholes (B-SCH) formula mint a CRR határéréke.

Wiener folyamat szerinti sztochasztikus integrál mint martingál, ill. lokális martingál. Itó formula. Sztoch. differenlekek, példák. Martingálok integrálreprezentációja. Részvények és kötvények folytonos időben. Önfinanszírozó stratégiák. Ekvivalens martingál mértékek. Európai opciók ára. B-SCH formula és differenlet. Sztoch. volatilitásmodellek (Heston). Implied volatility, smile.

Title of Course: Financial Processes 1

Short description of Course:

Discrete time, finite horizon, one-bond - one-stock markets. Self-financing strategies, hedge. Options and contingent claims. Arbitrage. Binary market. Equivalent martingale measure. Completeness and „Integral” representation of martingales in binary markets. Pricing of European options. The Cox-Ross-Rubinstein (CRR) formula. Snell envelope and optimal stopping. Pricing of American options. Fundamental theorems of asset pricing: Absence of arbitrage and the existence of martingale measures. Market completeness and the uniqueness of martingale measures. Non-complete markets - atomic martingale measures. The seller's and the buyer's prices of an option in non-complete markets,. Transaction costs. Black-Scholes (B-SCH) formula as a limit of CRR.

Overview of some aspects of the stochastic integral by Wiener process, Ito's calculus and stochastic differential equations. Integral representation of martingales. Bond-Stock market in continuous time. Self financing strategies and equivalent martingale measures. Pricing of European options the B-SCH formula and PDE. Stochastic volatility models (Heston). Implied volatility, smile.

**MAT/398 Sztochasztikus folyamatok**

*Prokaj Vilmos*

9 kredit, elmélet, -

Tárgy rövid leírása:

Wiener folyamat bevezetése. Donsker tétel. Sorfejtések. Trajektóriák egyszerű tulajdonságai. Kvadratikus variáció, és izometria. Integrál négyzetesen integrálható integrandusokkal. Ito lemma. Tükrözési elv, erős

Markov tulajdonság. Szintelérési idő, inverz Gauss eloszlás. Szintelérési folyamat, mint Lévy folyamat. Girsanov tétel. Sztochasztikus differenciálegyenlet. Létezés, unicitás Lipschitz folytonos együtthatók esetén. Diffúziós folyamatok, Feynman-Kac formula

Title of Course: Stochastic Processes

Short description of Course:

Introduction to the Wiener-process. Donsker theorem, series expansions. Simple path properties. Quadratic variation and isometry. Integral with square integrable integrands. Ito lemma. Reflection principle, strong Markov property. Hitting time, inverse Gaussian distribution. Girsanov theorem. Stochastic differential equation. Existence and uniqueness for Lipschitz-continuous coefficients. Diffusions. Feynman-Kac formula.

### **MAT/399 Operátorfélcsoportok a numerikus analízisben**

Csomós Petra SNISB3

6 kredit, elmélet, -

Tárgy rövid leírása:

A kurzus célja a parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása során alkalmazott módszerek tulajdonságainak elméleti vizsgálata. Az előadások során bemutatjuk, hogyan végezhető el a numerikus módszerek hibaanalízise a problémák pontos megoldásának ismerete nélkül. Ehhez felismerjük és kihasználjuk a pontos megoldások mindegyikét jellemző speciális struktúrát (tudniillik, hogy operátorfélcsoportok állítják elő azokat). Ez az absztrakt megközelítés lehetőséget biztosít a számunkra, hogy a különféle parciális differenciálegyenletekre alkalmazott különféle numerikus módszerek konvergenciájának vizsgálatát, azonos keret között tárgyaljuk. Az előadások anyagát példák szemléltetik.

Tematika: térbeli és időbeli diszkretizációk, Lax-féle ekvivalencia tétel, racionális approximációk, operátor-splitting, exponenciális integrátorok

Title of Course: Operator semigroups for numerical analysis

Short description of Course:

The aim of the course is to study theoretically the properties of the numerical methods used for solving partial differential equations. During the lectures we will show how to analyse the error without knowing the exact solution. To this end we recognise and exploit the special structure which all the exact solutions possess, namely, that they are obtained from operator semigroups. This abstract framework allows us to study the convergence of various numerical methods applied to various partial differential equations in the same setting. The lectures are supported by numerous examples.

6 kredit, elmélet, a Matematikadidaktika programban kötelezően -, nem ismételtető

### **A tantárgy rövid leírása**

A matematikadidaktika tárgya, feladatai, rövid története.

A matematikatanulás alapjai, tanulásméletek: asszociációs tanulás (inger-reakció, megerősítés), információ elsajátítás (ismeretek hozzáadása a memória tartalomhoz), alakelmélet, ismeretek megkonstruálása (kognitív reprezentációk).

A tanulás három alapelve: Paivio duális elmélete, kognitív terhelés elmélete, aktív kognitív folyamat. Motiváció és metakogníció. A matematika tanítása. Ismeretelemek, mint a tanítás objektumai: tények, fogalmak, eljárások, stratégiák, meggyőződések, hozzáállás. A kognitív folyamatok fajtái: emlékezés, megértés, alkalmazás, elemzés, értékelés, alkotás.

Az oktatás tervezésének alapelvei: elosztott gyakorlás, visszajelzés, kidolgozott példák, irányított gyakorlás, ellenőrzés (tesztelés), tanulói magyarázatok, kérdezés, összegzés. Oktatási technikák. A tanulók matematikai ismereteinek ellenőrzése, értékelése. Fázisok: tanulók meglévő ismereteinek vizsgálata a tanítás elején; az oktatási folyamat során a tanulás irányítása, szükség esetén módosítása, lezáró ellenőrzés, értékelés. Formatív illetve összegző értékelés. Az ellenőrzés, értékelés különböző fajtái.

### **Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:**

Ambrus, A.(2004): Bevezetés a matematikadidaktikába. Eötvös Kiadó Ambrus Gabriella, Munkácsy Katalin, Szeredi Éva, Vásárhelyi Éva, Wintsche Gergely sk612B (2013): Matematika módszertani példatár. URL:tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/160.pdf

### **MAT/402 A matematikai problémamegoldás tanításának néhány alapkérdése**

6 kredit, gyakorlat, -, nem ismételtető

*Ambrus Gabriella*

### **A tantárgy rövid leírása:**

A probléma fogalma, különböző definíciói. A problémamegoldás folyamata: probléma-megoldási fázisok. (Pólya, Mason, Schoenfeld) Probléma-megoldási stratégiák: célirányos, fordított irányú megoldási folyamatok, szisztematikus próbálkozások. Megoldási technikák: analógia használata, szimmetria-elv, geometriai okoskodások az algebrában, eset-megkülönböztetés, invariancia elve. A kognitív terhelés elmélete és a matematikai problémamegoldás. Probléma-megoldási sémák, a sémák alapvető szerepe. Kognitív terhelést csökkentő lehetőségek: nyitott problémák, kidolgozott példák, hiányos megoldások kiegészítése, modalitási effektus, figyelem megosztás csökkentése. A problémamegoldási sémák témafüggősége. A sémák kialakításának fázisai: kidolgozott feladatok, gondosan megtervezett és végrehajtott gyakorlás állandó visszajelzéssel. A magyarországi matematikai probléma-megoldás tanításának hagyományai. Problem-solving for All? Differenciálás a matematikai problémamegoldás tanításában

### **Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:**

Pólya György: A gondolkodás iskolája, A problémamegoldás iskolája I-II, Indukció és Analógia  
J. Mason, L. Burton, K. Stacey: Thinking Mathematically. Addison Wesley 1985  
A. Schoenfeld: Mathematical Problem Solving. Academic Press New York, 1985

### **MAT/403 Kutatási módszerek a matematikadidaktikában**

6 kredit, gyakorlat, a Matematikadidaktika programban kötelezően -, nem ismételtető

Ambrus Gabriella - Rózsahegyiné Vásárhelyi Éva O0GO32

### **A tantárgy rövid leírása:**

A matematikadidaktikában felhasznált társtudományok és azok kapcsolata. Empirikus kutatási módszerek, mérési szempontok és eszközök. Az előadó által bemutatott és a hallgatók által készített konkrét példákon áttekintjük az alapséma egyes pontjait: a) a tudományos vizsgálat tervezésének és végrehajtásának lépéseit (problémafelvetés - a probléma modellezése és modellközpontú vizsgálata - a modellezési folyamat felülvizsgálata); b) a nemzetközi irodalomban

elvárt dokumentációs elemeket (elméletek, design, instrukciók, a vizsgálat lefolyása, az eredmények bemutatása, az eredmények értékelése)

A tematika bármely pontjához kapcsolható aktuális kutatás, pl. konkrét kutatásokban való részvétel, saját kutatások elemzése.

**Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:** Ambrus Gabriella, Munkácsy Katalin, Szeredi Éva, Vásárhelyi Éva, Wintsche Gergely sk612B: Matematika módszertani példatár URL:

tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/160.pdf

Falus Iván - Ollé János (2008.): Az empirikus kutatások gyakorlata. Adatfeldolgozás és statisztikai elemzés. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest,

Herber, H.-J. & Vásárhelyi, É. (2004). Empirische Forschung in der Didaktik der Mathematik und ihre wissenschaftliche Dokumentation. In: Parisot, K.J. & Vásárhelyi, É. (Hg.), Positionen – Mathematikdidaktik in Entwicklung. 65–90. URL:

<https://dl.dropboxusercontent.com/u/100162898/dissemin2004/dissemin2004.html>

Herber, H.-J. & Vásárhelyi, É. (2006). Kompetenzstreben und Kompetenzerwerb: Funktionale didaktische Fördermöglichkeiten durch Differenzierung und Individualisierung. Teaching Mathematics and Computer Science IV. I.

Vásárhelyi É.(2010): Empirikus kutatások a matematikadidaktikában. Előadás a Debreceni Egyetem Matematika és Informatika Didaktikai Doktori Iskola konferenciáján, 2010. január 21-23. URL:

<https://dl.dropboxusercontent.com/u/100162898/dissemin2004/dissemin2004.html>

Vásárhelyi Éva: Mi jogosítja fel a didaktikust arra, hogy tudományos tevékenységnek tekintse azt, amit csinál, és mivel érheti el, hogy mások is annak tekintsék? URL: <http://matserv.pmmf.h>

#### **MAT/404 Módszertani kutatások: változó feladatcultúra**

6 kredit, gyakorlat, -, nem ismételtető

**Ambrus Gabriella**

##### **A tantárgy rövid leírása:**

Folyamatorientált tanulás és kompetenciák. Régi és új feladattípusok és ezek kapcsolatai: kiemelten a gyakorlás, a hiba, a házi feladat didaktikai kérdései és kutatása a matematika tanulásában. Módszerek és tanítási irányzatok.

##### **Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:**

Büchter, A./Leuders, T.: Mathematikaufgaben selbst entwickeln, Cornelsen Scriptor, 2005

Wittmann, E.Ch.: Grundfragen des Mathematikunterrichtes, Vieweg, 1981

Varga, T.: Post -"New Math" Since 1963: Its Implementation as a Historical Process In: Development in School Mathematics Education Around the World. ed. Izaak Wirszup, Chicago, 1987 237-249

#### **MAT/405 Bevezetés a valóságközeli szituációk alkalmazásának didaktikájába**

6 kredit, gyakorlat, -, nem ismételtető

**Ambrus Gabriella**

##### **A tantárgy rövid leírása**

A tantárgy célkitűzése a matematikai modellezés és általában valóságközeli szituációk iskolai szerepének, oktatási kérdéseinek és didaktikai hátterének megismerése - elsősorban az európai szakirodalom és hagyományok alapján.

##### **A tantárgy részletes tematikája:**

- Fogalmak, feladattípusok és kategóriák, valamint ezek megjelenése a szakirodalomban.
- Valóságközeli feladatok, mint a változó feladatcultúra részei.
- Módszerek és tanítási irányzatok valós szituációkon alapuló feladatok alkalmazásához.
- Valós alkalmazások helye és szerepe a tanítási tanulási folyamatban. Tanári és tanulói szerepváltás.

- Tanulásszervezés- tananyagtervezés valós tartalmú alkalmazásokkal.
- Az értékelés kérdései valóságközeli feladatok készítése és megoldása során.
- A modellezési kompetencia és szintjei.
- Módszertani kutatások módszerei és lehetőségei valóságközeli feladatok iskolai alkalmazásával kapcsolatban.

#### **Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:**

- Ambrus G.: Valóságközeli matematika (munkafüzet és tanári segédkönyv CD), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2007
- Ambrus G.: Titanic a Balatonon - Modellezési feladatok matematikából (feladatgyűjtemény középiskolásoknak) – Műszaki Kiadó 2012
- Ambrus, G., Vancsó Ö.: The Application of Modelling Tasks in the Classroom - Why and How? With reflections on an EU teacher training course (Vancsó Ödön, Koren Balázs társszerzőkkel), In: TMCS, Debrecen, 2012, 10/2 231-244
- Engel, J.: Anwendungorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion, Springer, 2010
- Hinrichs, G.: Modellierung im Mathematikunterricht (Primar und Sekundarstufe), Spektrum, 2008

#### **MAT/406 Egyetemi matematika az iskolában**

6 kredit, elmélet, nem ismételt

Hegyvári Norbert – HENKAAF.ELTE

#### **A tantárgy rövid leírása**

A részletes tematika megtalálható [1]-ben. Az előadáson szó lesz számelméleti, algebrai, klasszikus analízisbeli, matematikai logikai (stb.) problémákról és ezek oktatási vonatkozásairól. Kutatási témaként is -, mostanában többen foglalkoztak e témával (az ELTE TTK Matematikai Intézetében TDK dolgozat is készült). E kérdéskörben PhD dolgozat készítése is indokolt; nemcsak e téma szisztematikus feldolgozása várat magára, hanem egy követő vizsgálat is: az iskolai oktatásban mennyire tudatos ez a fajta gondolkodás különböző korcsoportú oktatóknál.

#### **Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:**

[1] Hegyvári Norbert: Egyetemi matematika az iskolában (elektronikus jegyzet, 2013)

<http://hegyvari.web.elte.hu/Egyetemi.pdf>

[2] a „Journal for Research in Mathematics Education” folyóirat néhány száma (külföldi kitekintés)

[3] Tim Gowers' Weblog pedagógiai jellegű írásai:

<https://gowers.wordpress.com/2012/11/20/what-maths-a-level-doesnt-necessarily-give-you/#more-4693>

<https://gowers.wordpress.com/2012/07/07/a-trip-to-watford-grammar-school-for-boys/>

<https://gowers.wordpress.com/2009/06/08/why-arent-all-functions-well-defined/>

<https://gowers.wordpress.com/2008/08/16/just-do-it-proofs/>

[4] Tim Gowers: Matematika nagyon röviden, Typotex 2010

#### **MAT/407 Bevezetés a Bayes-statisztikába didaktikai szemmel**

6 kredit, elmélet, nem ismételt

Vancsó Ödön IC1OYJ

#### **A tantárgy rövid leírása:**

A valószínűség fogalmának különböző interpretációi (gyakorisági, propensity, klasszikus Laplace-féle). A szubjektív valószínűség, mint a Bayes-statisztikát megalapozó valószínűségfogalom. Az információ kifejezése valószínűség eloszlások formájában, priori és poszteriori eloszlás Bayes tétel, interpretációja és jelentősége a Bayes-statisztikában. Klasszikus matematikai statisztika elemei, hipotézisvizsgálat, hibafajták. Pont és intervallumbecslések. Problémák modellezése klasszikusan és Bayes-statisztika alkalmazásával. Az eredmények értékelése és összehasonlítása

**Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:**

- D. Wickmann: Bayes-statisztika (Eötvös Kiadó, 2000)
- W. Tschirk: Statistik: Klassisch oder Bayes Zwei Wege im Vergleich Springer Spektrum Berlin Heidelberg 2014
- Vancsó, Ö: Klasszikus és Bayes-statisztika a matematikadidaktikában PhD disszertáció, Debrecen 2004
- Fisher, A. R.: Design of Experiment Oliver and Boyd Edinburgh 1935
- Neyman, J.: „Mathematical Statistics and Probability”, Lectures and Conferences, U.S.D.A. Graduate School 1952
- Gigerenzer, G. (1993): The Superego, the Ego and the Id in Statistical Reasoning. in: A Handbook for Data Analysis in the Behavioral Sciences pp. 311-339 Lawrence Erlbaum Publisher Hillsdale New York, 1993
- Borovcnik, M.: Wechselspiel zwischen Intuitionen und Mathematik, BI Verlag Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich 1992
- Szabó, G.: A valószínűség interpretációi Typotex 2013
- Berger, J.O.: Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis, Springer: New York 1985
- von Mises, R.: Critical discussion of the foundation of Probability pp.66-103 in: Probability, Statistics and Truth. Dover Publication, New York 1957

**MAT/408 A klasszikus és Bayes-statisztika oktatási lehetőségei történeti háttérrel**

6 kredit, gyakorlat, nem ismételt

Vancsó Ödön IC10YJ

**A tantárgy rövid leírása:**

Az AMS 1997 augusztusi számában megjelenő Teacher Corner vita tanulmányozása és feldolgozása, beleértve későbbi reakciókat is, mint pl. E. Warmuth és D. Wickmann kéziratait.

**Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:**

- Dinges, H.; Rost, H.: Prinzipien der Stochastik. Teubner Studienbücherei: Stuttgart, 1982
- Gigerenzer, G. (at all.): The empire of Chance Cambridge University Press 1989
- The American Statistician (AMS) August 1997. Teacher Corner
- Moore D. S.: Bayes for Beginners Some hesitate in: AMS Vol. 51, No. 3. 254-260., 1997
- Wickmann, D.: Eine Antwort auf E. Warmuths Beitrag zu „Bayes for Beginners” von D.S. Moore Manuskript 2000
- Borovcnik, M.; Engel, J.; Wickmann, D. eds.: Anregungen zum Stochastikunterricht Verlag Franzbecker: Hildesheim, Berlin 2001
- H. S. Mignon, H.S. - Gamermann, D.: Statistical Inference An integrated approach Arnold: London-New York-Sydney-Auckland 1999

**MAT/409 Kombinatorika és valószínűség-számítás tanítása a középiskolában**

6 kredit, elmélet, nem ismételt

Gosztonyi Katalin – Vancsó Ödön

**A tantárgy rövid leírása:**

Valószínűség-számítás-tanítási koncepciók. Szerencsejátékok és az esélyek latolgatása, valószínűségi alapfogalmak. Relatív gyakoriság és valószínűség. Logikai modell, kombinatorika, mint a valószínűség „szolgáló leánya”. Önálló területként kombinatorika és a kombinatorikus gondolkodás (módszerek, gondolatok eljárások, mechanikus sablonok és formulák helyett [mellett]). Középiskolai tankönyvek elemzése. Nemzetközi áttekintés, hol milyen felépítést használnak. Alapvető eltérések az angolszász és a kontinentális tradíciók között. Általános iskola és középiskola átmenetei a két témában.

**Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:**

Nemetz T.- Bognár K. –Tusnádý G.: Játék a véletlennel

Rényi, A.: Levelek a valószínűségről in: Ars Mathematica, Typotex 2003.

Nemetz T.: Valószínűségszámítás a speciális matematikai osztályok számára Tankönyvkiadó 1983

H. Wolpers - S. Götz: Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II Band 3 Didaktik der Stochastik

Lovász L. –Pelikán J. – Vesztergombi K.: Diszkrét matematika Tankönyvkiadó 1990, Typotex 2003

Lovász L.: Kombinatorikai problémák és feladatok. Typotex. Bp., 1999

Vilenkin: Kombinatorika, Műszaki Kiadó 1970

Hajnal Péter: Elemi kombinatorikai feladatok. Polygon, Szeged, 1997

Matematika tankönyvek 9-12.

**MAT/410 A matematika filozófiája és megjelenése a matematika didaktikában**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

Gosztonyi Katalin - Vancsó Ödön IC10YJ

**A tantárgy rövid leírása:**

Matematika, mint tudomány, a matematika különböző megalapozásai. XIX és XX. századi változások. Magyar gondolkodók hozzájárulása a matematika filozófiájához. Bolyai János és a nem-euklidészi geometriák forradalma. Három nagy irányzat bemutatása a XX. századból (formalizmus, intuicionizmus és konstruktivizmus) és következményeik a matematikaoktatására. Frege, Russel és a logikai megalapozás. T. Kuhn és K. Popper munkásságának következményei. Lakatos I. matematika képe a Bizonyítások és cáfolatok című munkája lapján. „Belief” elméletek a matematikadidaktikában.

**Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:**

P. Davies-R. Hersch: A matematika élménye. Gondolat,1989

Rényi A.: Dialógusok a matematikáról in: Ars Mathematica Typotex 2005

R. Hersch: What is mathematics, really? Vintage 1997 magyarul A Matematika természete Typotex 2000

Staar Gy.: A megélt matematika Gondolat 1990

Trosztnyikov: Konstruktív módszerek a matematikában. Gondolat 1981

Lakatos, I.: Bizonyítások és cáfolatok Gondolat 1981, Typotex 1998

Popper, K.: A tudományos kutatás logikája Európa Kiadó1997

Pólya, Gy.: A plauzibilis következtetés Gondolat 1989

**MAT/411 Komplex matematikaoktatási és Varga Tamás I.**

6 kredit, elmélet, a Matematikadidaktika programban kötelezően -, nem ismételtető

Vancsó Ödön IC10YJ

**A tantárgy rövid leírása:**

Az 1960-70-es évek magyar matematikatanítási reformkorszak tantervi és szaktudományi 20. századi előzményei. A népis-kolai Szám-tan-mértantól az 1978-as általános iskolai tanterv Matematika tantárgyáig. A komplex matematikatanítási (KMK) kísérlet szakmai és módszertani forrásai (Bourbaki csoport, Pólya Gy., Dienes Z.). A KMK kísérlet tanterve. Az alsó tagozattól a 8. osztályig egységes öt fő témakör: Halmazok és logika; Szám-tan, algebra; Függvények, sorozatok; Geometria, mérés; Kombinatorika, valószínűség-számítás, statisztika. A KMK tanterve megfogalmazta a korábbi iskolai anyagokhoz képest nagy-mértékben új tartalom megvalósításához szükséges új módszertani alapelveket is. A KMK-ra épülő új tanterv bevezetése 1978-ban, a megvalósítás eredményei és nehézségei az 80-as és 90-es években. A tanterv alapján készült Tankönyvek és Munkalapok tartalmi

és módszertani elemzése. A komplex matematikára épülő középiskolai tantervi kísérlet tananyaga, tankönyvei, dokumentumai. A komplex matematikatanítás hatása a tanítóképzésre és a főiskolai matematika tanárképzésre. Az 1960-70-es magyar matematikatanítási reformok nemzetközi vonatkozásai, az alapelvek széleskörű terjedése.

**Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:**

Kapcsolat (A komplex matematikai kísérlet folyamatát bemutató folyóirat) OPI

Útközben (a középiskolai matematikatanítási kísérlet) OPI, 1974-1985

Varga T.: A matematika tanításának várható fejlődése „A matematikatanítás módszertanának néhány kérdése” című kötetben. Tankönyvkiadó (TK) Budapest, 1972

Az 1978-as tantervre épülő Munkalapok és Tankönyvek („kockás könyvek”), Tanári kézikönyvek és Tantervi útmutatók 6-7-8. osztály. TK Budapest

Varga T.: A korszerű matematikatanítás felé. Öt tanulmány „Néhány hazai és külföldi kísérlet” kötetben Budapest, TK, 1972.

Varga T., Radnainé Szendrei J.: Az általános iskolai nevelés és oktatás terve. Matematika 6. osztály. Budapest, TK, 1979.

Varga T., Radnainé Szendrei J.: Az általános iskolai nevelés és oktatás terve. Matematika 7. osztály. Budapest, TK, 1981.

Varga T., Radnainé Szendrei J.: Az általános iskolai nevelés és oktatás terve. Matematika 8. osztály. Budapest, TK, 1984.

**MAT/412 Komplex matematikaoktatási és Varga Tamás II.**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

Vancsó Ödön IC10YJ

**A tantárgy rövid leírása:**

A komplex matematikatanítási kísérlet (KMK) és Varga Tamás munkásságának hatása, az alap gondolatok megjelenése a 21. századi magyar matematikatanításban. A KMK, az 1978-as általános iskolai tanterv és a NAT összehasonlítása, az azonosságok és az eltérések elemzése. A 21. századi didaktikai és módszertani trendek gyökereinek megjelenése a komplex matematikatanítás módszertani alapelveiben: fejlesztésközpontúság, fogalomépítés, érlelés, a témák szoros összefüggése, egységes, komplex épülése. Egyéni fejlesztés, és életkori különbségek, differenciálás. A konkrét cselekvésre, tevékenységre épülő absztrakció, gyakorlati, valós életbeli problémák feldolgozása, a motiváció fontossága. A kornak megfelelő információs eszközök felhasználása, a módszerek és munkaformák változatossága, a csoportos tevékenység, a játék hatékony alkalmazás a tanulásban, a vita és a tévedés szabadsága. Mindezek hogyan illeszthetők a középiskolai matematikatanítás követelményeihez, hogyan alkalmazhatók az érettségire, a továbbtanulásra való felkészítés során? A régi elvek feltárása és tovább fejlesztése mennyiben segítheti egy új modern középiskolai igényes matematika tananyag kidolgozását? A felvetett kérdésekre a résztvevő hallgatók közreműködésével a szemináriumi munka során keressük a válaszokat.

**Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:**

A komplex matematikatanítási kísérlet tanterve.

A középiskolai matematikatanítási kísérlet tankönyvei.

Munkatankönyv a középiskola 1-4. osztályai számára, alap és fakultatív tantervhez Tankönyvkiadó Bp.

A NAT 1995 és átdolgozása 2012

Érettségi követelmények

SuliNova: Matematika 1-12 évfolyam. 2008.

Császár Ákos: Varga Tamás élő matematikája. Matematikatanár-képzés Matematikatanár-továbbképzés 1.

Calibra Kiadó 1993

Pálfalvi Józsefné: A NAT és Varga Tamás komplex matematikája. Matematikatanár-képzés  
Matematikatanár-továbbképzés 4.  
Calibra Kiadó 1997

### **MAT/413 A matematikatudomány története I.**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

Gosztonyi Katalin

#### **A tantárgy rövid leírása:**

A kurzus alapvetően eszmetörténeti jellegű; sporadikus tudás közvetítése helyett hat-nyolc nagy – évszázadokon, olykor évezredekben átívelő – eszmetörténeti vonulat ismertetését és mélyebb megértését jelenti. (Emellett másodlagosan teljesíti az elterjedt kronologikus, kumulatív szemléletű vagy anekdotikus jellegű matematikatörténetírás néhány feladatát is.) Az eszmei vonulatok kiválasztásánál egy újszerű vezérelv érvényesül: előtérbe kerülnek azok a területek, amelyekből bizonyos, az oktatásban elterjedt és a mai napig fennmaradt, évszázadok, sőt évezredek folyamán megmerevedett és anakronisztikusan eltorzult, didaktikailag hátrányos fogalmi és nyelvi hagyományok indultak ki.

(További részleteket lásd a megadott kötelező olvasmány bevezető ismertetésében.)

A kurzus tartalmilag, módszertanilag és követelményeiben is magasabb szintű, mint az MA-vagy az osztatlan tanárképzés azonos című kurzusa (ahol a „füzetek” is csak részben vannak kihasználva), tehát nem pótolható azzal.

#### **Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:**

Deák Ervin EWOHTB: A matematikatudomány története, 1.–5. füzet

<http://mathdid.elte.hu/html/mscmattudtoert.html>

Az egyéni érdeklődés irányát is figyelembe véve, szemelvények angol, magyar, német stb. elsővonalbeli szerzőktől és történeti forrásokból.

### **MAT/414 A matematikatudomány története II.**

6 kredit, elmélet, kötelező, nem ismételtető

Gosztonyi Katalin

#### **A tantárgy rövid leírása:**

A kurzus alapvetően eszmetörténeti jellegű; sporadikus tudás közvetítése helyett hat-nyolc nagy – évszázadokon, olykor évezredekben átívelő – eszmetörténeti vonulat ismertetését és mélyebb megértését jelenti. (Emellett másodlagosan teljesíti az elterjedt kronologikus, kumulatív szemléletű vagy anekdotikus jellegű matematikatörténetírás néhány feladatát is.) Az eszmei vonulatok kiválasztásánál egy újszerű vezérelv érvényesül: előtérbe kerülnek azok a területek, amelyekből bizonyos, az oktatásban elterjedt és a mai napig fennmaradt, évszázadok, sőt évezredek folyamán megmerevedett és anakronisztikusan eltorzult, didaktikailag hátrányos fogalmi és nyelvi hagyományok indultak ki.

#### **Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:**

Deák Ervin EWOHTB: A matematikatudomány története, 1.–5. füzet

<http://mathdid.elte.hu/html/mscmattudtoert.html>

Az egyéni érdeklődés irányát is figyelembe véve, szemelvények angol, magyar, német stb. elsővonalbeli szerzőktől és történeti forrásokból.

### **MAT/415 Az indirekt genetikus módszer I. Logaritmus, valós-szám-fogalom**

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Vancsó Ödön

#### **A tantárgy rövid leírása:**

A logaritmus előtörténete (proszaferézis), korai története (Eulerig) és klasszikus korszaka (a valós számtest megalkotásáig) a fogalomépítkezés tekintetében lényegesen eltér a végül is

kikristályosodott logaritmus-fogalomtól. Ennek analizálása alapot szolgáltat egy olyan fogalomépítkezéshez – az indirekt genetikus princípium és a „fundamental idea” princípium értelmében –, amely nem feltételezi eleve a valós számtest alapos ismeretét (s ezzel elkerül egy súlyos, tradicionális didaktikai csapdát), viszont rendkívül instruktív munkát és tájékozódást kíván a tanulóktól a racionális számok, természetes számok és tizedes törtek körében; végül is utat mutat a valós-szám-fogalomhoz is.

Matematikai elemzés; tanulslélektani elemzés; részletes didaktikai kidolgozás a gyakorlati oktatás számára; természetes, didaktikailag értékesíthető kapcsolat az elemi információelmélettel; bel- és külföldi oktatáskísérletek az iskolai matematikában és a tanárképzésben. Az említett princípiumok megismerése e konkrét koncepció tükrében.

**Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:**

Egyénileg válogatott angol és német nyelvű szemelvények vezető matematikatörténészekről és történeti forrásokból a valós számtest, az analízis, a függvényegyenletek, a prosztaferézis (a goniometria része) története köréből, továbbá Deák Ervin EWOHTB: A matematikatudomány története c. füzetekből (<http://mathdid.elte.hu/html/mscmattudtoert.html>).

**MAT/416 Az indirekt genetikus módszer II. Eudoxosztól Dedekindig, valósszám-fogalom**

6 kredit, elmélet, nem ismételhető

Gosztonyi Katalin

**A tantárgy rövid leírása:**

A címben jelzett princípium mellett a „fundamental idea”-princípium jegyében is tanulmányozzuk azt a nem egyenesvonalú és nagyon küzdelmes történetet, amelynek az eszmei elemei a szintetikus és a mértékgeometria szembenállása a szakaszarány és a szakaszarányegyenlőség problematikájában, az inkommensurabilitás fölfedezése által okozott megrendülés Eudoxosz-féle „kitérő”, mégis termékeny feloldása, a végtelen tizedes törtek évezredes megalapozatlan „használata”, végül az eudoxoszi arányelmélet átváltozása a Dedekind-szeletek elméletévé. Különös figyelmet fordítunk azokra a negatív jelenségekre és folyamatokra, amelyek – erős hagyománnyá merevedve – káros nyomokat hagytak az oktatásban mind a mai napig.

**Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:**

Egyénileg válogatott angol és német nyelvű szemelvények vezető matematikatörténészekről és történeti forrásokból, továbbá Deák Ervin EWOHTB: A matematikatudomány története” füzetéből (<http://mathdid.elte.hu/html/mscmattudtoert.html>).

**MAT/417 Az indirekt genetikus módszer III. Mérés, mérték és integrál**

6 kredit, elmélet, nem ismételhető

Gosztonyi Katalin

**A tantárgy rövid leírása:**

E területek eszmetörténetének folyamatosan bizonyos mély feszültségek adják a gerincét, például a szintetikus geometria és a mértékgeometria között és a megalapozatlan geometriai mértékfogalmak – sokszor nem is sikertelen – használata és a korrekt valós-szám-fogalom (illetve az ahhoz szükséges strukturális matematikai gondolkodás) hiánya között. A görög matematika kezdeteitől a 19. század végéig ívelő történetnek olyan „kitérői” is vannak, mint a 17. századi misztikus „infinitezimálisok elmélete” amelynek a technikája – de nem az alapelve – bizonyos korlátok között utólag igazolható a Riemann-integrállal. Ma ez a technikát a Cavalieri-módszernek nevezzük, s ez az iskolai matematikától sem idegen. A korrekt konvergenciafogalmakért folytatott sok évszázados küzdelem olyan számszerű-terület-mérési eljárásokhoz vezetett, mint a Riemann-integrál és a Jordan-Peano-mérték; az integrálhatóság kérdései pedig a modern mértékelmélet kialakulását indukálta. A történeti nézőpont kiemelése a mélyebb matematikai megértést szolgálja. Didaktikailag a kurzus olyan konstrukciókat nyújt (kidolgozva vagy nyílt kutatási lehetőségekre kitekintve), amelyeknek indirekt történeti indítékai vannak.

**Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:**

Egyénileg válogatott angol és német nyelvű szemelvények vezető matematikatörténészekről és történeti forrásokból, továbbá Deák Ervin EWOHTB: A matematikatudomány története” füzetéből (<http://mathdid.elte.hu/html/mscmattudtoert.html>).

