Permutációs Tutte Polinom

Stadler Domonkos

Témavezető: Csikvári Péter

1. Bevezetés

A Tutte polinom egy gráfokhoz definiált polinom, amelyben a gráfok sok kombinatorikus tulajdonsága megjelenik, továbbá statisztikus fizikában is fontos szerepet játszik. Ennek a polinomnak az analitikus vizsgálata régóta folyik, ehhez segítségül definiáljuk a permutációs Tutte polinomot, amelyen keresztül az eredeti Tutte polinomról is be lehet látni eredményeket. Az eredmények nagy része Beke Csongor, Csáji Gergely Kál, Csikvári Péter és Pituk Sára [2] cikkéből származik.

2. A Tutte polinom

2.1. Definícó. Tutte polinom [4]

Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf, $v(G)$ a csúcsainak, $e(G)$ az éleinek száma. Az élek egy A részhalmazára $k(A)$ a (V, A) részgráf komponenseinek számát jelöli. Ekkor

$$T_G(x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{k(A)-k(E)} (y-1)^{k(A)+|A|-v(G)} \tag{1}$$

a G gráf Tutte polinomja.

Mivel a kutatómunka fókuszában többnyire nem maga a Tutte polinom állt, csak ismertetem néhány kombinatorikus tulajdonságát, amik megmutathatják, mitől olyan érdekes.

2.2. Tétel. *Legyen G egy összefüggő gráf, ekkor*

(a) $T_G(1, 1)$ *G feszítőfáinak száma.*

(b) $T_G(2, 1)$ *G feszítőrészerdőinek (azaz körmentes feszítőrészgráfjainak) száma.*

(c) $T_G(1, 2)$ *megegyezik G összefüggő részgráfjainak számával.*

(d) $T_G(2, 2) = 2^{e(G)}$.

(e) $T_G(2, 0)$ *G aciklikus irányításainak száma.*

Jelölje $d_{\mathcal{O}} \in \mathbb{Z}^{v(G)}$ az $\mathcal{O}$ irányításhoz tartozó kifokvektort, azaz a csúcsok egy fix rendezésében minden csúcs kifoka a vektor megfelelő tényezője. Ekkor a különböző kifokvektorok száma adott gráfra megegyezik a feszítőerdők számával, azaz $T_G(2, 1)$-gyel [6].

3. A permutációs Tutte polinom és a két fogalom kapcsolata

3.1. Definícó. Permutációs Tutte polinom

Legyen $H = (A, B, E)$ egy páros gráf, csúcsainak halmaza $V(H) = A \cup B = [m]$. Ha $\pi : [m] \to [m]$ egy permutáció, $i \in A$ csúcsot *belülről aktív*nak hívjuk, ha

$$\pi(i) > \max_{j \in N(i)} \pi(j),$$

míg $j \in B$-t *kívülről aktív*nak, ha

$$\pi(j) > \max_{i \in N(j)} \pi(i),$$

ahol $N(i)$ az $i$vel szomszédos csúcsok halmazát jelöli. Jelöljük $ba(\pi)$-vel a permutációból származó belülről aktív csúcsok számát, $ka(\pi)$-vel a kívülről aktív csúcsokét. Ekkor

$$\widetilde{T}_H(x, y) = \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in S_m} x^{ba(\pi)} y^{ka(\pi)} \tag{2}$$

a H páros gráf permutációs Tutte polinomja.

A következő, alternatív felírása a Tutte polinomnak elengedhetetlen a két fogalom közti kapcsolat bemutatásához. Eredetileg Tutte a polinomot ebben a formában definiálta, csak később cserélődött meg a két felírás szerepe.

