

# ALKALMAZOTT MATEMATIKUS MESTERSZAK:

## ZÁRÓVIZSGAKÉRDÉSEK

azok számára, akik a képzést 2013-ban kezdték

(azok számára, akik a képzést 2013 előtt kezdték a 14. oldaltól)

### Szakmai törzsanyag kérdései

Választandó: 3 témakörből legalább 15 kreditnyi tárgy.

1. **Numerikus modellezés és közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldási módszerei I.** (kredit: 5) *Faragó István* TÉMAKÖR: Alkalmazott analízis

(a) Az egylépéses numerikus módszerek és vizsgálatuk. (Klasszikus módszerek, Runge-Kutta típusú módszerek. Konzisztencia. Stabilitási fogalmak, konvergencia. Egymásba ágyazott módszerek. Merev feladatok.)

(b) Adams típusú explicit és implicit módszerek, implicit differencia módszer.

2. **Nemlineáris funkcionálanalízis** (kredit: 6) *Karátson János*

TÉMAKÖR: Alkalmazott analízis

(a) Nemlineáris operátorok alapfogalmai. (Gâteaux- és Fréchet-derivált. Potenciál-operátorok, a potenciál fogalma és létezése. Monoton operátorok, konvex funkcionálok. Példa nemlineáris elliptikus operátorra.)

(b) Nemlineáris operátoregyenletek megoldhatósága. (Variációs elv, funkcionál minimumának létezése. Kvadratikus funkcionál. Megoldhatóság nem potenciális operátorra. Alkalmazás nemlineáris differenciálegyenletekre.)

(c) Közelítő módszerek. (Ritz-Galjorkin-féle projekciós módszerek lineáris és nem lineáris operátorokra. Iterációs módszerek: gradiens-módszer Hilbert-térben, Newton-Kantorovics-módszer és változatai Banach-térben.)

3. **Operátorfélcsoportok** (kredit: 6) *Bátkai András*

TÉMAKÖR: Alkalmazott analízis

(a) Motiváló példák (korlátos generátor, eltolás- és szorzás félcsoport, hővezetési egyenlet, stb.), alapfogalmak (generátor, rezolvens, Cauchy feladat, megoldásfogalmak), alaptulajdonságok és jóldefiniáltság, Laplace transzformáció.

(b) Generálási tételek (Hille-Yosida, Lumer-Phillips), perturbációs tételek.

(c) Spektrum és aszimptotika (spektrálleképezés-tételek, stabilitásfogalmak, Datko-Pazy, Gearhart, Arendt-Batty-Ljubics-Vu, Lutz tételei).

4. **Algoritmuselmélet I** (kredit: 5) *Király Zoltán*

TÉMAKÖR: Algoritmuselmélet

- (a) Rendezés, számolás, dinamikus programozás. (Középső elem, gyorsrendezés, leszámoló és számjegyes rendezés. Mod  $m$  számítások, prímtesztelés, gyors Fourier transzformáció, Schönhage-Strassen szorzás. Dinamikus programozás alkalmazásai.)
- (b) Legrövidebb és diszjunkt utak. (Dijkstra algoritmus és alkalmazásai, Bellman-Ford, Johnson, Floyd és Suurballe-Tarjan algoritmusok. Diszjunkt utak keresése.)
- (c) Párosítások, folyamok, hálózati kódok. (Hopcroft-Karp algoritmus, stabil házasság és variációi. Dinitz algoritmus, többtermékes folyamok. Lineáris hálózati kódok.)
- (d) Közelítő és FPT algoritmusok. (Approximációs sémák. Közelítő algoritmus lefogó csúcshalmazra, metrikus utazó ügynökre, Steiner fára, hátizsák feladatra, halmazfedésre. Fix paraméterrel megoldható feladatok, kernelek, példák.)

5. **Bonyolultságelmélet** (kredit: 5) *Grolmusz Vince*

TÉMAKÖR: Algoritmuselmélet

- (a) Randomizált, illetve párhuzamos számítások (választható)
- (b) Algebrai és egyszerű döntési fák, zárkózottság
- (c) Kolmogorov bonyolultság
- (d) Boole hálózatok, alsó becslések kismélységű hálózatokra
- (e) Interaktív bizonyítások
- (f) Tárkorlátos számítások, polinomiális hierarchia, hierarchia-tételek

6. **Diszkrét és folytonos paraméterű Markov-láncok** (kredit: 2) *Prokaj Vilmos (Csiszár Villő)*

TÉMAKÖR: Sztochasztikus folyamatok

- (a) Alapfogalmak. Ergodikus Markov láncokra vonatkozó tételek. Stacionárius eloszlás és reguláris mérték, megfordított láncok.
- (b) Véges állapotterű Markov láncok, Perron–Frobenius-tételek. A konvergencia-sebesség becslése. MCMC-módszerek.
- (c) Folytonos paraméterű Markov láncok infinitezimális generátora. Születési-halálózási folyamatok. A Kolmogorov-féle differenciálegyenletek megoldhatósága.

7. **Sztochasztikus folyamatok** (kredit: 6) *Prokaj Vilmos*

TÉMAKÖR: Sztochasztikus folyamatok

- (a) Wiener folyamat: konstrukció, Donsker tétel, tükrözési elv, erős Markov tulajdonság. Maximum és a szintelérési idő eloszlása.
- (b) Sztochasztikus integrál, kvadratikus variáció, Ito formula, Lévy karakterizáció, Girsanov tétel.
- (c) Sztochasztikus differenciálegyenletek, erős és gyenge megoldás, eloszlásbeli és trajektóriánkénti unicitás. Tételek a megoldás létezéséről és unicitásáról.

8. **Stacionárius folyamatok** (kredit: 5) *Prokaj Vilmos*

TÉMAKÖR: Sztochasztikus folyamatok

- (a) Stacionárius folyamatok. Kovariancia függvény. Bochner-Hincsin-tétel. (Herglotz-tétel) Spektrálelőállítás.
- (b) Karhunen-Loeve-sorfejtés, Kotelnjikov-Shannon-tétel - a mintavételezés sűrűsége.
- (c) Wold-felbontás. Teljesen reguláris és szinguláris folyamatok.
- (d) Stacionárius folyamatok várható-értékének és kovariancia-függvényének becslése.

9. **Speciális sztochasztikus folyamatok** (kredit: 2) *Michaletzky György*

TÉMAKÖR: Sztochasztikus folyamatok

- (a) Felújítási folyamatok. A felújítási függvény, felújítási egyenlet. A megoldás egyértelműsége. A felújítási folyamat aszimptotikus viselkedése (1 valószínűségű konvergencia.). A felújítási függvény aszimptotikus viselkedése. A felújítási tétel. Speciális indítás esetén a pontos megoldás, illetve a hátralévő élettartam.
- (b) Elágazó folyamatok. Diszkrét paraméterű eset. A kihalás valószínűsége. A várható értékkel normalizált folyamat aszimptotikus viselkedése, a határérték várható értéke. Folytonos paraméterű eset. A populáció nagyságának időbeli alakulására vonatkozó differenciálegyenletek. A kihalás valószínűsége.

10. **Diszkrét matematika I.** (kredit: 5) *Lovász László (Sziklai Péter)*

TÉMAKÖR: Diszkrét matematika

- (a) Gráfelmélet: Párosításelmélet. Többszörös összefüggőség. Erősen reguláris gráfok. Regularitási lemma. Síkbarajzolhatóság, gráfminorok.
- (b) Leszámláló kombinatorika: Generátorfüggvények, inverziós formulák részben rendezett halmazokon, rekurziók. Mechanikus összegzés. Klasszikus gráfelméleti leszámolások, fák, feszítő fák száma.
- (c) Algebrai és véletlen módszerek: A lineáris algebrai módszer, extrémális halmazrendszerek. Véges testek, kombinatorikus Nullstellensatz. Várható érték és második momentum módszer. Véletlen gráfok, küszöbfüggvény.