### **MAT/418 Az indirekt genetikus módszer IV. A legjobb lineáris approximáció mint „fundamental idea”**

6 kredit, elmélet, -, nem ismételtető

Gosztonyi Katalin

#### **A tantárgy rövid leírása:**

Ez a kurzus olyan didaktikai konstrukciót mutat be a differenciálszámítás fölépítésére az iskolai matematikában, amely – hosszú (mert kis lépésekből összetett) – fogalmi fejlődési utat épít. Ennek vezérlő problémája nem a pillanatnyi növekedés, hanem az érintő fogalmának meg-konstruálása, vezérlő eszméje pedig a legjobb lineáris approximáció. Az utóbbi persze kezdetben nem ebben a fogalmi szerkezetben, hanem azon a szemléletes és természetes módon jelenik meg, ahogyan Euklidész tekintette a körérintőt (ezt azután több mint 2000 évig nem vették figyelembe), s csak igen lassan emelkedünk arra a szintre, ahol eléggé korrekt és sok konkrétummal élővé tett képet alkothatunk az „approximáció”, a „lineáris” és a „legjobb” jelentéséről ebben a kapcsolatban. A megismerés egy hosszú fázisa az elemi (vagyis iskolai) algebra síkján mozog, beépítve annak fontos szokásos, ill. kívánatos részeit. A tanulók munkája nagyrészt magának a matematikai apparátusnak a felépítésére irányul, ami jelentősen eltér a szokásos „feladatmegoldás”-tól. A legfontosabb alapgondolat Lagrange alapgondolata (a konvergencia-fogalmak elkerülésére) az „algebraizált” analízis kidolgozásánál, de hatványsorok helyett polinomokra vonatkoztatva; mi azonban éppen a konvergencia-gondolkodáshoz vezető utat építjük ezzel.

#### **Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:**

Egyénileg válogatott angol és német nyelvű szemelvények vezető matematikatörténészekről és történeti forrásokból, továbbá Deák Ervin EWOHTB: A matematikatudomány története” füzetéből (<http://mathdid.elte.hu/html/mscmattudtoert.html>).

### **MAT/419 Média és matematika**

6 kredit, gyakorlat, -, nem ismételtető

Rózsahegyiné Vásárhelyi Éva O0GO32

Korándi József UBB74L

#### **A tantárgy rövid leírása:**

A fogalmi reprezentáció szintjeinek megfelelő médiaválasztás szempontjai, jó és rossz példák elemző bemutatása. Matematikai tartalmak feldolgozása konkrét példákon keresztül. Médiumok vizsgálata és összehasonlítása főleg a matematikai tartalmak megjelenítése szemszögéből. A matematikáról, matematikusokról és matematika tanárokról alkotott kép. A tematika bármely pontjához kapcsolható aktuális kutatás, pl. a hagyományos és modern eszközök és tartalmak integrált alkalmazásának vizsgálata a matematikaoktatásban, vagy a matematikáról, matematikusokról és matematika tanárokról alkotott kép vizsgálatának lehetőségei és eredményei, már elvégzett vizsgálatok eredményeinek elemzése.

#### **Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:**

Ambrus András 1995. Bevezetés a Matematikadidaktikába. Eötvös Kiadó, javított kiadás 2004.

Ambrus Gabriella, Munkácsy Katalin, Szeredi Éva, Vásárhelyi Éva, Wintsche Gergely sk612B: Matematika módszertani pldatár URL: [tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/160.pdf](http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/160.pdf)

Korándi, J. 2012. Matematika és a média kapcsolatának vizsgálata. PhD értekezés <https://dea.lib.unideb.hu/dea/handle/2437/133215>

M. Mead, R. Metraux. 1957. The image of the scientist among high school students: a pilot study, Science, 126(3270), pp. 384–390.

- D. W. Chambers. 1983. Stereotypic images of the scientist: The Draw-A-Scientist Test. *Science Education*, 67(2):255–265.
- L. Flick. 1990. Scientist in residence program improving children's image of science and scientists. *School Science and Mathematics* 90, pp. 204–214.
- C. L. Mason, J. B. Kahle, A. L. Gardner. 1991. Draw-A-Scientist Test: Future Implications. *School Science and Mathematics* 91, pp. 193–198.
- J. S. Berry, S. H. Picker. 2000. Your pupils' images of mathematicians and mathematics. *Mathematics in School*. 29:24–26.
- C. R. Barman. 1996. How Do Students Really View Science and Scientist? *Science and Children* 34(1), pp.30–33.

### **MAT/420 Tankönyv és taneszköz fejlesztés**

#### **Development of study tools and textbooks**

6 kredit, gyakorlat, ismételhető

Wintche Gergely

#### **A tantárgy rövid leírása:**

A taneszközök és tankönyvek helye és szerepe az oktatásban. Mit tekintünk taneszköznek? Új és régi trendek a taneszközök vonatkozásában. Új média és technikai lehetőségek. A tankönyvkutatás általános alapelvei. A tankönyvkutatás résztvevői. Nemzetközi tankönyvkutatással foglalkozó szervezetek, (pl. IARTEM). A tudás, illetve az ismeret fogalma, koncepcionális változások. Képességek és készségek fogalma, fejlesztési követelmények. Tartalmi és nyelvi követelmények áttekintése.

A NAT és a kerettantervek áttekintése. Egy ismeretanyag szabadon választott és egyeztetett szempontrendszer szerinti feldolgozása és előállítás, összehasonlítása más, létező tananyagokkal. Mi lenne szükséges megbízható hatékonysági, beválási vizsgálatokhoz?

#### **Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:**

A tankönyvvé nyilvánítás folyamata. 2014. OH szempontrendszerei

[http://www.oktatas.hu/kozneveles/tan-konyv/tankonyvve\\_nyilvanitas/engedelyezett\\_folyamata](http://www.oktatas.hu/kozneveles/tan-konyv/tankonyvve_nyilvanitas/engedelyezett_folyamata)

Csapó, B. 2008. A taneszközfejlesztés megalapozása: a tudásról való tudás. In: Simon, M. (szerk.) Tankönyvdialógusok. Oktatókutató és Fejlesztő Intézet, Budapest

Gordon György, J., Halmos, M., Munkácsy, K., Pálfalvi, J. 2007. Szerk. A matematikatanítás mestersége – Mestertanárok a matematikatanításról. Gondolat Kiadó, Budapest

Halász Gábor: A pedagógiai rendszerek általános hatás- és beválásvizsgálati rendszere [http://halaszg.ofi.hu/download/NTK\\_tanulmany\\_rendszer.pdf](http://halaszg.ofi.hu/download/NTK_tanulmany_rendszer.pdf)

Ivic, I. Antic, S. and Pešikan, A. (szerk.) 2013. Textbook Quality: A Guide to Textbook Standards, V&R unip-ress

Kerettantervek az OFI és a sulinova honlapon <http://kerettanterv.ofi.hu/>

Mikk, Jaan: Textbook: Research and Writing, Frankfurt/M., Berlin, Bern, Bruxelles, New York, Oxford, Wien, 2000. 426 pp.

Pála, K. 2008. A kompetencia alapú oktatás és a taneszközök. In: Simon, M. (szerk.) Tankönyvdialógusok. Oktatókutató és Fejlesztő Intézet, Budapest

Simon, M. (szerk.): Tankönyvdialógusok, OFI, 2008

Kísérleti matematika tankönyvek, <http://etananyag.ofi.hu/tantargyak/matematika>

### **MAT/421 További fejezetek a sztochasztikus analízisből**

6 kredit, elmélet, nem ismételhető

Prokaj Vilmos, AJSGLE

### **Tárgy rövid leírása:**

A hallgatóság érdeklődésének megfelelően az alábbi témák valamelyike:

Sztochasztikus differenciálegyenletek, lokális idő, martingál probléma, erős és gyenge unicitással kapcsolatos tételek.

Valószínűségi mértékek gyenge konvergenciája a D téren, diszkrét idejű modellek folytonos limesze.

Malliavin kalkulus, pénzügyi alkalmazások.

Standard filtráció, Vershik kritérium, split-word process, Tsirelson brick konstrukciója..

Bármely más kurrens, sztochasztikus analízishez köthető téma.

### **MAT/422 Pénzügyi kockázatok elemzésének matematikája**

6 kredit, elmélet, nem ismételt

Márkus László, XLAPMO

### **Tárgy rövid leírása:**

A tárgy keretén belül eszközár volatilitás, hitel valamint likviditás kockázatok matematikai modelljeinek felépítését, a modellek identifikációs és kalibrációs lehetőségeit, az ezek alapján történő kockázati prémium meghatározását illetve származtatott termékek árazását tárgyaljuk.

Közismert, hogy a pénzügyi eszköz árának ingadozása, volatilitása határozza meg alapvetően a belőle származtatott termékek árát. E volatilitás jellemzőinek, pl. generáló eloszlásának identifikálása és ennek alapján egy megfelelő modell gyors kalibrációja nehéz és nem lezárt feladat, amelyet bizonyos esetekben pl. többdimenziós GARCH, diszkretizált Heston vagy Bates modellek, vizsgálunk meg.

A hitelkockázati esemény (csőd) vizsgálatának két megközelítési formája a struktúrált és a redukált modellezés. Az struktúrált megközelítés a csőd idejét egy adaptált sztochasztikus folyamat előrejelezhető szintelérési idejének tekinti (pl. a vállalat kötelezettségeinek névértéke meghaladja az eszközeinek értékét). A módszertan előnye, hogy a vállalatnál elérhető információkra épül, amely folytonos idejű figyelembevételét jelenti eszközei értékének és a forrásainak ("teljes információ"), de két jelentős problémája, hogy egyrészt az értékfolyamat nem (teljeskörűen) megfigyelhető; másrészt rövid lejáratnál az előrejelezhető csőd idő miatt a spreadeknek 0-körüli értéket kellene felvenni és ez inkonzisztens a piacon megfigyeltekkel. Ezzel szemben a redukált modellek a csődöt egy ugró folyamat (gyakran Cox-folyamat) első ugrásának feltételezik, és mivel ez egy teljesen elérhetetlen megállási idő, így elkerüljük az előbb említett problémát a rövid lejáratú termékeknél. Másfelől azonban nincs meg a szoros kapcsolat a vállalat eszközeinek értéke és a folyamat között, mivel a redukált modellek a vállalatról csak a piacon közvetlenül elérhető információkat használják fel, és ez az előzőleg említettek töredékét jelenti csupán. A redukált modellek azonban vizsgálhatók struktúráltként, más filtrációk mellett.

A piaci likviditási kockázat annak a kockázatát jelenti, hogy a piaci szereplő nem, vagy csak jelentős veszteséggel képes értékesíteni eszközeit. A piaci likviditással foglalkozunk, ami azt mutatja, hogy milyen könnyen lehet eszközöket eladni (megvenni) vagy azt, hogy mennyire lehet egy tranzakciót úgy végrehajtani, hogy az önmagában ne okozzon jelentős árelmozdulást. A modellek első csoportjába olyanok tartoznak, amelyek azt tételezik fel, hogy a befektető csak marginális volumenben kereskedik, így a különböző eszközök árai a tranzakció nagyságától, és az ajánlati könyv mélységétől függenek, de az ár azonnal visszatér egy egyensúlyi értékre. A második kategóriába olyan ún. "nagy kereskedői" modellek tartoznak, amelyekben azzal a feltételezéssel élünk, hogy a kereskedő szignifikáns tételekben ad-vesz, így hosszú távon is eltéríti a piaci árat az éppen aktuálistól, azaz a tranzakció egyfajta permanens árhatást generál. A pénzügyi termékek árhatás melletti árazásának lehetőségeit vizsgáljuk meg.

### **MAT/423 Áringadozások**

12 kredit, elmélet, gyakorlat, nem ismételt

Zempléni András, FSGMPN

### **Tárgy rövid leírása:**

Valószínűségszámítási eszközök (momentumok, kumulánsok, karakterisztikus függvény, néhány fontos eloszlás);

Extrémumok statisztikája, Fisher-Tippet-tétel, küszöb fölötti csúcsok módszere, alkalmazás a kockázatkezelésben;

A központi határeloszlás-tétel, stabilis eloszlások, vonzási tartományok, centráló és normáló konstansok megválasztása, a konvergencia sebessége, nagy eltérések;

Véletlen mátrixok, a Wigner-féle félkör - tétel, Wishart-mátrixok, Marchenko-Pastur-tétel

Többváltozós eloszlások, kopulák;

Árfolyamingadozások valóságos piacokon, empirikus „stilizált” tények, nem-stacionárius viselkedés (ARCH-GARCH-modellek);

Portfóliók és kockázati mértékek, elliptikus eloszlások, portfólió optimalizálás, a kockázatotott érték, variancia mint kockázati mérték, abszolút eltérés, expected shortfall, maximális veszteség, koherens és spektrális mértékek;

A pénzügyi szabályozás elemei (szabályozói mértékek);

A portfólió-feladat megoldásának instabilitása, divergens becslési hiba, fluktuáló súlyok, zajsűrítés, Cholesky-faktorizáció; szimulált piacok.

Ajánlott irodalom:

G. Szegő: Risk Measures for the 21st Century, Wiley, 2004

A. J. McNeil, R. Frey és P. Embrechts: Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools, Princeton University Press, 2005

J.-Ph. Bouchaud és M. Potters: Theory of Financial Risks, Cambridge University Press, 2000

### **MAT/424 Elliptikus parciális differenciálegyenletek numerikus módszerei és alkalmazása I.**

9 kredit, elmélet, nem ismételt

Karátson János B7D32Y

Tárgy rövid leírása:

Véges differenciák módszere Poisson-egyenletre, ill. általános peremértékfeladatokra. Konstrukció és konvergencia.

Végelem-módszer: elméleti alapok, konstrukció, interpolációs és konvergenciabecslések.

A diszkrétizált feladatok iterációs megoldása.

A többrácsos (multigrid-)módszer. Konvergenciája végelem-módszer mellett.

Irodalom: Horváth R.–Izsák F.–Karátson J.: Parciális differenciálegyenletek numerikus módszerei számítógépes alkalmazásokkal, 2013.

[http://www.cs.elte.hu/~karatson/pdnm\\_vegleges\\_2013.pdf](http://www.cs.elte.hu/~karatson/pdnm_vegleges_2013.pdf)

### **MAT/425 Elliptikus parciális differenciálegyenletek numerikus módszerei és alkalmazása II.**

6 kredit, elmélet, nem ismételt

Karátson János B7D32Y

Tárgy rövid leírása: ez a tárgy folytatása az „Elliptikus parciális differenciálegyenletek numerikus módszerei és alkalmazása” c. tárgynak.

Témakörök:

A végelem-módszer magasabbrendű interpolációs és konvergenciabecslései.

A végelem-módszer alkalmazása negyedrendű ill. nem szimmetrikus másodrendű Dirichlet-feladatokra.

A diszkrét maximum-elv.

Nyeregpon-t-feladatok, Uzawa-algoritmus.  
Nemlineáris elliptikus feladatok, megoldásuk vége-selem-módszerrel.

Irodalom: Horváth R.–Izsák F.–Karátson J.: Parciális differenciálegyenletek numerikus módszerei számítógépes alkalmazásokkal, 2013.  
[http://www.cs.elte.hu/~karatson/pdnm\\_vegleges\\_2013.pdf](http://www.cs.elte.hu/~karatson/pdnm_vegleges_2013.pdf)

### **MAT/426 Kamatlábmodellek**

9 kredit, elmélet, nem ismételtető  
Michaletzky György, K7EFIC

#### **Tárgy rövid leírása:**

Kötvények és kamatok,  
Határidős ügyletek,  
Arbitrázsmentes árazás, számláló folyamat  
Egyfaktoros kamatmodellek a rövidkamatlábra (Vasicek, Cox-Ingersoll-Ross, Hull-White, ...), közelítő trinomiális fa konstrukciója  
Kétfaktoros rövidkamatláb modellek, volatilitás és korrelációstruktúra, kalibrálás, közelítő binomiális fa konstrukciója  
Heath-Jarrow-Morton modell, a rövidtávú és a határidős kamatráták kapcsolata.  
Kamatrátán alapuló származékos termékek

#### Ajánlott irodalom:

D. Brigo, F. Mercurio, Interest rate models: theory and practice, 2001, Springer Verlag  
T. Björk, Arbitrage theory in Continuous Time, Oxford University Press, 1998.  
M. Baxter, A. Rennie, Financial Calculus, Cambridge University Press, 1996.  
Gerencsér L., Michaletzky Gy. Rásonyi M. Vágó Zs. Kamatelmélet, egyetemi jegyzet, ELTE 2004.

### **MAT/427 Pénzügyi folyamatok elemzése 2.**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető  
Márkus László, XLAPMO

#### **Tárgy rövid leírása:**

Sztochasztikus volatilitásmodellek (Heston). Implikált volatilitás, smile. Itó diffúziók. Doob-Meyer felbontás. Folytonos Markov folyamatok, átmenetvalószínűség, infinitézimális operátor. Dynkin-Kinney feltétel és lokalitás. Feynman-Kac (F-K) formula. A Black-Scholes diffegyenlet a F-K formulából. Optimális szinteléréses megállítási, amerikai opciók árazása. Snell burkoló és az Amerikai opciók.  
Lévy folyamatok (LF). Összetett Poisson folyamat. Lévy mérték, ugrásmérték. Lévy-Itó és Lévy-Hincsin reprezentációk. Ugró diffúzió. Korlátos változású LF, szubordinátor. Markov LF, infinitézimális generátor. Martingál LF. Eszközármodellek exponenciális LF-okkal Merton-, Kou-, Bates-modell. Végtelen aktivitású modellek, Átskálázott Brown mozgás-üzleti idő: A Variance Gamma és Normal Inverse Gaussian modell. Itó és F-K formula LF-ra. Opció értéke és parciális integro-diffegyenletek. Amerikai opciók ugró eszközár esetén.

