Permutációs Tutte polinom

Stadler Domonkos
Témavezető: Csikvári Péter

2024. május 31.

A Tutte polinom

Definíció

Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf, $v(G)$ a csúcsainak, $e(G)$ az éleinek száma. Az élek egy A részhalmazára $k(A)$ a (V, A) részgráf komponenseinek számát jelöli. Ekkor

$$T_G(x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{k(A)-k(E)} (y-1)^{k(A)+|A|-v(G)}$$

a G gráf Tutte polinomja.

A Tutte polinom

Definíció

Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf, $v(G)$ a csúcsainak, $e(G)$ az éleinek száma. Az élek egy A részhalmazára $k(A)$ a (V, A) részgráf komponenseinek számát jelöli. Ekkor

$$T_G(x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{k(A)-k(E)} (y-1)^{k(A)+|A|-v(G)}$$

a G gráf Tutte polinomja.

Tétel

Legyen G egy összefüggő gráf, ekkor

- $T_G(1, 1)$ G feszítőfáinak száma.
- $T_G(1, 2)$ G összefüggő részgráfjainak száma.
- $T_G(2, 0)$ G aciklikus irányításainak száma.

Ismert sejtések

Sejtés (Merino, Welsh)

$$\max(T_G(2,0), T_G(0,2)) \geq T_G(1,1).$$

Ismert sejtések

Sejtés (Merino, Welsh)

$$\max(T_G(2,0), T_G(0,2)) \geq T_G(1,1).$$

Sejtés (Conde, Merino)

$$T_G(2,0) + T_G(0,2) \geq T_G(1,1),$$

$$T_G(2,0)\,T_G(0,2) \geq T_G(1,1)^2.$$

Ismert sejtések

Sejtés (Merino, Welsh)

$$\max(T_G(2,0), T_G(0,2)) \geq T_G(1,1).$$

Sejtés (Conde, Merino)

$$T_G(2,0) + T_G(0,2) \geq T_G(1,1),$$
$$T_G(2,0)\,T_G(0,2) \geq T_G(1,1)^2.$$

Tétel (Jackson)

$$T_G(3,0)\,T_G(0,3) \geq T_G(1,1)^2.$$

Permutációs Tutte polinom

Definíció

Legyen $H = (A, B, E)$ egy páros gráf, csúcsainak halmaza $V(H) = A \cup B = [m]$. Ha $\pi : [m] \to [m]$ egy permutáció, $i \in A$ csúcsot *belülről aktív*nak vagy $j \in B$-t *kívülről aktív*nak hívjuk, ha

$$\pi(i) > \max_{j \in N(i)} \pi(j) \text{ illetve } \pi(j) > \max_{i \in N(j)} \pi(i),$$

ahol $N(i)$ az $i$vel szomszédos csúcsok halmazát jelöli. Jelöljük $ba(\pi)$-vel a permutációból származó belülről aktív csúcsok számát, $ka(\pi)$-vel a kívülről aktív csúcsokét. Ekkor

$$\widetilde{T}_H(x, y) = \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in S_m} x^{ba(\pi)} y^{ka(\pi)}$$

a H páros gráf permutációs Tutte polinomja.

A két polinom kapcsolata

Tétel (Tutte)

Legyen $G = (V, E)$ összefüggő gráf, $|E| = m$. Címkézzük meg az éleket teszőleges módon 1-től m-ig. Ha T egy feszítőfája G-nek, az $e \in E(T)$ élet belülről aktívnak nevezzük, ha a $T - e$ által meghatározott vágásban e címkéje a legnagyobb. Egy $f \notin E(T)$ él kívülről aktív, ha a $T + f$-beli körben neki van a legnagyobb címkéje. Nevezzük $ba(T)$-vel és $ka(T)$-vel a T által meghatározott belülről illetve kívülről aktív élek számát és $\mathcal{T}(G)$ G feszítőfáinak halmazát. Ekkor

$$T_G(x, y) = \sum_{T \in \mathcal{T}(G)} x^{ba(T)} y^{ka(T)}.$$

A két polinom kapcsolata

Definíció (Lokális báziscsere gráf)

Legyen $G = (V, E)$ összefüggő, T egy feszítőfája. Ekkor definiáljuk a $H[T]$ páros gráfot a következő módon. Az egyik partíció csúcsai legyenek megfeleltethetőek T éleivel, a másik partíció csúcsai a T-n kívüli élekkel. Két csúcs között akkor fut él, ha benne vannak a másik által meghatározott vágásban illetve körben (ez szimmetrikusan teljesül). Azt mondjuk, hogy $H[T]$ a T-re vonatkozó lokális báziscsere gráfja G-nek.

A két polinom kapcsolata

Definíció (Lokális báziscsere gráf)

Legyen $G = (V, E)$ összefüggő, T egy feszítőfája. Ekkor definiáljuk a $H[T]$ páros gráfot a következő módon. Az egyik partíció csúcsai legyenek megfeleltethetőek T éleivel, a másik partíció csúcsai a T-n kívüli élekkel. Két csúcs között akkor fut él, ha benne vannak a másik által meghatározott vágásban illetve körben (ez szimmetrikusan teljesül). Azt mondjuk, hogy $H[T]$ a T-re vonatkozó lokális báziscsere gráfja G-nek.

Állítás

Legyen $G = (V, E)$ összefüggő gráf, ekkor

$$T_G(x, y) = \sum_{T \in \mathcal{T}(G)} \widetilde{T}_{H[T]}(x, y).$$

Alkalmazás

Átviteli lemma

Legyenek $x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2 \geq 0$, ha tetszőleges páros gráf esetén

$$\widetilde{T}_H(x_1, y_1)\widetilde{T}_H(x_2, y_2) \geq \widetilde{T}_H(x_0, y_0)^2$$

teljesül, akkor tetszőleges G gráfra

$$T_G(x_1, y_1)T_G(x_2, y_2) \geq T_G(x_0, y_0)^2.$$

Alkalmazás

Átviteli lemma

Legyenek $x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2 \geq 0$, ha tetszőleges páros gráf esetén

$$\widetilde{T}_H(x_1, y_1)\,\widetilde{T}_H(x_2, y_2) \geq \widetilde{T}_H(x_0, y_0)^2$$

teljesül, akkor tetszőleges G gráfra

$$T_G(x_1, y_1)\,T_G(x_2, y_2) \geq T_G(x_0, y_0)^2.$$

Tétel (Beke, Csáji, Csikvári, Pituk)

Tetszőleges H izolált csúcs mentes páros gráfra és $x \geq 2.9243$ esetén

$$\widetilde{T}_H(x, 0)\,\widetilde{T}_H(0, x) > 1 = \widetilde{T}_H(1, 1)^2.$$

Azaz tetszőleges G gráfra

$$T_G(x, 0)\,T_G(0, x) \geq T_G(1, 1)^2.$$