11. **Diszkrét optimalizálás** (kredit: 6) *Frank András*

TÉMAKÖR: Operációkutatás

- (a) Gráfok a diszkrét optimalizálásban. (Legrövidebb utak: Konzervatív súlyozás, megengedett potenciál. Folyamok és áramok: Max-folyam/Min-vágás, Hoffman tétele. Párosítások: Kőnig és Egerváry tételei, a Berge-Tutte-formula, Edmonds-Gallai. Menger és Dilworth tételei. Algoritmusok: Magyar módszer, Edmonds párosítási algoritmus. Legolcsóbb fenők.)
- (b) Matroidok a diszkrét optimalizálásban. (Ekvivalens axiómarendszerek, rangfüggvény, szétbonthatóság. Matroidosztályok, a duális matroid. Mohó algoritmus. Metsettétel és Összeztétel.)

- (c) Lineáris programozás a diszkrét optimalizálásban. (Farkas-lemma és dualitástétel teljesen unimoduláris feltételi mátrixok esetén, alkalmazásokkal: irányított kínai postás, egyenletes színezés. Egész poliéderek Edmonds és Giles féle jellemzése.)

12. **Folytonos optimalizálás** (kredit: 6) *Illés Tibor*

TÉMAKÖR: Operációkutatás

- (a) Lineáris programozás. (Konvex poliéderek, konvex kúpok. Alternatíva tételek. Megengedettség feladatok tulajdonságai és megoldása: criss-cross algoritmus, MBU-szimplex módszer. Végesen generált kúpok és polárisuk: Weyl-, Minkowski- és Farkas-tétel. Lineáris programozás erős dualitástétele és pivot algoritmusai.)
- (b) Polinomiális algoritmus a lineáris programozási feladat megoldására: teljes Newton-lépéses, logaritmikusan büntetőfüggvényes algoritmus. (Primál-duál lineáris programozási feladatpár. Belsőpont-megoldás, optimalitási kritériumok, centrális út, Newton-rendszer, megengedett lépéshossz, centralitás-mértéke, dualitás rész és csökkenésének a mértéke, Ling lemmái, konvergenciatétel.)
- (c) Konvex optimalizálás dualitáselmélete. (Konvex Farkas lemma, regularitási feltételek. Primál konvex optimalizálási feladat, Lagrange-függvény. Lagrange-féle nyeregpontfeladat és kapcsolódó tételek. Karush–Kuhn–Tucker-tétel, Lagrange-féle duál feladat, gyenge dualitástétel. Erős dualitástétel.)

## Differenciált szakmai anyag kérdései: alkalmazott analízis szakirány

Választandó: legalább 20 kreditnyi tárgy.

1. **Modellalkotás és természettudományos alkalmazások** (kredit: 6) *Izsák Ferenc*
  - (a) A diffúzió modellezése. Feltevés a diffúzióban szereplő fluxusról, felírás rendszerként. A modell matematikai tulajdonságai. Példák jelenségekre, amelyeket ezzel modellezünk.
  - (b) Áramlási feladatok modellezése egyszerű advekcióval. A karakterisztikák jelentése. A megmaradási törvények használata, kapcsolat a Gauss-tétellel. Az ismeretlen mennyiségek típusa. A Navier-Stokes egyenletek valamilyen egyszerű alakja.
  - (c) Kémiai reakciók tömeghatás típusú modellje. Feltevések a modellben. Példák egyszerű reakciókra. A megfelelő kinetikai differenciálegyenlet felírása, matematikai tulajdonságai.
2. **Elliptikus parciális differenciálegyenletek numerikus módszerei és alkalmazásai I.** (kredit: 6) *Karátson János*
  - (a) A véges differenciák módszere. (A módszer 1 és 2 dimenzióban intervallumon ill. négyzeten, konstrukció és konvergencia. A kapott lineáris rendszer megoldhatósága, M-mátrixok. Általános tartomány és magasabb dimenzió esete. A konvergencia rendje.)
  - (b) A végeselem-módszer. (A módszer elméleti alapjai, konstrukció 1 és magasabb dimenzióban. Nevezetes bázisfüggvények. A konvergencia és becslései, rendje.)
  - (c) A többrácsos (multigrid-)módszer. (A módszer alapelve. Simító iterációk, V- és W-ciklusok. A módszer konvergenciája.)
3. **Időfüggő parciális differenciálegyenletek numerikus módszerei és alkalmazásai I.** (kredit: 5) *Izsák Ferenc*
  - (a) Teljes diszkretizáció és szemidiszkretizáció. Az ezekkel kapott egylépéses sémák norma-konzisztenciájának és (feltételes) stabilitásának fogalma. A Lax-féle ekvivalenciatétel.
  - (b) Stabilitásvizsgálati módszerek: elégséges feltétel stabilitásra, vizsgálat Fourier-transzformációval és Gersgorin-tétellel. Nevezetes eredmények az diffúziós egyenletre vonatkozó explicit sémákra, explicit upwind és downwind sémák stabilitása állandó együtthatós áramlási feladatokra. A Crank-Nicolson-séma és tulajdonságai.
  - (c) ADI típusú sémák és stabilitásuk. A Lax-Wendroff-séma. Probléma a peremfeltételekkel az advekciós feladat esetében. A periodikus peremfeltételhez tartozó lépésmátrixok szerkezete.
4. **Dinamikai rendszerek és differenciálegyenletek I.** (kredit: 6) *Simon Péter*

- (a) Dinamikai rendszerek ekvivalenciái. Lineáris rendszerek topologikus osztályozása. Normálforma elmélet, a rezonancia fogalma.
- (b) Lokális vizsgálat egyensúlyi pontban. Hartman-Grobman tétel. Stabil és instabil sokaság tétel. Centrális sokaság és redukciós tétel.
- (c) Periodikus megoldások. Feltételek periodikus pálya létezésére és nem létezésére két-dimenzióban. Periodikus pálya stabilitása. Az index alkalmazása a fáziskép vizsgálatára.
- (d) Diszkrét dinamikai rendszer periodikus megoldásai. Periódus kettőződés. A kaotikus pálya fogalma. Szimbolikus dinamika alkalmazása kaotikus pálya létezésének bizonyítására. A logisztikus és a sátor leképezés.

**5. Lineáris parciális differenciálegyenletek** (kredit: 6) *Simon László*

- (a) Szoboljev-terek: Fourier-transzformáció, kiterjesztési operátor, nyom operátor.
- (b) Lineáris elliptikus peremérték-feladatok gyenge megoldása, sajátérték-feladat. A peremérték-feladatok és sajátérték-feladatok variációs értelmezése.
- (c) Kezdeti-peremérték-feladatok lineáris hiperbolikus és parabolikus egyenletekre: a gyenge megoldás egyértelmősége, létezése: Fourier-módszer, Galjorkin-módszer.

**6. Numerikus modellezés és közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldási módszerei II.** (kredit: 4) *Faragó István*

- (a) Általános alakú lineáris többlépéses numerikus módszerek és vizsgálatuk. Konzisztencia és rendje, stabilitás, konvergencia. Prediktor-korrektor típusú módszerek.)
- (b) A kétpontos peremérték-feladatok numerikus megoldása. (Belövéses módszerek, többszörös belövéses módszerek. Véges differenciák módszere lineáris feladatokra, konvergencia.)