#### Ajánlott irodalom:

Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve: Methods of Mathematical Finance, Springer, 1998.  
Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd edition 1991. Springer  
Száz János: Tőzsdei opciók, Tanszék Kft., Budapest, 1999.  
A. N. Shiryaev: Essentials of Stochastic Mathematical Finance. World Scientific, Singapore, 1999.  
Rama Cont and Peter Tankov: Financial Modelling with Jump Processes, Chapman and Hall, 2004.

**Title of Course:** Stochastic processes of mathematical finance 2

**MAT/428 Speciális sztochasztikus folyamatok**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

Michaletzky György, K7EFIC

**Tárgy rövid leírása:**

Felújítási folyamatok, felújítási egyenlet. A felújítási folyamat aszimptotikus viselkedés (1 valószínűségű konvergencia, határeloszlás). A felújítási függvény aszimptotikus viselkedése, Blackwell-tétel.

Elágazó folyamatok. Diszkrét idejű elágazó folyamatok, generátor függvény. Folytonos idejű elágazó folyamatok, a kihalás valószínűsége, határeloszlás-tételek.

Pontfolyamatok. A Poisson-folyamat, stacionárius pontfolyamat, jelölt pontfolyamat. A pontfolyamatok által meghatározott véletlen mérték. Pontfolyamat intenzitása, Campbell mérték. Palm eloszlás, a Palm-mérték és a stacionárius eloszlás kapcsolata. Campbell-Little-Mecke formula. Wiener-folyamat konstrukciója. Trajektóriák egyszerű tulajdonságai. Kvadratikus variáció, a trajektóriák Hölder-folytonossága.

Ajánlott irodalom:

Karlin-Taylor: Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe, Műszaki Könyvkiadó

Bacelli-Bremaud: Elements of queueing theory, Springer-Verlag, 1991

**MAT/429 Dinamikai rendszerek és fraktálok feladatmegoldó szeminárium**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

Buczolich Zoltán, RMJ8LE

Tárgy rövid leírása:

A kurzus célja a feladatmegoldáson keresztül a dinamikus rendszerekhez kapcsolódó alapvető fogalmak, példák megértése. A főként az előadó által tartott Dinamikus rendszerek tárgyat igyekszik feladatanyaggal kiegészíteni, így ideális esetben olyan hallgatókhoz szól, akik ezt az elméleti kurzust már elvégezték, azonban igyekszem úgy összeállítani az anyagot, hogy olyan hallgatók is tudjanak járni, akik e kurzusra még nem jártak.

Tematika: Példák dinamikus rendszerekre. Grafikus analízis. Hiperbolikus fixpontok. Cantor halmazok mint taszító hiperbolikus halmazok. Szimbolikus dinamika és kódolás. A teljes topologikus Bernoulli shift. Véges típusú shift terek. Dinamikus rendszerek és fraktálok. Hausdorff mérték és dimenzió. Iterált függvény rendszerek. Topologikus tranzitivitás, a kezdeti értékektől való érzékeny függés, káosz/kaotikus leképezések, strukturális stabilitás. Schwarz derivált. Bifurkációelmélet.

**MAT/430 Lineáris operátorok és relációk Hilbert téren**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

Tarcsay Zsigmond YJ3IWV

Tárgy rövid leírása: Hilbert téren értelmezett lineáris reláció és operátor adjungáltja; Zárt lineáris relációk és operátorok jellemzése; Reguláris és szinguláris relációk; Lineáris reláció kanonikus felbontása; Alkalmazás pozitív operátorok, funkcionálok és mértékek Lebesgue-típusú felbontásaira (Ando, Gudder és Darst tételei).

Szimmetrikus és önadjungált operátorok és relációk; Az önadjungáltság Neumann-féle jellemzése; A Cayley transzformált és szimmetrikus operátor önadjungált kiterjeszhetősége; Pozitív operátor Krein-Neumann és Friedrichs kiterjesztései ; Önadjungált operátorok perturbációi (Kato-Rellich, Wüst és Nelson tételei).

### **MAT/431 Analitikus fejezetek a komplex függvénytanból**

6 kredit, elmélet, nem ismételhető

Sigray István

Előtanulmányi feltétel: Riesz reprezentációs tétele, Hilbert terek,  $L_p$  terek, duális terek, reziduum tétel, harmonikus függvények, Poisson formula, maximum elv

Tematika:

Phragmén-Lindelöf típusú tételek, Poisson-Jensen formula, meromorf függvények a síkon, Nevanlinna elmélet, Előjeles mértékek és  $L_p$ -beli függvények Poisson integrálja, Hardy terek. Riesz Marcell tétele. Interpoláció az  $L_p$  terek között, a Riesz fivérek tétele. Bergman terek.

Kötelező irodalom:

Ajánlott irodalom:

Halász Gábor :,Fejezetek a komplex függvénytanból, egyetemi jegyzet.

W.K.Hayman: Meromorphic functions, Clarendon Press, Oxford, 1964,

P.L. Duren: Theory of  $H_p$  spaces, Academic Press, New York-London, 1970,

P.Koosis: Introduction to  $H_p$  spaces, University Press, Cambridge, 1980,

R.E. Greene-S.G. Krantz:Function theory of one complex variable, AMS 2002

### **MAT/432 Geometriai fejezetek a komplex függvénytanból**

**6 kredit, elmélet, nem ismételhető**

Sigray István HOM8NI

Előtanulmányi feltétel: Riesz reprezentációs tétele, duális terek, reziduum tétel, konform leképezések alaptétele, harmonikus függvények, Poisson formula, maximum elv, Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség, Cauchy–Riemann-egyenletek

Az elsajátítandó ismeretanyag rövid (néhány soros) leírása:

A cél betekintést adni az egyváltozós komplex függvénytan különböző fejezeteibe, amelyek közül a 2. félévben az érdeklődés szerint meghirdetendő előadások, tanulmányozások, gyakorlatok egyeseket részletesebben feldolgoznak.

Tematika:

Phragmén–Lindelöf-típusú tételek.

Kapacitás. Csebisev konstans. Transzfinit átmérő. Green függvény. Kapacitás és Hausdorff mérték. Konform sugár.

Területi elv. Koebe torzítási tételei. Egyrétű függvények együtthatóinak a becslése.

Terület-ív hossz elv. Extremális hossz. Négyszögek és gyűrűk modulusa. Kvázikonform leképezés. Kiterjesztésük a határra. Kváziszimmetrikus függvények. Kvázikonform görbék.

Divergencia- és rotációmentes áramlások a síkon. Komplex potenciál. Áramlás akadály körül, fázisok között.

Kötelező irodalom:

Halász Gábor „Fejezetek a komplex függvénytanból”, „Fourier integrál” és „Kis

hidrodinamika” c. egyetemi jegyzete és az azokban megadott további irodalom.

**MAT/433 Válogatott fejezetek az analízisből**

**6 kredit, elmélet, nem ismételtető**

Elekes Márton L3IDJH

Hausdorff mérték és Hausdorff dimenzió. Lebesgue és Hausdorff mérték kapcsolata. Ívhossz és 1-dimenziós Hausdorff mérték kapcsolata. Hausdorff metrika. Önhasonló halmazok, fraktálok. Haar mérték, létezés és egyértelműség. Pontrjagin dualitás és a lokálisan kompakt csoportok struktúrája. Absztrakt Fourier-analízis. Kompakt csoport eltolásainak ergodikussága. A Haar nullmértékűség általánosítása nem lokálisan kompakt csoportokra. Tipikus (generikus) objektumok. Lipschitz függvények, Rademacher és Kirschbraun tételei.

Ajánlott irodalom:

Laczkovich Miklós: Valós függvénytan (egyetemi jegyzet), ELTE Budapest, 1995  
P. R. Halmos: Mértékelmélet, Gondolat, 1984.

**MAT/434 Játékelmélet II.**

**6 kredit, elmélet, nem ismételtető**

Király Tamás, IAD7BN

Partizán játékok, numerikus játékok, piros-kék sövényvágó játék  
Nash-egyensúly megtalálásának bonyolultsága, a PPAD bonyolultsági osztály  
Stratégiai játékok dinamikái  
Piaci egyensúlyok kiszámítása  
Közlekedési játékok, az anarchia és a stabilitás ára  
Mechanizmus-tervezés, aukciók

Kötelező irodalom: Végh László, Király Tamás, Pap Júlia: Játékelmélet, online jegyzet,  
[http://www.cs.elte.hu/~tkiraly/students/jatekelmelet\\_jegyzet.pdf](http://www.cs.elte.hu/~tkiraly/students/jatekelmelet_jegyzet.pdf)

Ajánlott irodalom: N. Nisan, T. Roughgarden, É. Tardos, V. V. Vazirani, Algorithmic Game Theory, Cambridge University Press, New York, 2007,  
[http://www.cambridge.org/journals/nisan/downloads/Nisan\\_Non-printable.pdf](http://www.cambridge.org/journals/nisan/downloads/Nisan_Non-printable.pdf)

**MAT/435 Algoritmusok és adatstruktúrák tervezése, elemzése és implementálása I.**

**2025 szeptemberétől: Haladó algoritmusok**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

Király Zoltán OIRB6J

Randomizált algoritmusok, Kager és Stein min. vágás algoritmus, VPN tervezés.  
On-line algoritmusok, versenyképességi hányados, a k-robot probléma, randomizált verziók.  
Determináns számítása gyűrű felett.  
Megiddo algoritmusai paraméteres feladatokra.  
Gráfok síkbarajzolása,  
Fa-felbontás, fa-vastagság és alkalmazásai.  
Pseudo-reguláris partíció keresése.

**MAT/436 Kévelemélet**

**6 kredit, elmélet, nem ismételtető**

Szabó Szilárd

A kurzus célja bevezetés a kéveelméletbe; a hallgatók olyan szintre való eljuttatása, hogy a későbbi algebrai, algebrai geometriai, algebrai topológiai és komplex függvénytan tanulmányaik során előforduló kéveelméleti érvelések során már ne kelljen alapveő konceptuális problémákkal szembesülniük. A kéveelmélet Leray nyomán 1945 körül jött létre, majd többek között Cartan, Serre és Grothendieck közreműködésével nyerte el modern formáját.

A kéveelméleti módszerek mára alapvetőek lettek az algebrai geometria és többváltozós komplex függvények területén, és nem nélkülözhetők az algebra és algebrai topológia bizonyos teületein sem (pl. algebrai számelmélet, modern homotópiaelmélet). A fenti területek iránt érdeklődő hallgatók mindenképpen találkoznak kéveelméleti eszközökkel, viszont ezek hosszabb ismertetését az adott kurzusokon belül már gyakran időhiány korlátozza.

### **MAT/437 Gráfelmélet**

**6 kredit, elmélet, nem ismételtető**

**Jordán Tibor**

A szemináriumon válogatott gráfelméleti cikkek kerülnek feldolgozásra.

### **MAT/438 Innovatív integrátork nemlineáris differenciálegyenletek neumerikus megoldására**

**6 kredit, elmélet, nem ismételtető**

Csomós Petra SNISB3

A kurzus célja a nemlineáris parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása során alkalmazott innovatív időbeli numerikus integrátork (operátorszeletelési eljárások, exponenciális integrátork, Magnus-féle integrátork) vizsgálata a funkcionálanalízis keretein belül. A nemanautonom és nemlineáris operátorfélcsoport-elmélet bevezetése után áttekintjük a fenti módszerek konvergenciájára kapott alapvető eredményeket. A kurzus lehetőséget biztosít az önálló munkára is: a félév utolsó harmadában a hallgatók feldolgozzák és bemutatják a téma legújabb irodalmi eredményeit. Ilyen irányú igény esetén a kurzus anyagát programozási feladatokkal is kiegészítem, melyek során a megismert numerikus módszerek gyakorlati megvalósítására is lehetőség nyílik.

### **MAT/439 Algebrai és számelméleti feladatok háttere**

**6 kredit, elmélet, nem ismételtető**

A tárgy célja az általános és középiskolás algebrai és számelméleti feladatok kultúrájának elsajátítása különös tekintettel az alábbiakra

- 1) Tantervi és versenyfeladatok megismerése, megoldási módszerei elsajátítása, a magasabb (egyetemi) szintű elméleti háttér hozzákapcsolása.
- 2) Az egy feladatra adható különböző megoldási módszerek kidolgozása, feldolgozása, elemzése
- 3) Feladatok, feladatsorok készítése az elméleti háttér segítségével.

A kurzus nem kizárólagosan érinti az alábbiakat:

- \_ elemi kongruenciák (oszthatósági, invariánsok alapuló feladatok)
- \_ rend, periodicitás, Euler-Fermat-tétel (oszthatósági feladatok, maradékok, magasabb rendű difonotikus egyenletek)
- \_ primitív gyök, két négyzetszám tétel, kvadratikus maradékok (invariánsok, magasabb rendű diofantikus egyenletek)
- \_ komplex számok egységgyökök (könnyen számolható geometriai feladatok, kombinatorikai azonosságok)
- \_ polinomok számelmélete (polinomos, racionális törtfüggvényekkel kapcsolatos feladatok)
- \_ gyökök, gyöktényezők (algebrai egyenletek, szerkeszthetőség)
- \_ testbívítések elmélete (gyöktelenítések, összevonások, szerkeszthetőség, diofantikus egyenletek)

- \_ szimmetrikus polinomok alaptétele (algebrai és geometriai egyenlőségek, invariánsok)
- \_ kvadratikus alakok (egyenlőségek, normál alakra hozás)
- \_ véges vektorterek (kombinatorikai invariánsok, egyenletek megoldhatósága)
- \_ rezultáns, diszkrimináns (magasabb fokú azonosságok egyenletek, egyenlőségek)
- \_ ciklikus csoportok (invariánsok, leszámlálások)
- \_ permutáció csoportok, Burnside-lemma (invariánsok, leszámlálások)

Az elsődleges feladatanyag a magyarországi és nemzetközi versenyfeladatok ÖSSZES fordulójának idevonatkozó feladatai (Varga Tamás, Arany Dániel, OKTV, Kürschák, olimpiai előkészítők stb. ), a középiskolák szakköreinek a feladatai.

Az osztályzat megszerzésének a feltétele: két zárthelyi megírása (50 %) és egy önálló, algebrai vagy számelméleti tárgyú feladatsor elkészítése az órán megadott szempontok A tárgynak előfeltétele nincs.

### **MAT/440 Fejezetek a funkcionálanalízis és parciális differenciálegyenletek elméletéből** **6 kredit, elmélet, nem ismételhető**

Izsák Ferenc

A tárgy célja néhány olyan eredmény ill. témakör feldolgozása, amelyek említést kapnak a funkcionálanalízis és a parciális differenciálegyenletek témájú előadásokban, de időhiány miatt bizonyítás és részletesebb vizsgálat nélkül szerepelnek.

### **MAT/441 Nemlineáris parciális differenciálegyenletek vizsgálata a gyenge konvergencia módszerével** **6 kredit, elmélet, nem ismételhető**

Simon Péter

**Tárgy rövid leírása:** Nemlineáris parciális differenciálegyenletek (PDE-k) megoldásának létezése gyakran igazolható közelítő sorozatok konstrukcióján keresztül, amennyiben sikerül gyengén konvergens részsorozatot találni és igazolni, hogy ennek limesze valóban megoldása a PDE-nek. Az utóbbi lépés fő nehézsége az, hogy a nemlinearitás nem kommutál a gyenge konvergenciával. Ennek kezelése inkább mértékelméleti, mintsem funkcionálanalízisbeli eszközökre támaszkodik, melyekkel megérthető az erős konvergencia hiánya, és tág feladatosztályban az adott nemlinearitások szerkezetét felhasználva igazolható, hogy a limesz valóban megoldása a PDE-nek.

A kurzusban bevezetjük a fő technikákat, melyekkel megérthető az oszcillációk és koncentrációk gyengén konvergens sorozatokban. Számos variációs és nem-variációs feladatra demonstráljuk alkalmazhatóságukat, és beszélünk a kompaktság koncentrációjáról, kompenzált kompaktságról, a Young-mértékek és kvázikonvexitás témaköreiről. A kurzus stabil mértékelméleti és funkcionálanalízisbeli tudásra épít.

### **MAT/442 Algebrai geometria és alkalmazásai**

6 kredit, elmélet, ismételhető

Szabó Szilárd

Tárgy rövid leírása: Reguláris leképezések, racionális függvények és leképezések, kváziprojektív varietások, dimenzióelmélet. Szinguláris pontok, felfújások és tulajdonságaik. Divizorok és differenciálformák, Picard-csoport, Riemann-Roch-tétel görbékre. Metszésszámok, alkalmazások a felületelméletben. Kévék, homológikus algebra, Zariski-topológia, absztrakt varietások. Komplex sima projektív sokaságok, homológikus tulajdonságaik, Lefschetz-tételek és felbontás.