3.2. Tétel. *(Tutte)*

Legyen $G = (V, E)$ összefüggő gráf, $|V| = m$. Címkézzük meg az éleket teszőleges módon 1-től m-ig. Ha T egy feszítőfája G-nek, az $e \in E(T)$ élet belülről aktívnak nevezzük, ha a $T - e$ által meghatározott vágásban e címkéje a legnagyobb. Egy $f \notin E(T)$ él kívülről aktív, ha a $T + f$-beli körben neki van a legnagyobb címkéje. Nevezzük $ba(T)$-vel és $ka(T)$-vel a T által meghatározott belülről illetve kívülről aktív élek számát és $\mathcal{T}(G)$ G feszítőfáinak halmazát. Ekkor

$$T_G(x, y) = \sum_{T \in \mathcal{T}(G)} x^{ba(T)} y^{ka(T)}.$$

Ebben a formájában jól látszik, hogy minden együtthatója nemnegatív. Ennek az alternatív definíciónak egy érdekessége, hogy a címkézés (lefixált) permutációja nem befolyásolja a kimenetelt. A következő definíció tetszőleges gráfok és páros gráfok közötti átmenetet segíti elő. Az elnevezés onnan származik, hogy gráfok helyett matroidokra általánosan is definiálhatjuk hasonlóan.

3.3. Definícó. Lokális báziscsere gráf

Legyen $G = (V, E)$ összefüggő, T egy feszítőfája. Ekkor definiáljuk a $H[T]$ páros gráfot a következő módon. Az egyik partíció csúcsai legyenek megfeleltethetőek T éleivel, a másik partíció csúcsai a T-n kívüli élekkel. Két csúcs között akkor fut él, ha bennevannak a másik által meghatározott vágásban illetve körben (ez szimmetrikusan teljesül). Azt mondjuk, hogy $H[T]$ a T-re vonatkozó lokális báziscsere gráfja G-nek.

Ebből már könnyen látható a következő állítás:

3.4. Állítás. *Legyen $G = (V, E)$ összefüggő gráf, ekkor*

$$T_G(x, y) = \sum_{T \in \mathcal{T}(G)} \widetilde{T}_{H[T]}(x, y).$$

Bizonyítás. G csúcsainak egy π permutáció szerinti címkézésére a belülről és kívülről aktív élek, illetve csúcsok definíciója kompatibilis. Most vegyük a Tutte polinomot minden permutáció szerint, majd átlagoljuk.

$$\begin{aligned}
T_G(x, y) =& \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in S_m} T_G(x, y) \\
=& \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{T \in \mathcal{T}(G)} x^{ba_{H[T]}(\pi)} y^{ka_{H[T]}(\pi)} \\
=& \sum_{T \in \mathcal{T}(G)} \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in S_m} x^{ba_{H[T]}(\pi)} y^{ka_{H[T]}(\pi)} \\
=& \sum_{T \in \mathcal{T}(G)} \widetilde{T}_{H[T]}(x, y)
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Pontosan akkor van $H[T]$-ben izolált csúcs, amikor G-ben elvágó- vagy hurokél és $H[T]$ pontosan akkor összefüggő, hogyha G kétszeresen összefüggő.

4. A permutációs Tutte polinom vizsgálata

A Tutte polinomra igazak bizonyos azonosságok, és sokhoz analóg állítások léteznek a permutációs Tutte polinomhoz is. Először bemutatok egy rekurziót.

4.1. Állítás. *Ha $H = (A, B, E)$ páros gráf felírható H_1 és H_2 diszjunkt uniójaként, akkor*

$$\widetilde{T}_H(x, y) = \widetilde{T}_{H_1}(x, y) \widetilde{T}_{H_2}(x, y).$$

Speciálisan ha $v \in A$ izolált csúcs, akkor

$$\widetilde{T}_H(x, y) = x \widetilde{T}_{H-v}(x, y),$$

ha $v \in B$ izolált csúcs, akkor

$$\widetilde{T}_H(x, y) = y \widetilde{T}_{H-v}(x, y)$$

4.2. Állítás. *Legyen $H = (A, B, E)$ páros gráf, $H' = (B, A, E)$ az a gráf, amit a két csúcshalmaz megcserélésével kapunk. Ekkor*

$$\widetilde{T}_H(x, y) = \widetilde{T}_{H'}(y, x).$$

4.3. Állítás. *Ha H egy izolált csúcsok nélküli páros gráf m csúcson, akkor*

$$\widetilde{T}_H(x,y) = \frac{1}{m}\sum_{v\in V(H)} \widetilde{T}_{H-v}(x,y).$$

Ezek segítségével kis gráfokból "felépíthető" nagy gráfok permutációs Tutte polinomja.