## Differenciált szakmai anyag kérdései: sztochasztika szakirány

Választandó: legalább 20 kreditnyi tárgy.

### 1. Idősorok elemzése 1 (kredit: 6) Márkus László

- (a) Stacionárius folyamatok alapfogalmai. Autokorreláció. Spektrálelőállítás, spektrálsűrűségfüggvény. Stacionárius folyamatok modelljei: autoregressziós (AR(p)), mozgóátlag (MA(q)), ARIMA(p,d,q), ARCH(p), GARCH(p,q), bilineáris, véletlen együtthetős AR, és a SETAR folyamatok, stacionaritása és a stacionárius eloszlás tulajdonságai. Sztochasztikus rekurziós egyenletek stacionárius megoldásának létezési feltétele Ljapunov-exponenssel, Kesten-Vervaat-Goldie tétel reguláris változású eloszlással bíró stacionárius megoldás létezéséről, alkalmazás ARCH(1)-re.
- (b) Idősorok becslésmélete: Az átlag és az autokovariancia függvény becslése, tulajdonságai és határeloszlása (ARCH eset is). Paraméterbecslés AR és MA folyamatra. Rendszelektió Akaike és Bayes információs kritériumok. A periodogram a diszkrét spektrum becslésére, Fisher-teszt. Spektrálsűrűségfüggvény becslése ablakolással, tulajdonságok. Előfehérítés módszere, CAT kritérium.

### 2. Pénzügyi folyamatok 1 (kredit: 3) Arató Miklós

- (a) Európai opció ára, piacok arbitrázsmentessége, teljessége, eszközárzás első és második alaptétele diszkrét idejű részvény-kötvény piacon. Teljesség, ármérce pár, "market price of risk" folyamat és a martingál mérték kapcsolatai. A Black-Scholes piac teljessége.
- (b) Amerikai opció ára diszkrét idejű kereskedésben. Példa nem teljes piacra, és eszközárak nem teljes diszkrét idejű piacon. A Black-Scholes formula mint a Cox-Ross-Rubinstein árazás határértéke. Több részvényes Black-Scholes modell teljessége.

### 3. Pénzügyi folyamatok 2 (kredit: 3) Arató Miklós

- (a) A Black-Scholes differenciálegyenlet, kapcsolat a Feynman-Kac formulával. PIDE az ugró folyamatok esetén, pszeudodifferenciál operátorral. Amerikai opció ára szintátlépéses megállítások mellett folytonos idejű kereskedésben. Összetett Poisson-folyamat. A Lévy-Itó felbontás. Exponenciális ugró diffúziós modellek: Merton, Kou, Bates.
- (b) Implikált és realizált volatilitás. Profit and Loss egyenlet. Az implikált volatilitás mosoly. Az implikált eloszlás és a Breeden-Litzenberger formula. Lokális volatilitás modellek (pl. CEV), Dupire egyenlete. Sztochasztikus volatilitás: Hull-White, Ornstein-Uhlenbeck, CIR, Heston. Ugró eszközármodellek. Szubordinátor, business time. Átskálázott Brown mozgás: Variance Gamma, és NIG modellek, tulajdonságaik.

### 4. Statisztikai becslésmélet (kredit: 4) Móri Tamás

- (a) A sűrűségfüggvény becslése. Cramér-Rao típusú egyenlőtlenségek: Chapman-Robbins, Bhattacharyya-határ. Valódi és általánosított Bayes-becslések, a Jeffrey-féle neminformatív a priori mérték.
- (b) Ekvivariáns becslések. A ML- és a Bayes-becslés ekvivarianciája. Folytonos eloszlásfüggvény ekvivariáns becslése. A Pitman-becslés és tulajdonságai. Véges sokaságból való mintavétel. Godambe és Joshi tételei. A Horvitz-Thompson becslés tulajdonságai.
- (c) L-statisztikák és határeloszlásuk. Legkisebb négyzetes becslés korrelált hibájú lineáris modellben. Optimális L-becslés eltolás- és skálaparaméteres családban. Aszimptotikusan optimális L-becslés az eltolásparaméterre. M-becslések, aszimptotikus normalitásuk. Robusztusság. A Huber-becslés minimax tulajdonsága. Az M- és az L-becslések ekvivalenciája.

**5. Statisztikai hipotézisvizsgálat** (kredit: 3) *Csiszár Villő*

- (a) Exponenciális eloszláscsalád. A Neyman-Pearson lemma általánosítása. Egy- és kétoldali ellenhipotézis vizsgálata. Neyman-struktúra, hipotézisvizsgálat zavaró paraméterek jelenlétében.
- (b) Az általánosított likelihood-hányados próba. Az empirikus folyamat konvergenciája a Szkorohod-térben. Karhunen-Loeve sorfejtés. Klasszikus nemparaméteres próbák. Konfidenciahalmazok. Kapcsolat a hipotézisvizsgálattal. Likelihoodra épülő aszimptotikus konfidenciahalmazok.

**6. Sztochasztikus analízis** (kredit: 7) *Prokaj Vilmos*

- (a) Kolmogorov kiterjesztési tétel. Folytonossági lemma, trajektóriák Hölder folytonossága. Gyenge konvergencia, Portmanteau tétel. Feszesség, Prohorov tétel. Donsker tétel.
- (b) Wiener folyamat tulajdonságai: Nagy számok erős törvénye, invariancia tulajdonságok, Wiener-folyamat null-halmaza, "sehol sem monotonitás", Dvoretzky-Erdős-Kakutani tétel, Paley-Wiener-Zygmund tétel, Iterált logaritmus tétel.
- (c) Doob-Meyer felbontás, Ito integrál, kvadratikus varáció, Ito formula.

**7. Többdimenziós statisztikai eljárások** (kredit: 6) *Michaletzky György*

- (a) A többdimenziós normális eloszlás paramétereinek becslése.
- (b) Főkomponensanalízis.
- (c) Faktoranalízis.
- (d) Diszkriminanciaanalízis.



## Differenciált szakmai anyag kérdései: számítástudomány szakirány

Választandó: legalább 20 kreditnyi tárgy.

### 1. Adatbányászat (kredit: 6) *Lukács András*

- (a) Klasszifikáció modelljei I. (döntési fák, Bayes-módszerek, boosting)
- (b) Klasszifikáció modelljei II. (neurális hálózatok, lineáris szeparáción alapuló módszerek, kernel módszerek)
- (c) Gyakori mintázat kereső algoritmusok (Apriori, partíciós és Toivonen-algoritmus, FP-growth)
- (d) Klaszterező algoritmusok (particionáló, sűrűség alapú, hierarchikus módszerek)

### 2. WWW és hálózatok matematikája (kredit: 3) *ifj. Benczúr András*

- (a) PageRank és bolyongás gráfokon
- (b) Kleinberg linkgyűjtemény - meghatározó tartalom (hub-authority) algoritmus (HITS) és mátrixok szinguláris felbontása
- (c) Véletlengráf modellek: Barabási-Albert; Kleinberg kis világ modellje