**MAT/443 Dinamikai rendszerek és Ergodelmélet feladatmegoldó szeminárium**

6 kredit, gyakorlat, ismételhető  
RMJ8LE Buczolicz Zoltán

Tárgy rövid leírása: Problémamegoldó szeminárium, melyen a feladatanyag az Ergodelmélet és a Dinamikai rendszerek tárgya jobb megértését, illetve az adott területeken a problémamegoldó képességek fejlesztését szolgálja.

**MAT/444 Farkas Miklós Szeminárium**

6 kredit, gyakorlat, ismételhető  
Karátson János - B7D32Y

Tárgy rövid leírása: "A tárgy célja az alkalmazott analízissel (funkcionálanalízis, differenciálegyenletek, numerikus módszerek) foglalkozó kutatói kör számára fórumot biztosító Farkas Miklós Szeminárium (<https://math.bme.hu/AlkAnalSzemi>) látogatása, és ezen keresztül ismerkedés az itt folyó munkával, bekapcsolódás az együttgondolkodásba.

A félév végén a tárgyat felvevő doktoranduszok a szeminárium keretében beszámolnak saját kutatásaikról, valamint összefoglalást írnak a félévben elhangzott egyik előadásról."

**MAT/445 Komplex sokaságok és deformációelméletük**

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető  
Keleti Tamás BN67WS - Lempert László

Az előadás a komplex sokaságok definíciójával, a velük kapcsolatos alapfogalmakkal (vektornyalabok, kohomológia--csoportok) és példákkal indít. A komplex sokaságok Kodaira—Spencer—féle deformációelméletet motiváló probléma az, hogy hogyan lehet áttekinteni az összes lehetséges komplex sokaságot. Ugyan ez a probléma általánosságban túl ambiciózusnak bizonyult, az elmélet a probléma egy lokális változatát megoldja, és leírja egy adott kompakt komplex sokasághoz 'közeli' összes komplex sokaságot.

**MAT/446 Véletlen gráfok**

6 kredit, elmélet, -, nem ismételhető  
Backhausz Ágnes- R32P7U

Tárgy rövid leírása: A véletlen gráfok témaköre a valószínűségelmélet jelenleg is aktívan kutatott területe, mely a hálózatkutatói alkalmazások szempontjából is érdekes lehet. A tárgy célja a véletlen gráfok elméleti alapjainak bemutatása a valószínűségszámítás eszközeivel. A tárgy témái közé tartozik az Erdős-Rényi-féle véletlen gráfok és fázisátmenetük az összefüggőség szempontjából, inhomogén sűrű véletlen gráfok (sztochasztikus blokkmodell, illetve grafonokból sorsolt véletlen gráfok) és határértékük, vagyis a sűrű gráfok limeszelméletének véletlen gráfokra vonatkozó eredményei. A lineáris élszámú véletlen gráfok közül a Barabási-Albert-típusú (preferential attachment) gráfok fokszámeloszlását vizsgáljuk martingáleméleti módszerekkel. A korlátos fokú gráfok közül pedig a véletlen reguláris gráfok lokális viselkedését és spektrumát tárgyaljuk.

**MAT/447 Bevezetés a Matematikadidaktikai szakszövegolvasásba**

6 kredit, gyakorlat, a Matematikadidaktika programban kötelezően -, nem ismételhető  
XDSAN5 Gosztanyi Katalin

Tárgy rövid leírása: A kurzus során a hallgatókkal közösen dolgozzuk fel egy-egy matematikadidaktikai téma kurrens szakirodalmát. Először áttekintjük a nemzetközi szakirodalom legrelevánsabb forrásaiban (ICMI Studies könyvsorozat, vezető folyóiratok, pl Educational Studies, ZDM stb., jelentősebb nemzetközi konferenciák tematikus munkacsoportjainak konferenciakötetei) a témában az elmúlt évek során megjelent szakirodalmat. A kurzus során ezek közül közösen dolgozunk fel néhány cikket, végül pedig a hallgatók fejenként három, a témához kapcsolódó további cikkről készítenek összefoglalót hallgatótársaik számára.

#### **MAT/448 Magyar matematikaoktatási hagyományok**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

XDSAN5 Gosztonyi Katalin

Tárgy rövid leírása: A tárgy célja a magyar felfedezettő matematikaoktatási irányzat gyökereivel, történetével és elméleti alapjaival való megismerkedés. A kurzus során beszélünk a 20. századi magyar matematikaoktatás történetéről, kapcsolatáról a hazai matematikai kultúrával. Ezután olyan matematikusok matematikanépszerűsítő, illetve matematikafilozófiai vagy –oktatási szövegeit tanulmányozzuk, amelyek a felfedezettő matematikaoktatási hagyományra nagy hatást gyakoroltak (Péter Rózsa, Kalmár László, Rényi Alfréd, Pólya György művei). A kurzus utolsó részében megvizsgáljuk, hogyan hatottak az említett szövegekből kiolvasható alapelvek Varga Tamás Komplex matematikaoktatási reformmozgalmára.

#### **MAT/449 Francia didaktikai elméletek**

6 kredit, gyakorlat, nem ismételtető

XDSAN5 Gosztonyi Katalin – Vancsó Ödön

Tárgy rövid leírása: A kurzus során a francia matematikadidaktikai iskola néhány meghatározó elméletével és kutatásmódszertani eszközével ismerkedünk meg:

- Brousseau: Didaktikai Szituációk Elmélete
- Chevallard: Didaktika Antropológiai Elmélete
- Houdement és Kuzniak paradigma-fogalma
- a hallgatók érdeklődésének megfelelően esetleg egyéb elméletek (Matematikai Munka terei, Duval reprezentációs elmélete, nyelvi elemzés eszközei stb.)

A hallgatók feladata a megismert elméletek és elemzési módszerek alkalmazása részben az oktató által bemutatott, részben saját doktori kutatásokból származó adatok (pl. feladtleírások, osztálytermi videofelvételek, diákmunkák) elemzésére.

#### **MAT/452 Rényi-ELTE-BME doktorandusz szeminárium**

6 kredit, elmélet és gyakorlat, ismételtető

XN55FO – ifj. Böröczky Károly

Tárgy rövid leírása:

A két matematika doktori iskola – BME és ELTE - hallgatói számára közös szeminárium, melyen a matematika különböző területeivel és modern kutatási témákkal ismerkedhetnek meg. A szeminárium a Rényi Intézetben zajlik, ahol külföldi és hazai vezető kutatók tartanak előadásokat a doktoranduszoknak.

#### **MAT/453 Csoportok és reprezentációik**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

Somlai Gábor

Tárgy rövid leírása:

- Csoportthatás, permutációcsoport, automorfizmuscsoport. Szemidirekt szorzat. Sylow-tételek.
- Véges p-csoportok. Nilpotens csoportok. Feloldható csoportok, Hall-tételek.
- Szabad csoportok, prezentációk, varietások. Nielsen-Schreier-tétel.

- Abel-csoportok. A végesen generált Abel-csoportok alaptétele. Torziómentes csoportok.
- Lineáris csoportok és lineáris reprezentációk. Féligegyszerű modulusok és algebrák.
- Irreducibilis reprezentációk. Karakterek, ortogonalitási relációk. Indukált reprezentációk, Frobenius-reciprocitás, Clifford-tételek.

Irodalom

D.J.S. Robinson: A course in the theory of groups, Springer, 1993

I.M. Isaacs: Character theory of finite groups, Academic Press, 1976

### **MAT/454 Gyűrűk és algebrák**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

LL94QV- Ágoston István

Tárgy rövid leírása:

- Asszociatív gyűrűk és algebrák. Konstrukciók: polinomok, formális hatványsorok, lineáris operátorok, csoportalgebrák, gráfalgebrák, szabad algebrák, tenzor-algebrák, külső algebrák.
- Struktúraelmélet. Primitív gyűrűk, sűrűségi tétel, Jacobson-radikál, kommutativitási tételek.
- Modulusok direkt fölbontásai, Azumaya tétele. LánCFöltételek, injektív modulusok. Hopkins és Levitzki tétele.
- Kategóriák, funktorok. Példák az algebrából és a topológiából. Természetes homomorfizmusok. Kategorikus ekvivalencia fogalma. Kovariáns és kontravariáns funktorok. A Hom és a tenzor funktorok alaptulajdonságai (nem kommutatív gyűrűkre is). Adjungált funktorok. Additív kategóriák, egzakt funktorok. Funktorok egzaktága, projektív, injektív és lapos modulusok. Morita-elmélet.
- Artin gyűrűk általánosításai: szemiperfekt és perfekt gyűrűk.
- Homologikus algebra. Lánckomplexusok, homológiacsoporthok, lánchomotópia. Topologikus és algebrai példák. Homológiacsoporthok hosszú egzakt sorozata

Irodalom:

Anderson, F.–Fuller, K.: Rings and categories of modules, Springer, 1974, 1995

Lam, T.Y.: A first course in non-commutative rings, Springer, 1991

### **MAT/455**

6 kredit, elmélet és gyakorlat, nem ismételtető

N3XVCV - Lukács András

Tárgyleírás:

Deep Learning alapfogalmak: gradiens módszer és back propagation. Konvolúciós hálózatok.

Mély hálók: batch normalization, ResNet. Generatív modellezés: autoenkóder, Variational Autoencoders, Generative Adversarial Networks. Természetes nyelv feldolgozás (NLP), reprezentációk.

Rekurrens hálózatok, LSTM, GRU. Attention, Transformer, BERT. Megerősítéses tanulás.

Self-supervised learning. Deep Learning programozási alapismeretek, Tensorflow, Keras, Pytorch.

Irodalom:

Goodfellow, Ian, Yoshua Bengio, and Aaron Courville. Deep Learning. MIT Press, 2016.

<https://www.deeplearningbook.org/2020>. <https://d2l.ai/>

Aston Zhang, Zachary C. Lipton, Mu Li, and Alexander J. Smola. Dive into Deep Learning.

### **MAT/456 : A matematikai problémamegoldás tanításának elméleti és gyakorlati alapkérdései**

6 kredit, elmélet és gyakorlat, nem ismételtető

GJ39DD - Ambrus Gabriella habil adjunktus

Tárgy rövid leírása:

Probléma megoldási modellek: Pólya féle modell, Mason féle modell, Hattie féle modell.  
Probléma megoldási stratégiák: célirányos gondolkodás, fordított irányú gondolkodás, szisztematikus próbálkozás. Heurisztikus elvek: indukció, analógia, általánosítás, ismeretlen probléma visszavezetése egy ismertre, invariancia elv, eset megkülönböztetés, optimalizálás elve, speciális esetek vizsgálata, szimmetria elv, különböző reprezentációk használata.  
Zárt feladatok, nyitott feladatok.  
Sémaalapú probléma-megoldás tanítás.  
Egy feladat többféle megoldás. Egy feladat több megoldás.  
Metakogníció – a tanuló saját tudásáról való tudás fejlesztése. Önálló kérdés felvetés, önálló magyarázatok, önálló tervezés, önálló monitorizálás, önálló kontrolltechnikák kifejlesztése, alkalmazása.  
Kognitív terhelés és a matematikai problémamegoldás.  
Kooperatív oktatási technikák a matematikai problémamegoldás tanításában  
Néhány oktatási kísérlet a matematikai problémamegoldás tanításával kapcsolatban.  
Kosztolányi József, Barcsi Kriszta, Pintér Klára PhD dolgozata

Szakirodalom:

Ambrus András: Bevezetés a matematikadidaktikába. Egyetemi jegyzet. ELTE Eötvös Kiadó Budapest 2004

Stein (ed.) A Life's time for mathematics education and problem solving. WTM Münster 2017 Barc

K, A. Schoenfeld, J. Sweller, J. Mason, D. Tall, S. Vinner, O. Chapman cikkek

Barcsi Kriszta: Developing Mathematical Problem Solving Abilities and Skills With Cooperative Teaching Techniques. PhD értekezés Debrecen 2016

Kosztolányi József: A probléma megoldási stratégiák tanításáról. PhD értekezés Debrecen. 2006

Pintér Klára: A matematikai problémamegoldás és problémaalkotás tanításáról. PhD értekezés Szeged 2012. Internet

Pólya György: A gondolkodás iskolája. Gondolat Kiadó Budapest 1977

Pólya György: A problémamegoldás iskolája I.- II. Tankönyvkiadó Budapest 1967 – 68

### **MAT/457 A matematika tanítása és a média, szeminárium**

**6 kredit, gyakorlat, ismételhető**

**IC10YJ Vancsó Ödön**

**UB874L, Korándi József**

Tárgy rövid leírása:

A médiumok egyre nagyobb szerepet játszanak az iskolai tanításban is. A kurzus során áttekintjük a mai közoktatásban jelenlévő, illetve használt médiumokat, majd konkrét forrásokat elemezve vizsgáljuk meg ezek szerepét és használhatóságát. A szeminárium egy hallgatói mikro-kutatással és saját elemzéssel zárul.

Irodalom:

– David Buckingham: Médiaoktatás - Kommunikáció és média (Új Mandátum Könyvkiadó, 2005)

– Megan Poore: Hogyan használjuk a közösségi médiát az oktatásban? (Wolters Kluwer kiadó, 2015)

– Dr. Ceglédi István: Kompetenciaalapú matematikaoktatás (EKF TTK, 2011)

– Paksi Borbála– Schmidt Andrea: Pedagógusok új infokommunikációs technológiák használatával kapcsolatos tapasztalatai és vélekedései (Educatio 26 , 2017)

– Stonawski Tamás: A digitális média alkalmazása a tanulói kreativitás, problémamegoldás és önálló kísérletezés fejlesztésére általános és középiskolában (Doktori értekezés, ELTE TTK, 2015)

**MAT/458 A bizonyítás elmélete és gyakorlata, szeminárium**  
**6 kredit, gyakorlat, ismételhető**  
**IC1OYJ Vancsó Ödön**  
**UB874L, Korándi József**

Tárgy rövid leírása:

A kurzus során a hallgatók megismerkednek a bizonyítás általános elméletével, ezen belül a matematikai bizonyítás fogalmával és történetével. Megvizsgáljuk a matematika órákon alkalmazott bizonyítási technikákat matematikai és didaktikai szempontból is. A kurzus végén a hallgatók egy írásműben elemzik egy matematika témakör bizonyításait.

Tematika:

- A bizonyítás fogalma
- A bizonyítás ismeretelméleti kérdései
- Általános bizonyítási technikák
- A matematikai bizonyítás
  - o axiomatika
  - o kétértékű logika
  - o Brouwer és a matematikai intuicionizmus
- Bizonyítás a matematika tanítása során
  - o a bizonyítási igény felkeltése
  - o a bizonyítás fogalmának változása
  - o tételek megsejtésére alkalmas eljárások
  - o bizonyítási technikák

Irodalom

- } Ambrus András: Bevezetés a matematikadidaktikába (ELTE TTK Egyetemi jegyzet)
- } Lakatos Imre: Bizonyítások és cáfolatok (Typotex Kiadó, 2011)
- } Skemp R.: A matematikatanulás pszichológiája (Edge Kiadó, 2005)
- } Panu Raatikainen: Conceptions of Truth in Intuitionism (History and Philosophy of Logic · May 2004)
- Jahnke, H. N. & Wambach, R. (2013) Understanding what a proof is: a classroom based approach (ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 45)
- } Proof and proving in mathematics education: discussion document. (2009, The 19th ICMI Study; Dordrecht Springer)
- } NAT és Kerettantervek, tankönyvek, egyetemi jegyzetek

**MAT/459 Különböző reprezentációk a matematika tanításában és tanulásában**  
**6 kredit, elmélet, nem ismételhető**  
**Gosztonyi Katalin**

Tárgy rövid leírása: A kurzus célja a konstruktivizmus tanulási elméletén és a magyar matematika-didaktikusok munkáságán alapuló, konkrét és képi reprezentációk használatával történő (hatékony) matematika tanítási módszerének ismertetése (bemutatása, elsajátítása), amelyet az általános iskolától az egyetemig különböző eszközök és szoftverek (számítógépes programok) felhasználásával gyakran kollaboratív csoportmunka és játékok keretén belül alkalmazunk.

Irodalom:

- } Ambrus András: Bevezetés a matematikadidaktikába (ELTE TTK Egyetemi jegyzet)
- } Cole Michael and Cole Sheila R. (2006), Fejlődéslélektan, Oziris Kiadó, Budapest
- } Dienes Zoltán (1999), Építsük fel a matematikát. SHL Hungary Kft, Budapest,
- } Stankov Gordana (2009), Konkrét és képi reprezentációk használata a hetedik osztályos algebratanításban, Debreceni Egyetem (PhD értekezés)
- } Božić Radoslav, Takači Đurđica and Stankov Gordana (2019), Influence of dynamic software environment on students' achievement of learning functions with parameters, Interactive Learning Environments, DOI:

10.1080/10494820.2019.1602842

} Takači Đurđica, Stankov Gordana and Milanovic Ivana, (2015), Efficiency of learning environment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups, *Computers and Education*, Vol. 82, March 2015, Pages 421-431,

} Takači Djurdjica, Stankov Gordana and Mirjana Rakić (2011), On the role of GeoGebra in examining functions, *Conference proceedings of International GeoGebra Conference for Southeast Europe*, Editor: Djurdjica Takači, Departnan za matematiku i informatiku PMF u Novom Sadu, Novi Sad, 18-26.