### 3. Kriptológia (kredit: 6) *Sziklai Péter*

- (a) Titkosítás és pszeudovéletlenség (tökéletes biztonság ekvivalens definíciói, one-time pad, tökéletes biztonság korlátai, számítási biztonság definíciói, pszeudovéletlenség, konstrukciók lehallgatás és nyílt szövegű támadás ellen)
- (b) Üzenet autentikálás és hash-függvények (üzenetek integritása, üzenet autentikáló kódok (MAC) definíciója, konstrukciók, hash-függvények biztonsági kritériumai, születésnap támadás, Merkle-Damgard konstrukció)
- (c) Nyilvános kulcsú titkosítások (biztonság definíciók, RSA módszer, ElGamal titkosítás, kvadratikus maradékok és a Goldwasser-Micali titkosítás, Rabin titkosítás)

### 4. Algoritmusok és adatstruktúrák tervezése, elemzése és implementálása I (kredit: 6) *Király Zoltán*

- (a) Síkgráfokkal síkbarajzolása; favastagság  $\leq k$  eldöntése
- (b) On-line és randomizált algoritmusok, min. vágások
- (c) Virtuális magánhálózatok; determináns-számítás gyűrűkben; Megiddo algoritmusai

### 5. Algoritmusok és adatstruktúrák tervezése, elemzése és implementálása II (kredit: 3) *Király Zoltán*

- (a) Unió-holvan adatstruktúrák; kupacok; vEB-struktúra
- (b) Szótárak, hash-elés
- (c) Geometriai adatstruktúrák; dinamikus fák

6. **Kódok és szimmetrikus struktúrák** (kredit: 3) *Szőnyi Tamás*

- (a) Perfekt kódok
- (b) MDS kódok
- (c) Négyzetes blokkrendszerek

7. **Adattömörítés** (kredit: 3) *Szabó István*

- (a) Fogalmak és korlátok stacionárius, egyértelműen felbontható (vesztésmentes) betűnkénti kódolásokra (prefix kód, Kraft-Fano egyenlőtlenség, átlagos kódhossz és kapcsolata az entrópiával, optimális kód, bináris Huffman kód, mennyire közelíti meg a bináris Huffman kód átlagos kódhossza az alsó korlátot, dinamikus kódolások)
- (b) Algoritmusok és aszimptotikus eredmények blokk kódolásokra és változó hosszúságú forráskódolásokra (blokk kódolás, aritmetikai kódolás, Lempel-Ziv kódolások fajtái (LZ77, LZ78, és javításai)), az értelmes írott szöveg entrópiája, meghatározásának módszerei
- (c) A veszteséges kódolások típusai, a kép és videó tömörítés elvi vázlata (a veszteséges tömörítés elvárásai, alapelvei, a JPEG és videó tömörítés főbb lépései)

## Differenciált szakmai anyag kérdései: operációkutatás szakirány

Választandó: legalább 20 kreditnyi tárgy.

### 1. Egészértékű Programozás I. (kredit: 3) *Király Tamás*

- (a) Gomory vágósíkos algoritmus, korlátozás és szétválasztás.
- (b) Heurisztikus algoritmusok az utazó ügynök feladatra, approximációs eredmények, Held–Karp-korlát, módszerek a kiszámolására.
- (c) Lagrange relaxáció, oszlopgenerálás.

### 2. Gráfelmélet (kredit: 3) *Frank András*

- (a) Leemelési tételek és alkalmazásaik.
- (b) A gráfelmélet min-max tételei.

### 3. Kombinatorikus algoritmusok I. (kredit: 6) *Jordán Tibor*

- (a) Gráfok bejárása, algoritmusok az összefüggőség tesztelésére, ritka tanúk, vágásekivalens fák.
- (b) Dinamikus programozás, gráfok favastagsága.
- (c) Merev gráfok és szerkezetek.

### 4. Lineáris optimalizálás (kredit: 3) *Illés Tibor*

- (a) Centrális út létezése és egyértelműsége önduális lineáris programozási feladatra (szinthalmazok létezése, nem üressége és kompaktsága; Newton irány meghatározása és egyértelműsége). Goldmann-Tucker és Sonnevend tétele. (B,N) partíció definíciója, kondíció szám és becslése. Változók mérete a centrális úton és annak egy környezetében.
- (b) Dikin módszer (csökkenési irány kiszámítása, átskálázás, Dikin-algoritmus, centralitás mértéke, dualitás rés csökkenése, megengedett lépéshossz meghatározása, az algoritmus lépésszám becslése).
- (c) Pontos megoldás előállítása  $\varepsilon$ -optimális megoldásból. Goldmann-Tucker modell és megoldhatósága, beágyazás, induló belsőpont előállítása.

### 5. Matroidelmélet (kredit: 3) *Frank András*

- (a) Matroidelméleti algoritmusok.
- (b) Matroidok gráfelméleti alkalmazásai (fedés és pakolás fákkal, fokszamkorlátos fák, forrás telepítés, merev gráfok, stb.).

### 6. Nemlineáris optimalizálás (kredit: 4) *Illés Tibor*

- (a) Szimmetrikus, lineáris feltételes konvex, kvadratikus programozási feladat dualitás elmélete, kapcsolata a megfelelő lineáris komplementaritási feladattal. Criss-cross algoritmus a szimmetrikus, lineáris feltételes konvex, kvadratikus programozási feladatra, az algoritmus tulajdonságai és végessége. Belsőpontos (logaritmikus barrier) módszer a lineáris feltételes konvex, kvadratikus programozási feladatra (monotonitás a centrális út mentén, vetített Newton irány, centralitás mértéke, centrális út környezete, komplexitás vizsgálata).
- (b) Feltétel nélküli és feltételes optimalizálási módszerek: irány menti minimalizálás, Newton módszer és variánsai, gradiens módszer és variánsai. További algoritmusok közül egyről beszéljen a hallgató (megengedett irányok módszere, belsőpontos algoritmusok, bundle módszer, vágósík módszerek; vagy speciális feladatok [pl. szeparábilis konkáv függvény minimalizálása lineáris feltételek mellett], speciális módszerei).
- (c) Speciális struktúrájú feladatok, tulajdonságaik, megoldási módszereik és alkalmazási területük (3-5 feladatosztályról beszéljen a hallgató). [Példák: lineáris programozási feladat; lineáris komplementaritási feladat; (szimmetrikus), lineáris feltételes konvex, kvadratikus programozási feladat; szemidefinit programozási feladat; geometriai programozási feladat; entrópia optimalizálási feladat; lp-norma optimalizálási feladat; variációs egyenlőtlenségek; equilibrium feltételes optimalizálási feladatok; bilineáris- illetve multilineáris optimalizálási feladatok.]

#### 7. Sztochasztikus optimalizálás (kredit: 6) *Mádi-Nagy Gergely*

- (a) Sztochasztikus modellek áttekintése. A korlátok és célok különböző megfogalmazásai. Az adódó sztochasztikus programozási feladatok matematikai jellemzése. Logkonkáv mértékek alaptétele.
- (b) Sztochasztikus programozási feladatok megoldó módszerei. Speciális konvex programozási eljárások. Dekompozíciós módszerek. Valószínűségi korlátok kiértékelése.

#### 8. Ütemezéselmélet (kredit: 3) *Jordán Tibor*

- (a) Egygépes feladatok.
- (b) Többgépes feladatok.
- (c) A shop modellek.

#### 9. Poliéderek kombinatorika (kredit: 3) *Frank András*

- (a) Teljesen unimoduláris mátrixok jellemzése és gráfoptimalizálási alkalmazásai.
- (b) Teljesen duális egészértékűség (TDI-ség). A párosítás politóp poliéderek megadása és a leírás TDI-sége. A teljes párosítás politóp poliéderek leírása.
- (c) Polimatroidok és általánosításai. Szubmoduláris áramok. Alkalmazások gráfránytási problémákra.