### **MAT/460 Kvantitativ kutatási módszerek a matematikadidaktikában**

**6 kredit, elmélet, nem ismételhető**

**G17843 - Csíkos Csaba**

Tárgy rövid leírása: Az előadás áttekinti a neveléstudományi kutatási módszerek azon irányzatait, amelyek a matematikadidaktika, tágabb értelemben a matematikai nevelés (mathematics education) empirikus vizsgálatai számára relevánsak. A kurzus alapot jelent egy rá épülő kutatási szeminárium számára, amelynek középpontjában a számítógépes statisztikai elemzések állnak (SPSS). Fő témakörök:

A tudományos kutatás alapfogalmai, módszerei, eszközei. A szakirodalom feldolgozásának módszerei. Kérdőíves vizsgálatok. Mérés és skálaelméleti alapfogalmak. A mintavétel módszerei A leíró statisztikák, elemzése, értelmezése. Az eredmények táblázatos és grafikus megjelenítése. Két változó összefüggésének vizsgálata: kontingencia-koefficiens, korrelációs együtthatók. Fejlődésanalízis: keresztmetszeti és longitudinális vizsgálatok. Regresszióanalízis, faktoranalízis, klaszteranalízis. Pedagógiai kísérletek. A kutatási eredmények publikálása: az APA-stílus.

Kötelező irodalom:

Csermely Péter, Gergely Pál, Koltay Tibor és Tóth János (1999). *Kutatás és közlés a természettudományokban*. Osiris Kiadó.

Csíkos Csaba (2009). *Mintavétel a kvantitativ pedagógiai kutatásban*. Gondolat Kiadó.

Csíkos Csaba (2012). *Pedagógiai kísérletek kutatómódszertana*. Gondolat Kiadó.

Csíkos Csaba (2020). *A neveléstudomány kutatómódszertanának alapjai*. Eötvös Kiadó.

Kilpatrick, J. (2020). History of research in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 349-354). Springer.

Publication manual of the American Psychological Association. 7th Edition.

Schoenfeld, A. H. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the AMS*, 47, 641-649.

### **MAT/461 Számítógépes statisztikai elemzések a matematikadidaktikai kutatásban**

**6 kredit, gyakorlat, nem ismételhető**

**G17843 - Csíkos Csaba**

Tárgy rövid leírása:

A gyakorlaton – lehetőség szerint, az egyetemi licenz függvényében – az SPSS szoftver legújabb változatát használjuk. A gyakorlat feltételezi a kutatómódszertani alapok meglétét, és ha a résztvevőknek már rendelkezésre állnak saját empirikus adatok, azokon az elemzéseket kipróbálhatjuk.

Adatfájlok típusai és kezelésük. Az adatok rendezése, műveletek a változókkal. Leíró statisztikai elemzések és értelmezésük. Matematikai statisztikai elemzések és az output értelmezése: szórások egyezésének vizsgálata, átlagok összehasonlítása (t-próbák, ANOVA, MANOVA), nemparaméteres próbák (khi-négyzet-próba, Kolmogorov-Szmirnov-próbák, normalitásvizsgálat), többváltozós összefüggésvizsgálatok (faktor-, klaszter- és regresszióanalízis) különböző mérési skálák esetén. Az SPSS ábratípusai.

Kötelező irodalom:

Sajtos László és Mitev Ariel (2007): *SPSS kutatási és adatelemzési kézikönyv*. Alinea Kiadó.

### **MAT/462 Differenciaegyenletek kvalitatív elmélete**

**6 kredit, elmélet, nem ismételtető**  
**IS0SX8 - Kovács Sándor**

Tárgy rövid leírása:

A tárgy a (közönséges) differenciaegyenletek alapvető megoldási módszereinek áttekintése után a kvalitatív leírás elemeivel foglalkozik. Az egyes fejezetek a következők: diszkrét kalkulus, a differenciaegyenletre vezető feladatok, diszkrét dinamikai rendszerek, lineáris differenciaegyenlet(rendszerek), stabilitás, bifurkációk, káosz.

Szakirodalom:

1. Elaydi, S.: An Introduction to Difference Equations, Springer, 2000.
2. Kovács, S.: Differenciaegyenletek, Typotex, 2020.

**MAT/463 Kahler sokaságok**  
**6 kredit, elmélet, nem ismételtető**  
**FWF6T5 – Szabó Szilárd**

Tárgy rövid leírása:

Komplex sokaságok topológiai (kohomológiai) és metrikus tulajdonságai közötti mély összefüggések bemutatása, haladó szintű ismeretanyag átadása analitikus, komplex függvénytan és geometriai módszerek felhasználásával.

Metrika és komplex struktúra kapcsolata, Kahler metrikák, Dolbeault kohomológia csoportok, harmonikus formák, Hodge elmélet Riemann és Kahler sokaságokon, topológiai következmények, holomorf vektornyalábok, Kodaira beágyazási tétele, Calabi sejtés.

Szakirodalom:

- D. Huybrechts: Complex geometry: an introduction, Universitext, 2005  
A. Moroianu: Lectures on Kahler geometry, LMS student texts 69, CUP 2007  
J.P. Demailly: Complex analytic and differential geometry, 2012, online könyv: <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/documents.html>  
W. Ballmann: Lectures on Kahler manifolds, ESI Lectures in Mathematics and Physics, EMS,2006

**MAT/464 A Lorentz-sokaságok geometriája és alkalmazásai**  
**6 kredit, elmélet, nem ismételtető**  
**HF82KF - Szenthe János**  
**RS0XAA - Szeghy Dávid**

Tárgy rövid leírása:

Hawking és Penrose eredményei kulcsfontosságúak a modern fizikában, e téma feldolgozásához szükséges ismeretek kerülnek ismertetésre. A főbb témák: Szemi-Riemann sokaságok és tulajdonságaik, Kauzális feltételek és struktúra, Akronális, akuazális jövő és múlt halmazok jellemzése, Cauchy hiperfelületek és tulajdonságaik, Hawking és Penrose Szingularitási tételei, Görbített szorzat és Robertson-Walker téridők tulajdonságai, R-W mint tökéletes folyadék, Az ősrobbanás modellje.

Irodalom:

1. Hawking S. W., Ellis G. F. R.; The Large Scale Structure of Space-Time; Cambridge Monographs on Mathematical Physics 1973
2. O'Neill B.; Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity; Academic Press; 1983
3. Szenthe J.; A Riemann geometria elemei; ELTE Egyetemi jegyzet; 1988

**MAT/465 Kvalitatív kutatási módszerek a matematikadidaktikában**  
**6 kredit, gyakorlat, nem ismételtető**  
**XDSAN5 - Gosztonyi Katalin**

Tárgy rövid leírása:

A kurzus keretében különböző, a matematikadidaktikai kutatásokban használatos kvalitatív kutatási módszereket tekintünk át, az ezekhez kapcsolódó matematikadidaktikai elméletekkel együtt. A kurzus során elméleti és kutatómódszertani tudományos cikkek segítségével ismerünk meg többféle kvalitatív kutatási módszert, ezek használatát konkrét példák elemzésén keresztül sajátítjuk el.

Szakirodalom:

Bikner-Ahsbabs, A., Knipping, C. & Presmeg, N. (2015). *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education*. Springer.

Bartolini Bussi MG, Mariotti MA (2008) Semiotic mediation in the mathematics classroom: artefacts and signs after a vygotskian perspective. In: English L, Bartolini M, Jones G, Lesh R, Sriraman B, Tirosh D (eds) *Handbook of international research in mathematics education*. Routledge/Taylor & Francis, New York, pp 746–783

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Springer.

Shulman LS (1986) Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educ Res* 15(2). pp. 4–14.

**MAT/466 Matematikadidaktika kutatószeminárium**  
**6 kredit, elmélet, ismételhető**  
**RN76Z0-Szabó Csaba**

Tárgy rövid leírása:

Kutatószeminárium. A szeminárium célja a matematika didaktika modern eredményeinek feldolgozása, részben kutatások indítása és/vagy figyelemmel kísérése.

**MAT/467 A matematika didaktikai kutatási irányzatainak megjelenése a közoktatásban**  
**6 kredit, elmélet, nem ismételhető**  
**RN76Z0-Szabó Csaba**

Tárgy rövid leírása:

A kurzus célja hogy megvizsgálja az aktuális nemzetközi matematika didaktikai kutatásokat, és azok eredményeit a magyarországi matematika tanítás szemszögéből. Célja annak vizsgálata, hogy melyek azok a kutatási témák és mérési módszerek, amelyek relevánsak a magyar oktatás szemszögéből, majd ezen témák külön elemzése. Mely témák azok, amelyek már jelen vannak az oktatásban, melyek azok, amelyek a jelenlegi Nemzeti Alaptanterv és Kerettanterv mellett alkalmazhatóak, bevezethetők matematika órán, és melyek azok, amelyek alkalmazása további átgondolást igényel.

Néhány főbb témakör: a geometriai megértés fejlődése, problémafelvetési képesség, tanulási technikák alkalmazása, értékelésmélt, nemzetközi felmérések stb.

Kötelező irodalom (többek közt az alábbi munkák egyes fejezetei):

Suurtamm, C., Thompson, D.R., Kim, R.Y., Moreno, L.D., Sayac, N., Schukajlow, S., Silver, E., Ufer, S., Vos, P. (2016) *Assessment in Mathematics Education, Large-Scale Assessment and Classroom Assessment*, Springer Open, DOI 10.1007/978-3-319-32394-7

John Dunlosky, Katherine A. Rawson, Elizabeth J. Marsh, Mitchell J. Nathan, Daniel T. Willingham, (2013) *Improving Students' Learning With Effective Learning Techniques: Promising Directions From Cognitive and Educational Psychology*, Psychol Sci Public Interest

Singer, Florence Mihaela, Ellerton, Nerida F., Cai, Jinfa (Eds.) (2016) *Mathematical Problem Posing From Research to Effective Practice*, Springer Science+business Media New York

MAT/468 Diszkrét matematika  
6 kredit, elmélet, nem ismételhető  
Csikvári Péter

Tárgy rövid leírása:

- Spektrál gráfelmélet: legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektor, pszeudo-véletlen gráfok, erősen reguláris gráfok, Laplace-mátrix és feszítőfák leszámllása
- Kombinatorikus Nullstellensatz és alkalmazásai
- Valószínűségi módszer: várható érték módszer, javított véletlen, második momentum módszer, Erdős-Rényi random gráf, küszöbfüggvények
- Generátorfüggvények, első és másodfajú Stirling-számok, "snake oil" módszer
- Extremális gráfelmélet: Bondy-Simonovits tétel

Irodalom

- Péter Csikvári: Discrete mathematics lecture note
- Andries Brouwer and Willem Haemars: Spectra of Graphs, Springer
- Noga Alon and Joel Spencer: The Probabilistic method, Wiley

MAT/469 Diszkrét matematika  
6 kredit, gyakorlat, nem ismételhető  
Csikvári Péter

Tárgy rövid leírása:

- Spektrál gráfelmélet: legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektor, pszeudo-véletlen gráfok, erősen reguláris gráfok, Laplace-mátrix és feszítőfák leszámllása
- Kombinatorikus Nullstellensatz és alkalmazásai
- Valószínűségi módszer: várható érték módszer, javított véletlen, második momentum módszer, Erdős-Rényi random gráf, küszöbfüggvények
- Generátorfüggvények, első és másodfajú Stirling-számok, "snake oil" módszer
- Extremális gráfelmélet: Bondy-Simonovits tétel

Irodalom

- Péter Csikvári: Discrete mathematics lecture note
- Andries Brouwer and Willem Haemars: Spectra of Graphs, Springer
- Noga Alon and Joel Spencer: The Probabilistic method, Wiley

### **MAT/470 Közönséges differenciálegyenletek numerikus módszerei II.**

6 kredit, elmélet, nem ismételhető  
Faragó István

Tárgy rövid leírása: Többlépéses módszerek vizsgálata Cauchy feladatok megoldására. Adams típusú módszerek, BDF módszerek. Abszlút stabilitási tulajdonságok, a Dahlquist-féle rendkorlátok. . Kétpontos peremérték feladatok numerikus megoldása véges differenciákkal és a belövéses módszerek.

Irodalom:

1. Faragó István Numerikus modellezés és aközöndéges differenciálegyenletek numerikus megoldási módszerei, ([http://faragois.web.elte.hu//jegyzet\\_Szeged.pdf](http://faragois.web.elte.hu//jegyzet_Szeged.pdf), In English: [http://faragois.web.elte.hu//ODE\\_angol.](http://faragois.web.elte.hu//ODE_angol.))

2. Ernst Hairer, Gerhard Wanner, Syvert P. Nørsett. Solving Ordinary Differential Equations I Nonstiff Problems, Springer, 1993.

MAT/471 Kvantum-számítástudomány  
12 kredit, elmélet+gyakorlat, nem ismételhető  
Gilyén András

Elmélet/gyakorlat: elmélet + gyakorlat (2 óra előadás + 2 óra gyakorlat / hét)  
Kötelező/-: -, nem ismételtető

Tárgy rövid leírása:

- A kvantummechanika posztulátumai véges dimenziós rendszerekről
- Kvantumos logikai áramkörök számítási modellje
- Deutsch-Józsa, Simon és Bernsen-Vazirani algoritmusai
- Shor faktorizációs algoritmusai és a kvantum Fourier transzformáció
- Grover kereső algoritmusai és amplitúdó amplifikáció
- Hamiltoni dinamika hatékony szimulációja
- Kvantumos alsó korlátok és kvantum bonyolultságelmélet
- Kvantumos titkosítás
- Összefonódás és nem-lokalitás
- Kvantumos hibajavítás és hibátűrő számítási eljárások

Irodalom:

Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. Quantum computation and quantum information. Cambridge University Press, 2000. <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511976667>

Ronald de Wolf. Quantum Computing: Lecture Notes, 2019. <https://arxiv.org/abs/1907.09415>

### **MAT/472 Stein sokaságok**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

Szőke Róbert

Tárgy rövid leírása: Bevezetés a Stein-sokaságok elméletébe

Tantárgy tartalma:

Pluriszubharmonikus függvények, Lévi probléma, beágyazási tételek, koherens kévek, Cartan A és B tétel, Grauert végességi tétele, Stein sokaságok topológiája.

Irodalom:

1: Siu: Pseudoconvexity and the problem of Levi (Bull. Of the AMS, Vol 84, No4, 1978, p481-512)

2: Hörmander: An introduction to complex analysis in several variables, 3rd ed., North Holland, 1990

3: M. Range: Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Springer 1986

4: M. Field: Several complex variables and complex manifolds (LMS lect note series 66, CUP, 1999)

### **MAT/473 Haladó mélytanulás**

6 kredit, gyakorlat, nem ismételtető

Lukács András

Kurzusleírás:

Deep Learning alapfogalmak: gradiens módszer és back propagation. Konvolúciós hálózatok. Mély hálók: batch normalization, ResNet. Generatív modellezés: autoenkóder, Variational Autoencoders, Generative Adversarial Networks. Természetes nyelv feldolgozás (NLP), reprezentációk. Rekurrens hálózatok, LSTM, GRU. Attention, Transformer, BERT. Megerősítéses tanulás. Self supervised learning. Deep Learning programozási alapismeretek, Tensorflow, Keras, Pytorch.

Tankönyv

Goodfellow, Ian, Yoshua Bengio, and Aaron Courville. Deep Learning. MIT Press, 2016.

<https://www.deeplearningbook.org/>

Aston Zhang, Zachary C. Lipton, Mu Li, and Alexander J. Smola. Dive into Deep Learning. 2020.

<https://d2l.ai/>

### **MAT/474 Perfektoid terek**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

Zábrádi Gergely

Tárgy rövid leírása:

A perfektoid tereket (az azóta Fields-érmes) Peter Scholze vezette be 2012-ben. Ezek aritmetikai geometriai objektumok, melyek eredeti fő célja az volt, hogy  $p$ -karakterisztikájú módszereket alkalmazhassunk 0-karakterisztikában bizonyos, számelméletből eredő algebrai geometriai kérdésekre. Az elmélet fő alkalmazásai a Langlands program területén vannak, de Deligne súly-monodrómia sejtését a projektív tér hiperfelületeiről Scholze bizonyította 2012-ben, ill. a kommutatív algebrában 1973 óta fennálló direktösszeadási sejtést is perfektoid terek segítségével igazolta André 2018-ban. Témák:

- adikus terek (Huber)
- perfektoid testek és gyűrűk
- billentési ekvivalencia, „majdnem tisztaság” étale fedésekre
- alkalmazás  $p$ -adikus Galois-reprezentációkra
- gyémántok, adikus térhez rendelt gyémánt
- stukák és lábaik
- Drinfeld lemmája gyémántokra
- visszabillentések és a Fargues-Fontaine görbe

Irodalom:

Peter Scholze and Jared Weinstein. Berkeley lectures on  $p$ -adic geometry. Annals of mathematics studies 207, 2020. <https://people.mpim-bonn.mpg.de/scholze/Berkeley.pdf>

Kiran Kedlaya. Sheaves, stacks and shtukas, in: Perfectoid Spaces: Lectures from the 2017 Arizona Winter School, Mathematical Surveys and Monographs 242, AMS, 2019, <https://kskedlaya.org/papers/aws-notes.pdf>

Matthew Morrow. Foundations of perfectoid spaces, lecture notes, <https://people.math.harvard.edu/~lurie/ffcurve/Lecture6-8-Perfectoid.pdf>

### **MAT/475 Bevezetés a folyadékdinamika numerikus módszereibe**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

Karátson János

Tárgy rövid leírása:

A folyadékdinamika parciális differenciálegyenletei számos alkalmazásban felbukkanó és sokat vizsgált modelleket írnak le, a nevezetes Navier-Stokes- és Euler-egyenletek mellett ezek részfeladatai is érdekesek, numerikus megoldási módszereik ezért fontos ismereteket jelentenek az alkalmazott matematikában. A kurzus e módszerek elméletébe és implementálásba nyújt betekintést. Az érintett témakörök:

- A folyadékdinamika néhány alapegyenlete és részfeladatai.
- Stacionárius lineáris konvekció-diffúziós feladatok (nem szimmetrikus elliptikus PDEk) végesselemes megoldása, SDFEM-módszer.
- Iterációs módszerek nem szimmetrikus feladatokra.
- A Stokes-feladat: elméleti háttér, nyeregpont-feladatok, végesselemes megoldás, inf-sup-feltétel. Uzawa-algoritmus.
- A Navier-Stokes-feladat, linearizálás.
- Időfüggő feladatok: megmaradási törvények áttekintése.
- Konzervatív sémák, Lax-Wendroff-tétel. Monoton sémák és tulajdonságaik.
- Lax-Friedrichs és Godunov-séma.
- Burgers-egyenlet és Euler-egyenletek numerikus megoldása.

Ajánlott irodalom:

- Horváth R., Izsák F., Karátson J.: Parciális differenciálegyenletek numerikus módszerei számítógépes alkalmazásokkal, elektronikus jegyzet, 2013.

- Elman, H. C., Silvester, D. J., Wathen, A. J., Finite Elements and Fast Iterative Solvers: with Applications

in Incompressible Fluid Dynamics, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, New York, 2005.

– R. LeVeque: Numerical Methods for Conservation Laws, ETH Lecture Notes, Birkhäuser, 1995.

### **MAT/476 Bevezetés az optimális transzport elméletébe**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

Titkos Tamás

Tárgy rövid leírása:

A doktori kurzus célja, hogy bevezetést nyújtson az optimális transzport (OT) elméletébe. Az OT története egészen a 18-ik századig, Gaspard Monge munkásságáig nyúlik vissza. A téma újjászületése Leonyid Kantorovich nevéhez köthető, aki a témával kapcsolatos kutatásaiért közgazdasági Nobel-díjat kapott. Az utóbbi két évtizedben Cedric Villani és Alessio Figalli is Fields-érmeket nyertek a területhez kapcsolódó úttörő eredményeikért. Az optimális transzport számos területen alkalmazható, a matematikától kezdve az adattudományon át egészen a fizikáig. Hatékonysága nagyrészt az optimális transzporttervekből származtatott Wasserstein-metrika szép geometriai tulajdonságainak köszönhető. Széleskörű alkalmazhatósága miatt ennek a témának az alapjait azoknak a matematikusoknak is érdemes megismerniük, akik nem kifejezetten ezzel a területtel foglalkoznak.

Az érintett témakörök:

- A Monge-probléma
- A Kantorovich-probléma
- A Kantorovich–Rubinstein-dualitás
- Szükséges és elégséges optimalitási feltételek
- Optimális transzportleképezések létezése és alkalmazások
- Az optimális transzport metrikus oldala
- Optimális transzport a számegeyenesen
- Wasserstein-terek geometriája
- Analízis metrikus tereken és az optimális transzport dinamikus megfogalmazása
- Gradiens-áramok

Ajánlott irodalom:

[1] L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savare, Gradient Flows: In Metric Spaces and in the Space of Probability Measures (Lectures in Mathematics. ETH Zürich).

[2] L. Ambrosio, E. Brué, D. Semola, Lectures on Optimal Transport, Springer Nature, La Matematica per il 3+2, 2021.

[3] A. Figalli, F. Glaudo, An invitation to optimal transport, Wasserstein distances, and gradient flows. EMS Textbooks in Mathematics. EMS Press, Berlin, 2021.

### **MAT/477 Méréselmélet**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

Csapodi Csaba

Tárgy rövid leírása:

A kurzus célja, hogy a résztvevők mélyreható elméleti és gyakorlati ismereteket szerezzenek a pedagógiai mérések területén. A tematikában helyet kapnak a méréselmélet alapjai, a validitás és reliabilitás fogalmi, a mérési eszközök tervezése és alkalmazása, valamint a teszteredmények statisztikai elemzése. Külön hangsúlyt kapnak a képesség- és kompetenciamérések, a diagnosztikai és adaptív mérések, illetve az inkluzív és etikai megközelítések. A hallgatók a gyakorlatban is kipróbálhatják a tanultakat, saját mérési eszközök fejlesztésével és értékelésével. A kurzus hozzájárul a pedagógiai mérési eszközök tudatos és tudományos alkalmazásához, valamint a kutatási kompetenciák elmélyítéséhez.

A főbb témakörök:

- Bevezetés a méréselméletbe
- A mérés elméleti alapjai
- Mérési skálák és adatok

- Tesztelmélet alapjai
- Validitás és reliabilitás
- Pedagógiai mérések tervezése
- Mérések értékelése és eredmények interpretációja
- Pedagógiai diagnosztika és adaptív mérések
- Képességmérés és kompetenciaértékelés
- Etikai kérdések és inkluzív mérések
- Kutatás a pedagógiai mérések területén

#### Ajánlott irodalom

1. Aiken, L. R. (2009). Psychological Testing and Assessment. Pearson Education.
2. Nitko, A. J., & Brookhart, S. M. (2010). Educational Assessment of Students. Pearson, New York.
3. Csapodi Csaba (2017). A matematika érettségi vizsga elemzése. Doktori értekezés, Debreceni Egyetem.
4. OECD jelentések (pl. PISA, TALIS).
5. Magyarország mérések elemzése (kompetenciamérés, érettségi vizsga)

### **MAT/478 Statisztikus tanuláselmélet és kernel-módszerek**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

Csáji Balázs Csanád

#### Tárgy rövid leírása:

A kernel módszerek a nemparaméteres statisztika és a statisztikus tanuláselmélet alapvető eszközei. Tipikus alkalmazásai, például, az osztályozás, a regresszió, a sűrűségfüggvény becslés és a dimenzió csökkentés. Elméleti alapjaik szempontjából kiemelten fontosak a reprodukáló magú Hilbert terek (RKHS). A tantárgy célja bevezetést adni a statisztikus tanuláselmélet és a kernel módszerek elméletébe, különös tekintettel a felügyelt- ill. felügyelet nélküli (gépi) tanláshoz kapcsolódó megközelítésekre. Az elsajátítandó törzsanyag:

Reprodukáló magú Hilbert terek (RKHS). Moore-Aronszajn tétel. Minimális normájú interpoláció. Reprerentációs tétel regularizációval. Mercer tétel. Vektor-értékű RKHS. Operátor-értékű kernelek. Regressziós függvény nemparaméteres becslése. Torzítás vs variancia. Kernel trükk: statisztikai és gépi tanulási módszerek kernelizálása. Kernelizált lineáris- és logisztikus regresszió. Kernelizált szupport vektor klasszifikáció és regresszió. Kernel főkomponens analízis. Gyenge és erős konzisztencia. Stone tétele. Rekurzív kernel regresszió. Koncentrációs egyenlőtlenségek, például, McDiarmid, tapasztalati Bernstein. Egyenletes stabilitás. Garanciák általánosításra, PAC korlátok. Bochner integrál. Univerzális és karakterisztikus kernelek. Feltételes valószínűségi eloszlások RKHS-ekbe ágyazása.

#### Irodalom:

1. Berlinet, A. & Thomas-Agnan, C.: Reproducing Kernel Hilbert Spaces in Probability and Statistics, Kluwer Academic Publishers, 2004
2. Schölkopf, B., & Smola, A. J.: Learning with Kernels, The MIT Press, 2002
3. Paulsen, V. I. & Raghupathi, M.: An Introduction to the Theory of Reproducing Kernel Hilbert Spaces, Cambridge University Press, 2016
4. Cucker, F. & Zhou, D. X.: Learning Theory, Cambridge University Press, 2007
5. Györfi, L., Kohler, M., Krzyzak, A. & Walk, H.: A Distribution-Free Theory of Nonparametric Regression, Springer Series in Statistics, Springer, 2002

### **MAT/479 Markov döntési folyamatok és megerősítéses tanulás**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

Csáji Balázs Csanád

#### Tárgy rövid leírása:

A Markov döntési folyamatok (MDP), bizonytalan és dinamikusan változó környezetekben való

szekvenciális (állapot- és költség-visszacsatolások alapján való) döntéshozás modelljei. Az MDP-k képezik a megerősítéses tanulás – amely a gépi tanulás egyik fő ága – elméleti alapjait, de MDP-eket széleskörben használnak számos egyéb területen is, például az irányításelméletben és a pénzügyi matematikában. A kurzus célja, az MDP-k alapvető modelljeinek (például, sztochasztikus legrövidebb út, diszkontált- és ergodikusság, költségek, többkarú-rabló problémák) és megoldó módszereinek – beleértve a modell-független, megerősítéses tanulási algoritmusokat – megismertetése. Az elsajátítandó törzsanyag:

Diszkrét- és Borel Markov döntési folyamatok (MDP-k). Irányítási politikák (stratégiák) és értékelőfüggvények. Bellman operátorok és Bellman egyenletek. Véges horizontú-, sztochasztikus legrövidebb út-, diszkontált- és átlagos-költségű problémák. Monotonitási- és kontrakciós tulajdonságok. Blackwell optimalitás. Dinamikus programozás diszkrét- és Borel MDP-kben. Demonstratív példák: eszköz eladás, készletgazdálkodás, és lineáris-kvadratikus regulátor. Érték iteráció és változatai. Politika iteráció és változatai. Lineáris programozás véges MDP-kre. Modell-független megerősítéses tanulási módszerek. Monte Carlo politika kiértékelés. SARSA, TD- és Q-tanulás. Felfedezés-kihasználás dilemma. Sztochasztikus többkarú rabló problémák. UCB és változatai. Sztochasztikus approximáció alapjai.

Irodalom:

1. Bäuerle, N. & Rieder, U.: Markov Decision Processes with Applications to Finance, Springer, 2011
2. Bertsekas, D. P.: Dynamic Programming and Optimal Control, 4th, Athena Scientific, 2017
3. Feinberg, A. E. & Shwartz, A.: Handbook of Markov Decision Processes, Kluwer, 2002
4. Bertsekas, D. P., & Tsitsiklis, J. N.: Neuro-Dynamic Programming, Athena Scientific, 1996
5. Lattimore, T., & Szepesvári, Cs.: Bandit Algorithms, Cambridge University Press, 2018

### **MAT/480 Átdarabolások (a Banach-Tarski-paradoxon) 1**

6 kredit, elmélet, nem ismételhető

Laczkovich Miklós

Tárgy rövid leírása:

A Banach-Tarski-paradoxon a matematika egyik legmeglepőbb eredménye. Azt állítja, hogy egy háromdimenziós gömb véges sok résszel átdarabolható egy kétszer akkora gömbbe: illetve általánosabban, hogy a térben bármely két korlátos halmaz átdarabolható egymásba, ha a halmazok belseje nem üres. Valójában a Banach-Tarski-paradoxon csak egyike azoknak a paradoxonoknak, amelyek a „végtelen paradoxonát” geometriai formába öntik, és amelyeket Felix Hausdorff, a lengyel iskola tagjai és Neumann János fedeztek fel 1912 és 1929 között. Ezek valódi jelentőségét az adja, hogy szoros kapcsolatban állnak az invariáns mértékek elméletével. A pontos kapcsolatot Tarski tétele írja le, amely szerint, igen általános értelemben, az átdarabolásos paradoxonok lehetetlensége ekvivalens az invariáns mértékek létezésével. A téma vonzerejét – a paradoxonok érdekességén túl – részben az adja, hogy eszközeiben számos terület (halmazelmélet, mértékelmélet, geometria, algebra, diszkrét matematika, számelmélet) eredményeit használja fel, nem egyszer egyetlen bizonyítás során.

Irodalom:

- G. Tomkowicz and S. Wagon: The Banach-Tarski paradox. Second edition. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 163. Cambridge University Press, New York, 2016.  
M. Laczkovich, Paradoxes in measure theory. In: Handbook of Measure Theory. Elsevier, 2002. Vol. I, 83-123.

### **MAT/481 Átdarabolások (a Banach-Tarski-paradoxon) 2**

6 kredit, elmélet, nem ismételhető

Laczkovich Miklós

Tárgy rövid leírása:

A Banach-Tarski-paradoxon a matematika egyik legmeglepőbb eredménye. Azt állítja, hogy egy háromdimenziós gömb véges sok résszel átdarabolható egy kétszer akkora gömbbe:

illetve általánosabban, hogy a térben bármely két korlátos halmaz átdarabolható egymásba, ha a halmazok belseje nem üres. Valójában a Banach-Tarski-paradoxon csak egyike azoknak a paradoxonoknak, amelyek a „végtelen paradoxonát” geometriai formába öntik, és amelyeket Felix Hausdorff, a lengyel iskola tagjai és Neumann János fedeztek fel 1912 és 1929 között. Ezek valódi jelentőségét az adja, hogy szoros kapcsolatban állnak az invariáns mértékek elméletével. A pontos kapcsolatot Tarski tétele írja le, amely szerint, igen általános értelemben, az átdarabolásos paradoxonok lehetetlensége ekvivalens az invariáns mértékek létezésével.

A téma vonzerejét – a paradoxonok érdekességén túl – részben az adja, hogy eszközeiben számos terület (halmazelmélet, mértékelmélet, geometria, algebra, diszkrét matematika, számelmélet) eredményeit használja fel, nem egyszer egyetlen bizonyítás során. Az előadás az ún. körnégyszögesítés problémáját is tárgyalja. Ennek hátterét az adja, hogy mivel a síkban létezik olyan végesen additív mérték, amely invariáns az egybevágóságokra nézve, így ott a Banach-Tarski-paradoxonnak nincs megfelelője: ha két alakzat átdarabolható egymásba, akkor a területük egyenlő. A „körnégyszögesítés” ennek a megfordítása: ha két alakzat területe egyenlő, akkor – az alakzatok határaitra vonatkozó gyenge feltételek mellett - a két alakzat átdarabolható egymásba. Az elmúlt évtizedekben ennek az állításnak egyre élesebb formáját találták meg. Az első eredmény a felbontások részeire nem szolgált információval. Később kiderült, hogy az átdarabolás mérhető részekkel is lehetséges, és ma már tudjuk, hogy a részek Borel-mérhetőek is lehetnek (ha maguk a halmazok azok, ismét feltéve, hogy a határaik elég szépek).

Irodalom:

G. Tomkowicz and S. Wagon: The Banach-Tarski paradox. Second edition. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 163. Cambridge University Press, New York, 2016.

M. Laczkovich, Paradoxes in measure theory. In: Handbook of Measure Theory. Elsevier, 2002. Vol. I, 83-123.

### **MAT/482 Differenciáltopológia I.**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

Terpai Tamás

Tárgy rövid leírása:

Whitney beágyazási tételek.

Homotopikus hosszú egzakt sorozat.

Fibrált nyalábok, fibrálás hosszú egzakt sorozata.

Jet-nyalábok, jet-transzverzálitási tétel.

Morse-elmélet.

Kobordizmus.

Pontrjagin-Thom konstrukció.

Irodalom:

Allen Hatcher: Algebraic topology

### **MAT/483 Differenciáltopológia II.**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

Terpai Tamás

Tárgy rövid leírása:

Eilenberg-MacLane terek, obstrukcióelmélet.

Alkalmazás: minden irányítható 3-sokaság parallelizálható.

Hirsch-tétel, összenyomási/kiegyenesítési tétel. Smale-invariáns.

Gömbök stabil homotopikus csoportjai, Arf-invariáns, j-homomorfizmus.

Whitney-trükk, h-kobordizmus tétel.

Kobordizmus és karakterisztikus számok.  
Egzotikus gömb konstrukció.

Irodalom:

J. Milnor: Lectures on the h-cobordism theorem, notes by L. Siebenmann and J. Sondow, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1965.

### **MAT/484 Homológia**

6 kredit, elmélet, nem ismételhető

Fehér László

Tárgy rövid leírása:

Topologikus terek szinguláris  
homológiacsoportjai és kohomológiagyűrűje. Alaptulajdonságok.  
Cw-komplexusok homológiája,  
alkalmazások: nullosztómentes algebrák

Irodalom:

Fehér László: Homológia jegyzet

Allen Hatcher. Algebraic topology. 2002.