#### 10. Játékelmélet (kredit: 3) *Király Tamás*

- (a) Kombinatorikus játékok: k-nim, Grundy-számozás. Szimmetrikus és piros-kék sövényvágó játék, Hex
- (b) Stratégiai játékok: dominálás, Nash-egyensúly, Nash tétele. Kétszemélyes 0-összegű játékok, Neumann-tétel. Vickrey árverés, Vickrey-Clarke-Groves mechanizmusok.
- (c) Kooperatív játékok: mag, termelési játék, feszítőfa játék. Shapley-érték, konvex játékok. Stabil párosítások, felső körcsere algoritmus, taktikázás-biztosság.

# ALKALMAZOTT MATEMATIKUS MESTERSZAK:

## ZÁRÓVIZSGAKÉRDÉSEK

azok számára, akik a képzést 2013 előtt kezdték

### Szakmai törzsanyag kérdései

Választandó: 3 témakörből legalább 15 kreditnyi tárgy.

#### 1. Numerikus modellezés és közösleges differenciálegyenletek numerikus megoldási módszerei (kredit: 6) *Faragó István* TÉMAKÖR: Alkalmazott analízis

- (a) Az egy lépéses numerikus módszerek és vizsgálatuk. (Klasszikus módszerek, Runge-Kutta típusú módszerek. Konzisztencia. Stabilitási fogalmak, konvergencia. Egymásba ágyazott módszerek. Merev feladatok.)
- (b) A lineáris többlépéses numerikus módszerek és vizsgálatuk. (Adams típusú explicit és implicit módszerek, implicit differencia módszer, általános alakú módszerek. Konzisztencia és rendje, stabilitás, konvergencia. Prediktor-korrektor típusú módszerek.)
- (c) A két pontos peremérték-feladatok numerikus megoldása. (Belövéses módszerek, többszörös belövéses módszerek. Véges differenciák módszere lineáris feladatokra, konvergencia.)

#### 2. Nemlineáris funkcionálanalízis (kredit: 7) *Karátson János*

TÉMAKÖR: Alkalmazott analízis

- (a) Nemlineáris operátorok alapfogalmai. (Gâteaux- és Fréchet-derivált. Potenciál-operátorok, a potenciál fogalma és létezése. Monoton operátorok, konvex funkcionálok. Példa nemlineáris elliptikus operátorra.)
- (b) Nemlineáris operátoregyenletek megoldhatósága. (Variációs elv, funkcionál minimumának létezése. Kvadratikus funkcionál. Megoldhatóság nem potenciális operátorra. Alkalmazás nemlineáris differenciálegyenletekre.)
- (c) Közelítő módszerek. (Ritz-Galjorkin-féle projekciós módszerek lineáris és nem lineáris operátorokra. Iterációs módszerek: gradiens-módszer Hilbert-térben, Newton-Kantorovics-módszer és változatai Banach-térben.)

#### 3. Operátorfélcsoportok (kredit: 6) *Bátkai András*

TÉMAKÖR: Alkalmazott analízis

- (a) Motiváló példák (korlátos generátor, eltolás- és szorzás félcsoport, hővezetési egyenlet, stb.), alapfogalmak (generátor, rezolvens, Cauchy feladat, megoldásfogalmak), alaptulajdonságok és jóldefiniáltság, Laplace transzformáció.
- (b) Generálási tételek (Hille-Yosida, Lumer-Phillips), perturbációs tételek.
- (c) Spektrum és aszimptotika (spektrálleképezés-tételek, stabilitásfogalmak, Datko-Pazy, Gearhart, Arendt-Batty-Ljubics-Vu, Lutz tételei).

4. **Algoritmuselmélet I** (kredit: 5) *Király Zoltán*

TÉMAKÖR: Algoritmuselmélet

- (a) Rendezés, számolás, dinamikus programozás. (Középső elem, gyorsrendezés, leszámoló és számjegyes rendezés. Mod  $m$  számítások, prímtesztelés, gyors Fourier transzformáció, Schönhage-Strassen szorzás. Dinamikus programozás alkalmazásai.)
- (b) Legrövidebb és diszjunkt utak. (Dijkstra algoritmus és alkalmazásai, Bellman-Ford, Johnson, Floyd és Suurballe-Tarjan algoritmusok. Diszjunkt utak keresése.)
- (c) Párosítások, folyamok, hálózati kódok. (Hopcroft-Karp algoritmus, stabil házasság és variációi. Dinitz algoritmus, többtermékes folyamok. Lineáris hálózati kódok.)
- (d) Közelítő és FPT algoritmusok. (Approximációs sémák. Közelítő algoritmus lefogó csúcshalmazra, metrikus utazó ügynökre, Steiner fára, hátizsák feladatra, halmazfedésre. Fix paraméterrel megoldható feladatok, kernelek, példák.)

5. **Diszkrét és folytonos paraméterű Markov-láncok** (kredit: 2) *Prokaj Vilmos*  
(*Csiszár Villő*) TÉMAKÖR: Sztochasztikus folyamatok

- (a) Alapfogalmak. Ergodikus Markov láncokra vonatkozó tételek. Stacionárius eloszlás és reguláris mérték, megfordított láncok.
- (b) Véges állapotterű Markov láncok, Perron-Frobenius-tételek. A konvergencia-sebesség becslése. MCMC-módszerek.
- (c) Folytonos paraméterű Markov láncok infinitezimális generátora. Születési-halálózási folyamatok. A Kolmogorov-féle differenciálegyenletek megoldhatósága.

6. **Sztochasztikus folyamatok** (kredit: 6) *Prokaj Vilmos*

TÉMAKÖR: Sztochasztikus folyamatok

- (a) Wiener folyamat: konstrukció, Donsker tétel, tükrözési elv, erős Markov tulajdonság. Maximum és a szintelérési idő eloszlása.
- (b) Sztochasztikus integrál, kvadratikus variáció, Ito formula, Lévy karakterizáció, Girsanov tétel.
- (c) Sztochasztikus differenciálegyenletek, erős és gyenge megoldás, eloszlásbeli és trajektóriánkénti unicitás. Tételek a megoldás létezéséről és unicitásáról.

7. **Stacionárius folyamatok** (kredit: 5) *Prokaj Vilmos*

TÉMAKÖR: Sztochasztikus folyamatok

- (a) Stacionárius folyamatok. Kovariancia függvény. Bochner-Hincsin-tétel. (Herglotz-tétel) Spektrálelőállítás.
- (b) Karhunen-Loeve-sorfejtés, Kotelnikov-Shannon-tétel - a mintavételezés sűrűsége.
- (c) Wold-felbontás. Teljesen reguláris és szinguláris folyamatok.

(d) Stacionárius folyamatok várható-értékének és kovariancia-függvényének becslése.

8. **Diszkrét matematika** (kredit: 5) *Lovász László (Sziklai Péter)*

TÉMAKÖR: Diszkrét matematika

- (a) Gráfelmélet: Párosításelmélet. Többszörös összefüggőség. Erősen reguláris gráfok. Regularitási lemma. Síkbarajzolhatóság, gráfminorok.
- (b) Leszámláló kombinatorika: Generátorfüggvények, inverziós formulák részben rendezett halmazokon, rekurziók. Mechanikus összegzés. Klasszikus gráfelméleti leszámlálások, fák, feszítő fák száma.
- (c) Algebrai és véletlen módszerek: A lineáris algebrai módszer, extrémális halmazrendszerek. Véges testek, kombinatorikus Nullstellensatz. Várható érték és második momentum módszer. Véletlen gráfok, küszöbfüggvény.

9. **Diszkrét optimalizálás** (kredit: 6) *Frank András*

TÉMAKÖR: Operációkutatás

- (a) Gráfok a diszkrét optimalizálásban. (Legrövidebb utak: Konzervatív súlyozás, megengedett potenciál. Folyamok és áramok: Max-folyam/Min-vágás, Hoffman tétele. Párosítások: König és Egerváry tételei, a Berge–Tutte-formula, Edmonds–Gallai. Menger és Dilworth tételei. Algoritmusok: Magyar módszer, Edmonds párosítási algoritmus. Legolcsóbb fenyezők.)
- (b) Matroidok a diszkrét optimalizálásban. (Ekvivalens axiómarendszerek, rangfüggvény, szétbonthatóság. Matroidosztályok, a duális matroid. Mohó algoritmus. Metszettétel és Összeztétel.)
- (c) Lineáris programozás a diszkrét optimalizálásban. (Farkas-lemma és dualitástétel teljesen unimoduláris feltételi mátrixok esetén, alkalmazásokkal: irányított kínai postás, egyenletes színezés. Egész poliéderek Edmonds és Giles féle jellemzése.)

10. **Folytonos optimalizálás** (kredit: 6) *Illés Tibor*

TÉMAKÖR: Operációkutatás

- (a) Lineáris programozás. (Konvex poliéderek, konvex kúpok. Alternatíva tételek. Megengedettségi feladatok tulajdonságai és megoldása: criss-cross algoritmus, MBU-szimplex módszer. Végesen generált kúpok és polárisuk: Weyl-, Minkowski- és Farkas-tétel. Lineáris programozás erős dualitástétele és pivot algoritmusai.)
- (b) Polinomiális algoritmus a lineáris programozási feladat megoldására: teljes Newton-lépéses, logaritmikus büntetőfüggvényes algoritmus. (Primál-duál lineáris programozási feladatpár. Belsőpont-megoldás, optimalitási kritériumok, centrális út, Newton-rendszer, megengedett lépéshossz, centralitás-mértéke, dualitás rés és csökkenésének a mértéke, Ling lemmái, konvergenciatétel.)
- (c) Konvex optimalizálás dualitáselmélete. (Konvex Farkas lemma, regularitási feltételek. Primál konvex optimalizálási feladat, Lagrange-függvény. Lagrange-féle nyeregpontfeladat és kapcsolódó tételek. Karush–Kuhn–Tucker-tétel, Lagrange-féle duál feladat, gyenge dualitástétel. Erős dualitástétel.)



## Differenciált szakmai anyag kérdései: alkalmazott analízis szakirány

Választandó: legalább 24 kreditnyi tárgy.

1. **Modellalkotás és természettudományos alkalmazások** (kredit: 6) *Izsák Ferenc*
  - (a) A diffúzió modellezése. Feltetés a diffúzióban szereplő fluxusról, felírás rendszerként. A modell matematikai tulajdonságai. Példák jelenségekre, amelyeket ezzel modellezünk.
  - (b) Áramlási feladatok modellezése egyszerű advekcióval. A karakterisztikák jelentése. A megmaradási törvények használata, kapcsolat a Gauss-tétellel. Az ismeretlen mennyiségek típusa. A Navier-Stokes egyenletek valamilyen egyszerű alakja.
  - (c) Kémiai reakciók tömeghatás típusú modellje. Feltetések a modellben. Példák egyszerű reakciókra. A megfelelő kinetikai differenciálegyenlet felírása, matematikai tulajdonságai.
2. **Elliptikus parciális differenciálegyenletek numerikus módszerei és alkalmazásai** (kredit: 9) *Karátson János, Stoyan Gisbert*
  - (a) A véges differenciák módszere. (A módszer 1 és 2 dimenzióban intervallumon ill. négyzeten, konstrukció és konvergencia. A kapott lineáris rendszer megoldhatósága, M-mátrixok. Általános tartomány és magasabb dimenzió esete. A konvergencia rendje.)
  - (b) A végeselem-módszer. (A módszer elméleti alapjai, konstrukció 1 és magasabb dimenzióban. Nevezetes bázisfüggvények. A konvergencia és becslései, rendje.)
  - (c) A többrácsos (multigrid-)módszer. (A módszer alapelve. Simító iterációk, V- és W-ciklusok. A módszer konvergenciája.)
3. **Időfüggő parciális differenciálegyenletek numerikus módszerei és alkalmazásai** (kredit: 9) *Faragó István, Stoyan Gisbert, Izsák Ferenc*
  - (a) Teljes diszkretizáció és szemidiszkretizáció. Az ezekkel kapott egylépéses sémák norma-konzisztenciájának és (feltételes) stabilitásának fogalma. A Lax-féle ekvivalenciatétel.
  - (b) Stabilitásvizsgálati módszerek: elégséges feltétel stabilitásra, vizsgálat Fourier-transzformációval és Gersgorin-tétellel. Nevezetes eredmények az diffúziós egyenletre vonatkozó explicit sémákra, explicit upwind és downwind sémák stabilitása állandó együtthatós áramlási feladatokra. A Crank-Nicolson-séma és tulajdonságai.
  - (c) ADI típusú sémák és stabilitásuk. A Lax-Wendroff-séma. Probléma a peremfeltételekkel az advekciós feladat esetében. A periodikus peremfeltételhez tartozó lépésmátrixok szerkezete. Numerikus és analitikus függési tartomány. Korlát explicit séma időlépésének hosszára az advekciós feladatok esetében.

- (d) Többlépéses sémák kezelése rendszerként. A rendszerek stabilitása Fourier-transzformációval. Új stabilitásfogalom szükségessége. A Burgers-egyenlet numerikus kezelése, egy megmaradó mennyiség megőrzésére vonatkozó séma (Newton - iteráció nélkül).

#### 4. Dinamikai rendszerek és differenciálegyenletek (kredit: 9) *Simon Péter*

- (a) Dinamikai rendszerek ekvivalenciái. Lineáris rendszerek topologikus osztályozása. Normálforma elmélet, a rezonancia fogalma.
- (b) Lokális vizsgálat egyensúlyi pontban. Hartman-Grobman tétel. Stabil és instabil sokaság tétel. Centrális sokaság és redukciós tétel.
- (c) Periodikus megoldások. Feltételek periodikus pálya létezésére és nem létezésére két-dimenzióban. Periodikus pálya stabilitása. Az index alkalmazása a fáziskép vizsgálatára.
- (d) Bifurkáció fogalma, egyszerű bifurkációk. Lokális bifurkáció szükséges feltételei. A nyereg-csomó bifurkáció elégséges feltétele. Az Andronov-Hopf bifurkáció normálformája és elégséges feltétele.
- (e) Diszkrét dinamikai rendszer periodikus megoldásai. Periódus kettőződés. A kaotikus pálya fogalma. Szimbolikus dinamika alkalmazása kaotikus pálya létezésének bizonyítására. A logisztikus és a sátor leképezés.

#### 5. Parciális differenciálegyenletek (kredit: 9) *Simon László*

- (a) Szoboljev-terek: Fourier-transzformáció, kiterjesztési operátor, nyom operátor.
- (b) Lineáris elliptikus peremérték-feladatok gyenge megoldása, sajátérték-feladat. A peremérték-feladatok és sajátérték-feladatok variációs értelmezése.
- (c) Kezdeti-peremérték-feladatok lineáris hiperbolikus és parabolikus egyenletekre: a gyenge megoldás egyértelműsége, létezése: Fourier-módszer, Galjorkin-módszer.
- (d) Nemlineáris elliptikus egyenletekre vonatkozó peremérték-feladatok vizsgálata a monoton típusú operátorok elméletének felhasználásával.
- (e) Nemlineáris elsőrendű evolúciós (parabolikus) egyenletek vizsgálata a monoton típusú operátorok segítségével.