### **MAT/485 Vektornyalábok és karakterisztikus osztályok**

6 kredit, elmélet, nem ismételhető

Fehér László

Tárgy rövid leírása:

Vektornyalábok, principális  $SG$ -nyalábok,  
irányítás, Thom osztály, klasszifikáló terek  
karakterisztikus osztályok,  
poincaré dualitás, részsokaság kohomológiaosztálya.  
alkalmazások: Projektív terek immerziói, néhány leszámllási feladat algebrai geometriából.

Irodalom:

Fehér László: Karakterisztikus osztályok jegyzet

Allen Hatcher. Algebraic topology. 2002.

Allen Hatcher. Vector Bundles and K-theory. 2009.

John Milnor and James D. Stasheff: Characteristic Classes

<https://aareyanmanzoor.github.io/assets/books/characteristic-classes.pdf>

### **MAT/486 Mérhető kombinatorika**

6 kredit, elmélet, nem ismételhető

Vidnyánszky Zoltán

Tárgy rövid leírása:

Az utóbbi években a végtelen, definiálható gráfok vizsgálata igencsak aktív területté vált, mely szorosan kapcsolódik kombinatorikához, leíró halmazelmélethez, csoportelmélethez, sőt az elosztott számítógépes hálózatok vizsgálatához is. A terület legfontosabb eredményei közé tartozik a mérhető körnégyszögesítés, a cost-elmélet illetve a Borel kromatikus számok vizsgálata. A kurzus célja, hogy bevezetést nyújtson ebbe a témakörbe.

A kurzuson feldolgozandó témák:

-Borel kromatikus számok, bevezetés

-Borel kombinatorika és a LOCAL modell

-Graphingok, párosítások, a Lyons-Nazarov tétel  
-A  $G_0$  Dichotómia és alkalmazásai  
-Borel ekvivalencia-relációk  
-Végtelen játékok, Marks-tétele

Irodalom:

1. Kechris, A. S., & Marks, A. S. (2016). Descriptive graph combinatorics. preprint, 2020(9).
2. Bernshteyn, A. (2022). Descriptive combinatorics and distributed algorithms. Notices of the American Mathematical Society, 69(9).
3. Marks, A. S. (2022). Measurable graph combinatorics. In Proc. Int. Cong. Math (Vol. 3, pp. 1488-1502).

### **MAT/487 Miért nem elemi függvény $(\sin x)/x$ integrálja?**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

Laczkovich Miklós

Tárgy rövid leírása:

Ismeretes, hogy a határozatlan integrálokat kiszámító módszerek nem mindig vezetnek eredményre, amennyiben számos elemi függvény határozatlan integráljára nem sikerül képletet találni. Csak a 19. században, Liouville munkássága nyomán vált világossá, hogy valóban vannak olyan elemi függvények, amelyek integrálja nem elemi. Liouville komplex függvénytani módszereket használt ennek bizonyítására. A Liouville-elmélettel kapcsolatban Ostrowski alkalmazott először algebrai módszereket az 1940-es években, majd M. Rosenlicht 1968-ban tisztán algebrai módszereket használva megmutatta, hogy Liouville tételei a differenciáltestek körében is érvényesek. Rosenlicht elméletét többen általánosították, illetve egyszerűsítették. Az előadásban ezt az algebrai elméletet ismertetjük a szükséges algebrai háttérrel együtt (testbővítések, Galois-elmélet, differenciáltestek).

Irodalom:

M. Rosenlicht, Liouville's theorem on functions with elementary integrals, Pacific J. Math. 24 (1968), 153-161.

Manuel Bronstein: Symbolic Integration I. Springer, 2005

### **MAT/488 Sokszögek kirakásai**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

Laczkovich Miklós

Tárgy rövid leírása:

A sokszögek átdarabolhatóságának témája az ókori görög matematikával kezdődik. Euklidész a területegyenlőségeket átdarabolásokkal bizonyítja (parallelogrammák, háromszögek területe, Pitagorasz-tétel). Hasonlóan határozható meg a szabályos 12-szög területe (ez a híres Kürschák-féle átdarabolás). A sokszögek területegyenlősége mindig bizonyítható átdarabolással (ez a Bolyai-Gerwien-tétel).

Érdekes kérdésekhez jutunk, ha akár a részeket, akár az alkalmazott transzformációkat megszorítjuk. Mely sokszögpárok darabolhatóak egymásba csak eltolások segítségével? Ez a probléma az invariánsok bevezetéséhez vezet, ami sok alkalmazásban hasznos. Egy invariáns segítségével válaszolta meg Max Dehn Hilbert kérdését, hogy egy tetraéder mindig átdarabolható-e egy kockába poliéder részekkel. A részek megszorításával kapcsolatos kérdések: Mely téglalappárok darabolhatóak egymásba négyzet részekkel? Felbontható-e a négyzet (vagy általában egy szabályos sokszög) egy adott háromszöghöz hasonló (vagy azzal egybevágó) részekre? Itt sok megválaszolatlan kérdésbe ütközünk.

A felbontásokban szereplő részek száma is sok kérdést vet fel. Milyen  $k$ -ra bontható fel minden (valamely) háromszög  $k$  hasonló háromszögre? Milyen  $k$ -ra bontható fel minden (valamely) háromszög  $k$  egybevágó háromszögre? Ha az egybevágó részekről azt is feltesszük, hogy hasonlóak az eredeti háromszöghöz, akkor a részek számáról az derül ki, hogy csak négyzetszám, két négyzetszám összege, vagy pedig egy négyzetszám háromszorosa

lehet. Hasonló kérdések néha mély számelméleti problémákhoz vezetnek.

Egy  $P$  alakzatot önhasznónak nevezünk, ha felbontható olyan részekre, amelyek hasonlóak Phez. Ha a részekről még azt is feltesszük, hogy egybevágók, akkor azt mondjuk, hogy  $P$  reptile, ami a replicative tiling (önismétlő kirakás) rövidítése. Az önhasznó alakzatoknak és a reptile-oknak a vizsgálatát részben a szórakoztató matematika, részben pedig a dinamikus rendszerek elmélete motiválta. A konvex alakzatok körében sok a megválaszolatlan kérdés. Minden konvex önhasznó halmaz sokszög, mégpedig háromszög, négyszög vagy ötszög. Azonban az önhasznó négyszögek meghatározása egyelőre nyitott, az pedig régóta megoldatlan, hogy van-e egyáltalán önhasznó konvex ötszög. A konvex reptile-ok még rejtélyesebbek: csak öt olyan konvex reptile-t ismerünk, ami nem háromszög vagy paralelogramma, és nem tudjuk, hogy van-e még, illetve hogy csak véges sok ilyen alakzat létezik-e.

Irodalom:

G. N. Frederickson: Dissections. Cambridge University Press, 1997.

M. Laczkovich: Conjecture and proof. Mathematical Association of America, 2001.

**MAT/489 Valós függvénytan érdekességek**

6 kredit, elmélet, nem ismételtető

Laczkovich Miklós

Tárgy rövid leírása:

Az előadás célja olyan eredmények bemutatása, amelyek nem szerepelnek a reguláris tananyagban, de amelyek érdekesek, fontosak, és (az előadó megítélése szerint) egy tájékozott matematikus általános műveltségéhez kell, hogy tartozzanak. Témák, amelyekből az előadás válogat: A Descartes-féle jelszabály; a kategória-tétel valós függvénytan alkalmazásai; azon folytonos függvények vizsgálata, amelyek minden értéket legfeljebb  $k$ -szor vesznek fel, illetve amelyek grafikonja minden egyenest legfeljebb  $k$  pontban metsz; Blumberg tétele (minden valós függvény folytonos egy alkalmas sűrű halmazra megszorítva); a monotonitási tétel; additív függvények és a differencia-tulajdonság; Sturm tétele a polinomok gyökeinek lokalizálásáról; nagyságrendek; a logaritmikusan-exponenciális függvények nagyságrendje (du Bois-Reymond tétele); Tarski tétele a valós számok elsőrendű elméletének eldönthetőségéről; algebrai differenciálegyenletek; többváltozós folytonos függvények előállítás egyváltozós függvényekkel (Kolmogorov tétele).

Irodalom:

Pólya György és Szegő Gábor: Feladatok és tételek az analízis köréből I-II. Tankönyvkiadó, 1980.

L. Gårding: Some points of analysis and their history. Univ. Lecture Ser., 11. American Mathematical Society, 1997.

R. P. Boas: A primer of real functions. Fourth edition. Carus Math. Monogr., 13 Mathematical Association of America, 1996.

**MAT/490 Válogatott fejezetek az analízisből**

6 kredit, gyakorlat, nem ismételtető

Elekes Márton

Tárgy rövid leírása:

Hausdorff-mérték és Hausdorff-dimenzió. Lebesgue és Hausdorff-mérték kapcsolata. Ívhossz és 1-dimenziós Hausdorff mérték kapcsolata. Hausdorff metrika. Önhasznó halmazok, fraktálok. Haar-mérték, létezés és egyértelműség. Pontrjagin dualitás és a lokálisan kompakt csoportok struktúrája. Absztrakt Fourier-analízis. Kompakt csoport eltolásainak ergodikusága. A Haar-nullmértékűség általánosítása nem lokálisan kompakt csoportokra. Tipikus (generikus) objektumok. Lipschitz függvények, Rademacher és Kirschbraun tételei.

Ajánlott irodalom:

K.J. Falconer: The Geometry of Fractal Sets, CUP, 1985

Laczkovich Miklós: Valós függvénytan (egyetemi jegyzet), ELTE Budapest, 1995

P. R. Halmos: Mértékelmélet, Gondolat, 1984.

**A Matematika Doktori Iskola komplex vizsga tárgyai tanulmányait 2025 szeptemberében kezdőkre vonatkozóan:**

- tárgyak:

Alkalmazott matematikából főtárgyként -:

1. Sztochasztika (Valószínűségszámítás)
2. Sztochasztika (Statisztika)
3. Sztochasztika (Sztochasztikus folyamatok)
4. Operációkutatás (Kombinatorikus optimalizálás)
5. Operációkutatás (Diszkrét optimalizálás és alkalmazásai)
6. Operációkutatás (Folytonos optimalizálás)
7. Numerikus módszerek
8. Közönséges differenciálegyenletek
9. Parciális differenciálegyenletek
10. Funkcionálanalízis
11. Adattudomány és gépi tanulás

Alkalmazott matematikából melléktárgyként -:

1. Nemparaméteres módszerek
2. Idősorok statisztikai elemzése
3. Többdimenziós statisztikai módszerek
4. Élettartam-adatok elemzése
5. Valószínűségi mértékek, valószínűségi változók
6. Független valószínűségi változók összegei
7. Martingálelmélet
8. Információelmélet
9. Markov-láncok, Markov-folyamatok
10. Stacionárius folyamatok
11. Független növekményű folyamatok
12. Lineáris programozás
13. Nemlineáris programozás
14. Sztochasztikus programozás
15. Játékelmélet
16. Poliéderes kombinatorika
17. Kombinatorikus algoritmusok
18. Kombinatorikus optimalizálási struktúrák
19. Egészértékű programozás
20. Ütemezéselmélet és termelésirányítás
21. Approximációs algoritmusok
22. Interpoláció, függvények közelítése
23. Egyenletek és egyenletrendszerek numerikus megoldása
24. Közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása
25. Parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása
26. Közönséges differenciálegyenletek klasszikus elmélete és dinamikai rendszerek
27. Bifurkációelmélet, káosz, operátorfélcsoportok
28. Disztribúciók és Szoboljev-terek
29. Lineáris parciális differenciálegyenletek
30. Nemlineáris parciális differenciálegyenletek
31. A funkcionálanalízis néhány alapfogalma és tétele
32. Lineáris operátorok Hilbert-térben

33. Nemlineáris és numerikus funkcionálanalízis
34. Topologikus vektorterek, Banach-algebrák, harmonikus analízis
35. Adatbányászat
36. Statisztikai tanulásemélet
37. Mély tanulás
38. Nagy adathalmazok módszerei (Big Data)

Elméleti matematikából fő- és melléktárgyként - (eltérő tematikával, lásd a tárgyleírásokat):

1. Analízis (Valós függvénytan)
2. Analízis (Komplex függvénytan)
3. Analízis (Differenciálegyenletek)
4. Analízis (Funkcionálanalízis)
5. Geometria (Differenciálgeometria)
6. Geometria (Topológia)
7. Geometria (Diszkrét, kombinatorikus, véges és konvex geometria)
8. Sztochasztika (Valószínűségszámítás)
9. Sztochasztika (Sztochasztikus folyamatok)
10. Sztochasztika (Statisztika)
11. Algebra
12. Számelmélet
13. Diszkrét matematika
14. Halmazelmélet és matematikai logika
15. Kombinatorikus optimalizálás

A Matematikadidaktika programban:

- a főtárgy mindenkinek Matematikadidaktika,
- melléktárgy: az alkalmazott matematika és elméleti matematika program listájából választott bármelyik melléktárgy.

## AZ ISMERETEK ELLENŐRZÉSÉNEK RENDSZERE

A Matematika Doktori Iskolában a tanulmányi és a kutatási tevékenységekért, a beszámolóért, valamint oktatási tevékenységért szerezhetőek kreditpontok. A kurzusok teljesítését a tárgy előadója ötfokozatú skálán (1-2-3-4-5) értékeli (érdemjegy), és a Neptun rendszerben történő bejegyzéssel rögzíti. A kutatási tevékenységet a témavezető háromfokozatú skálán (kiválóan megfelelt; megfelelt; nem felelt meg) értékeli.

A kreditek teljesítését a Neptun rendszerbe történő bejegyzéssel rögzíti.

- a) Kontaktórák hallgatása. Egy kontaktóra hallgatásával és a hozzá tartozó vizsgával 3 kredit szerezhető. A képzés 8 féléve során minden hallgatónak legalább 48 kreditpontot kell szereznie kontaktórák hallgatásáért, amiből az Elméleti matematika program doktoranduszai számára legalább 24 kreditnyi kötelezően - tárgy teljesítése szükséges. A Matematikadidaktika program doktoranduszai számára 24 kreditnyi a matematikadidaktika területéről hallgatandó.
- b) Olvasókurzusok. Az olvasókurzus a témavezető irányításával, ellenőrzésével történik. Az olvasókurzusok teljesítéséért a 8 félév során összesen 48 (félévenként legfeljebb 6) kredit szerezhető. A kutatási és disszertációs szakaszban az olvasókurzus kutatási olvasókurzus címen szerepel.
- c) Irányított kutatómunka. Az irányított kutatómunka a témavezető irányításával végzett kutatás. Az irányított kutatómunkáért az első két évben félévenként legfeljebb 9, a harmadik és negyedik évben pedig félévenként legfeljebb 10 kredit szerezhető.

d) Beszámolók. A doktoranduszok az első, harmadik és negyedik évben beszámolnak a Matematika Doktori Iskola keretében éves teljesítményükről. Az első éves beszámolóért 10 kredit, a harmadik és negyedik évben tartott beszámolóért 15-15 kredit szerezhető.

e) Oktatási kredit. Egy heti 2 órás egy féléves kurzus (gyakorlat) oktatásáért 4 kredit szerezhető. A képzési és kutatási szakasz alatt (első 4 félév alatt) összesen 16 kredit adható oktatásért. Kivételes esetben egyéb oktatói munkáért (pl. dolgozatok javítása) is járhat kredit.

f) Konferenciárésztétel. Nemzetközi konferencián poszter kiállításáért/előadás tartásáért 4/8 kredit szerezhető. Ugyanezekért magyar nyelvű konferencián 2/4 kredit kapható. Egy hetes workshop-on való részvételért 6 kredit szerezhető.

g) Publikációk. Minden új tudományos eredményt tartalmazó publikációért, amely nemzetközi, valamely világnyelven publikáló és referált folyóiratban jelent meg vagy került elfogadásra, 10 kredit szerezhető. Egy új tudományos eredményt tartalmazó publikációnak az ArXiv-ba való feltöltéséért a témavezető ajánlásra 2 kredit kapható.

Minden doktorandusz a 8 féléves képzés 4. félévének végéig köteles legalább 108 kreditet szerezni. A képzés második ciklusában (azaz a 3. és 4. évben) minden doktorandusz köteles a fenti e), f), g) pontokban leírt kreditekből összesen legalább 28 kreditet szerezni.

A részképzés, áthallgatás, és kreditátvitel a fenti 2-3 pontokban leírtak alkalmazásával történik.

Áthallgatással a tanulmányi krediteknek maximálisan 30 százaléka szerezhető meg, míg kreditátvitellel maximálisan a kreditek 50 százaléka.

Előzetes teljesítmény a szervezett doktori képzés során általában nem számítható be. Az esetleges kivételtől – kérelem alapján – a Matematika Doktori Iskola Tanácsa dönt.

A védés feltétele előzetes kutatóhelyi vita vagy ennek hiányában a témavezető írásos értékelése és ajánlása.