## Differenciált szakmai anyag kérdései: sztochasztika szakirány

Választandó: legalább 25 kreditnyi tárgy.

### 1. Idősorok elemzése 1 (kredit: 6) *Márkus László*

- (a) Stacionárius folyamatok alapfogalmai. Autokorreláció. Spektrálelőállítás, spektrálsűrűségfüggvény. Stacionárius folyamatok modelljei: autoregressziós (AR(p)), mozgóátlag (MA(q)), ARIMA(p,d,q), ARCH(p), GARCH(p,q), bilineáris, véletlen együtthetős AR, és a SETAR folyamatok, stacionaritása és a stacionárius eloszlás tulajdonságai. Sztochasztikus rekurziós egyenletek stacionárius megoldásának létezési feltétele Ljapunov-exponenssel, Kesten-Vervaat-Goldie tétel reguláris változású eloszlással bíró stacionárius megoldás létezéséről, alkalmazás ARCH(1)-re.
- (b) Idősorok becslélmélete: Az átlag és az autokovariancia függvény becslése, tulajdonságai és határeloszlása (ARCH eset is). Paraméterbecslés AR és MA folyamatra. Rendszelekció Akaike és Bayes információkritériumok. A periodogram a diszkrét spektrum becslésére, Fisher-teszt. Spektrálsűrűségfüggvény becslése ablakolással, tulajdonságok. Előfehérítés módszere, CAT kritérium.

### 2. Pénzügyi folyamatok (kredit: 9) *Arató Miklós*

- (a) Bináris piac diszkrét idejű kereskedéssel. Európai opció árazása. Cox-Ross-Rubinstein (CRR) formula. Snell burkoló, amerikai opciók árazása. Piacok arbitrázsmentessége, teljessége, eszközárzás első és második alaptétele. Eszközárak nem teljes piacon. Tranzakciós költségek. Black-Scholes formula, mint a CRR határéréke.
- (b) Folytonosan változó eszközárak modelljei, folytonos idejű kereskedés esetén. Európai opciók árazása és a Black-Scholes differenciálegyenlet. A Feynman-Kac formula és a Black-Scholes differenciálegyenlet kapcsolata, sztochasztikus volatilitás (Heston), implied volatility, smile.
- (c) Ugró eszközárak folytonos idejű kereskedésben. Lévy-Itó felbontás, Compound Poisson folyamat, Ugró diffúzió. Szubordinátor, idő-átskálózott Brown mozgás. Exponenciális modellek: Merton, Kou, Bates, végtelen aktivitású modellek: variance gamma, NIG, tulajdonságaik. Az infinitézimális generátor mint lokális ill. pszeudodifferenciál operátor. Az európai opció értéke, Black-Scholes integro-differenciálegyenletek.
- (d) Kamatlábmodellek. Ármérce folyamat cseréje, kockázatmentes mérték cseréje. Árazási formula megváltoztatott ármérce folyamat esetén. Forward ár, futures ár, kapcsolatuk, Merton modell. Heath-Jarrow-Morton-modell az elemi kötvényfolyamat, határidős kamatláb és spot kamatláb kapcsolatára. Vasicek-modell, call opció ára a Vasicek modellben.

### 3. Statisztikai becslélmélet (kredit: 4) *Móri Tamás*

- (a) A sűrűségfüggvény becslése. Cramér-Rao típusú egyenlőtlenségek: Chapman-Robbins, Bhattacharyya-határ. Valódi és általánosított Bayes-becslések, a Jeffrey-féle neminformatív a priori mérték.

- (b) Ekvivariáns becslések. A ML- és a Bayes-becslés ekvivarianciája. Folytonos eloszlásfüggvény ekvivariáns becslése. A Pitman-becslés és tulajdonságai. Véges sokaságból való mintavétel. Godambe és Joshi tételei. A Horvitz-Thompson becslés tulajdonságai.
- (c) L-statisztikák és határeloszlásuk. Legkisebb négyzetes becslés korrelált hibájú lineáris modellben. Optimális L-becslés eltolás- és skálaparaméteres családban. Aszimptotikusan optimális L-becslés az eltolásparaméterre. M-becslések, aszimptotikus normalitásuk. Robusztusság. A Huber-becslés minimax tulajdonsága. Az M- és az L-becslések ekvivalenciája.

4. **Statisztikai hipotézisvizsgálat** (kredit: 3) *Csiszár Villő*

- (a) Exponenciális eloszláscsalád. A Neyman-Pearson lemma általánosítása. Egy- és kétoldali ellenhipotézis vizsgálata. Neyman-struktúra, hipotézisvizsgálat záró paraméterek jelenlétében.
- (b) Az általánosított likelihood-hányados próba. Az empirikus folyamat konvergenciája a Szkorohod-térben. Karhunen-Loeve sorfejtés. Klasszikus nemparaméteres próbák. Konfidenciahalmazok. Kapcsolat a hipotézisvizsgálattal. Likelihoodra épülő aszimptotikus konfidenciahalmazok.

5. **Sztochasztikus analízis** (kredit: 7) *Prokaj Vilmos*

- (a) Kolmogorov kiterjesztési tétel. Folytonossági lemma, trajektóriák Hölder folytonossága. Gyenge konvergencia, Portmanteau tétel. Feszesség, Prohorov tétel. Donsker tétel.
- (b) Wiener folyamat tulajdonságai: Nagy számok erős törvénye, invariancia tulajdonságok, Wiener-folyamat null-halmaza, "sehol sem monotonitás", Dvoretzky-Erdős-Kakutani tétel, Paley-Wiener-Zygmund tétel, Iterált logaritmus tétel.
- (c) Doob-Meyer felbontás, Ito integrál, kvadratikus varáció, Ito formula.

6. **Többdimenziós statisztikai eljárások** (kredit: 6) *Michaletzky György*

- (a) A többdimenziós normális eloszlás paramétereinek becslése.
- (b) Főkomponensanalízis.
- (c) Faktoranalízis.
- (d) Diszkriminanciaanalízis.

## Differenciált szakmai anyag kérdései: számítástudomány szakirány

Választandó: legalább 25 kreditnyi tárgy.

1. **Adatbányászat** (kredit: 6) *Lukács András*
  - (a) Klasszifikáció modelljei I. (döntési fák, Bayes-módszerek, boosting)
  - (b) Klasszifikáció modelljei II. (neurális hálózatok, lineáris szeparáción alapuló módszerek, kernel módszerek)
  - (c) Gyakori mintázat kereső algoritmusok (Apriori, partíciós és Toivonen-algoritmus, FP-growth)
  - (d) Klaszterező algoritmusok (particionáló, sűrűségalapú, hierarchikus módszerek)
2. **WWW és hálózatok matematikája** (kredit: 3) *ifj. Benczúr András*
  - (a) PageRank és bolyongás gráfokon
  - (b) Kleinberg linkgyűjtemény - meghatározó tartalom (hub-authority) algoritmus (HITS) és mátrixok szinguláris felbontása
  - (c) Véletlengráf modellek: Barabási-Albert; Kleinberg kis világ modellje
3. **Bonyolultságelmélet** (kredit: 6) *Grolmusz Vince*
  - (a) Randomizált, illetve párhuzamos számítások (választható)
  - (b) Algebrai és egyszerű döntési fák, zárkózottság
  - (c) Kolmogorov bonyolultság
  - (d) Boole hálózatok, alsó becslések kismélységű hálózatokra
  - (e) Interaktív bizonyítások
  - (f) Tárkorlátos számítások, polinomiális hierarchia, hierarchia-tételek
4. **Kriptográfia és adatbiztonság** (kredit: 7) *Sziklai Péter*
  - (a) Titkosítás és pszeudovéletlenség (tökéletes biztonság ekvivalens definíciói, one-time pad, tökéletes biztonság korlátai, számítási biztonság definíciói, pszeudovéletlenség, konstrukciók lehallgatás és nyílt szövegű támadás ellen)
  - (b) Üzenet autentikálás és hash-függvények (üzenetek integritása, üzenet autentikáló kódok (MAC) definíciója, konstrukciók, hash-függvények biztonsági kritériumai, születésnap támadás, Merkle-Damgard konstrukció)
  - (c) Nyilvános kulcsú titkosítások (biztonság definíciók, RSA módszer, ElGamal titkosítás, kvadratikus maradékok és a Goldwasser-Micali titkosítás, Rabin titkosítás)
5. **Algoritmusok és adatstruktúrák tervezése, elemzése és implementálása** (kredit: 9) *Király Zoltán*
  - (a) Síkgráfokkal kapcsolatos algoritmusok, favastagság

- (b) On-line és randomizált algoritmusok, min. vágások
- (c) Virtuális magánhálózatok, determináns-számítás, faktorizáció kvantum számítógépen
- (d) Unió-holvan adatstruktúrák, kupacok, vEB-struktúra
- (e) Szótárak, hash-elés
- (f) Geometriai adatstruktúrák, dinamikus fák

6. **Kódok és szimmetrikus struktúrák** (kredit: 3) *Szőnyi Tamás*

- (a) Perfekt kódok
- (b) MDS kódok
- (c) Négyzetes blokkrendszerek

7. **Adattömörítés** (kredit: 3) *Szabó István*

- (a) Fogalmak és korlátok stacionárius, egyértelműen felbontható (veszteségmentes) betűnkénti kódolásokra (prefix kód, Kraft-Fano egyenlőtlenség, átlagos kódhossz és kapcsolata az entrópiával, optimális kód, bináris Huffman kód, mennyire közelíti meg a bináris Huffman kód átlagos kódhossza az alsó korlátot, dinamikus kódolások)
- (b) Algoritmusok és aszimptotikus eredmények blokk kódolásokra és változó hosszúságú forráskódolásokra (blokk kódolás, aritmetikai kódolás, Lempel-Ziv kódolások fajtái (LZ77, LZ78, és javításai)), az értelmes írott szöveg entrópiája, meghatározásának módszerei
- (c) A veszteséges kódolások típusai, a kép és videó tömörítés elvi vázlata (a veszteséges tömörítés elvárásai, alapelvei, a JPEG és videó tömörítés főbb lépései)

## Differenciált szakmai anyag kérdései: operációkutatás szakirány

Választandó: legalább 25 kreditnyi tárgy.

### 1. Egészértékű Programozás I. (kredit: 3) *Király Tamás*

- (a) Gomory vágósíkos algoritmus, korlátozás és szétválasztás.
- (b) Heurisztikus algoritmusok az utazó ügynök feladatra, approximációs eredmények, Held–Karp-korlát, módszerek a kiszámolására.
- (c) Lagrange relaxáció, oszlopgenerálás.

### 2. Gráfelmélet (kredit: 3) *Frank András*

- (a) Leemelési tételek és alkalmazásaik.
- (b) A gráfelmélet min-max tételei.

### 3. Kombinatorikus algoritmusok I. (kredit: 6) *Jordán Tibor*

- (a) Gráfok bejárása, algoritmusok az összefüggőség tesztelésére, ritka tanúk, vágásekivalens fák.
- (b) Dinamikus programozás, gráfok favastagsága.
- (c) Merev gráfok és szerkezetek.

### 4. Lineáris optimalizálás (kredit: 3) *Illés Tibor*

- (a) Centrális út létezése és egyértelműsége önduális lineáris programozási feladatra (szinthalmazok létezése, nem üressége és kompaktsága; Newton irány meghatározása és egyértelműsége). Goldmann-Tucker és Sonnevend tétele. (B,N) partíció definíciója, kondíció szám és becslése. Változók mérete a centrális úton és annak egy környezetében.
- (b) Dikin módszer (csökkenési irány kiszámítása, átskálázás, Dikin-algoritmus, centralitás mértéke, dualitás rés csökkenése, megengedett lépéshossz meghatározása, az algoritmus lépésszám becslése).
- (c) Pontos megoldás előállítása  $\varepsilon$ -optimális megoldásból. Goldmann-Tucker modell és megoldhatósága, beágyazás, induló belsőpont előállítása.

### 5. Matroidelmélet (kredit: 3) *Frank András*

- (a) Matroidelméleti algoritmusok.
- (b) Matroidok gráfelméleti alkalmazásai (fedés és pakolás fákkal, fokszamkorlátos fák, forrás telepítés, merev gráfok, stb.).

### 6. Nemlineáris optimalizálás (kredit: 4) *Illés Tibor*

- (a) Szimmetrikus, lineáris feltételes konvex, kvadratikus programozási feladat dualitás elmélete, kapcsolata a megfelelő lineáris komplementaritási feladattal. Criss-cross algoritmus a szimmetrikus, lineáris feltételes konvex, kvadratikus programozási feladatra, az algoritmus tulajdonságai és végessége. Belsőpontos (logaritmikus barrier) módszer a lineáris feltételes konvex, kvadratikus programozási feladatra (monotonitás a centrális út mentén, vetített Newton irány, centralitás mértéke, centrális út környezete, komplexitás vizsgálata).
- (b) Feltétel nélküli és feltételes optimalizálási módszerek: irány menti minimalizálás, Newton módszer és variánsai, gradiens módszer és variánsai. További algoritmusok közül egyről beszéljen a hallgató (megengedett irányok módszere, belsőpontos algoritmusok, bundle módszer, vágósík módszerek; vagy speciális feladatok [pl. szeparábilis konkáv függvény minimalizálása lineáris feltételek mellett], speciális módszerei).
- (c) Speciális struktúrájú feladatok, tulajdonságaik, megoldási módszereik és alkalmazási területük (3-5 feladatos tályról beszéljen a hallgató). [Példák: lineáris programozási feladat; lineáris komplementaritási feladat; (szimmetrikus), lineáris feltételes konvex, kvadratikus programozási feladat; szemidefinit programozási feladat; geometriai programozási feladat; entrópia optimalizálási feladat; lp-norma optimalizálási feladat; variációs egyenlőtlenségek; equilibrium feltételes optimalizálási feladatok; bilineáris- illetve multilineáris optimalizálási feladatok.]

## 7. Sztochasztikus optimalizálás (kredit: 6) *Fábián Csaba*

- (a) Sztochasztikus modellek áttekintése. A korlátok és célok különböző megfogalmazásai. Az adódó sztochasztikus programozási feladatok matematikai jellemzése. Logkonkáv mértékek alaptétele.
- (b) Sztochasztikus programozási feladatok megoldó módszerei. Speciális konvex programozási eljárások. Dekompozíciós módszerek. Valószínűségi korlátok kiértékelése.

## 8. Ütemezéselmélet (kredit: 3) *Jordán Tibor*

- (a) Egygépes feladatok.
- (b) Többgépes feladatok.
- (c) A shop modellek.