5. Egyenlőtlenségek vizsgálata

A Tutte polinom vizsgálata azért érdekes, mert bár nagyon sok fontos érték kiolvasható belőle, mint függvény szinte semmit nem tudunk egy általános gráf tutte polinomjáról. Az évek során több egyszerűnek tűnő sejtés is megfogalmazódott vele kapcsolatban. A legismertebb Merino és Welsh nevéhez fűződik [7], miszerint hurok- és elvágóél nélküli gráfra

$$\max(T_G(2,0), T_G(0,2)) \geq T_G(1,1).$$

Később Conde és Merino megfogalmaztak [3] két további erősebb sejtést is:

$$T_G(2,0) + T_G(0,2) \geq T_G(1,1)$$

és

$$T_G(2,0)T_G(0,2)) \geq T_G(1,1)^2.$$

Egy hasonló egyenlőtlenséget Jackson igazolt [5]. Eszerint hurokélek és elvágóélek nélküli gráfban

$$T_G(3,0)T_G(0,3)) \geq T_G(1,1)^2.$$

Felmerülne, hogy ezeket az egynlőtlenségeket ne csak gráfokra nézzük általában, hanem tetszőleges matroidokra. Sajnos van ellenpélda a matroidokra megfogalmazott Merino Welsh sejtésre [1]. A következő lemma teszi lehetővé, hogy a permutációs Tutte polinom vizsgálatán keresztül bizonyítások születhessenek hasonló kérdésekre a Tutte polinomra vonatkozóan.

5.1. Lemma. *(Átviteli lemma)*

Legyen $x_0, x_1, ..., x_n, y_0, ..., y_n \geq 0$ és $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \geq 0$, hogy $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$. Ha

$$\prod_{k=1}^{n} \widetilde{T}_H(x_k, y_k)^{\alpha_k} \geq \widetilde{T}_H(x_0, y_0)$$

egyenlőtlenség teljesül minden H páros gráfra, akkor tetszőleges G gráf esetén teljesül

$$\prod_{k=1}^{n} T_G(x_k, y_k)^{\alpha_k} \geq T_G(x_0, y_0).$$

Speciálisan $x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2 \geq 0$ esetén, ha tetszőleges páros gráf esetén

$$\widetilde{T}_H(x_1,y_1)\widetilde{T}_H(x_2,y_2) \geq \widetilde{T}_H(x_0,y_0)^2$$

teljesül, akkor tetszőleges G gráfra

$$T_G(x_1,y_1)T_G(x_2,y_2) \geq T_G(x_0,y_0)^2.$$

Először bemutatok egy, a permutációs Tutte polinomra igaz egyenlőtlenséget, majd a fő eredményt, amiből egy a Jackson egyenlőtlenségnél erősebb állítás következik.

5.2. Állítás. *Ha H páros gráf nem tartalmaz izolált csúcsot, akkor*

$$\widetilde{T}_H(4,0)\widetilde{T}_H(0,4) \geq \widetilde{T}_H(2,2)^2.$$

Az utolsó eredmény, a Jackson egyenlőtlenség javítása, még kiadatlan munkában tovább lett javítva, jelenleg a legkisebb ismert konstans 2.355.

5.3. Tétel. *Tetszőleges H izolált csúcs mentes páros gráfra és $x \geq 2.9243$ esetén*

$$\widetilde{T}_H(x,0)\widetilde{T}_H(0,x) > 1 = \widetilde{T}_H(1,1)^2.$$

Ebből következik az átviteli lemmával, hogy tetszőleges G gráfra

$$T_G(x,0)T_G(0,x) \geq T_G(1,1)^2.$$

Hivatkozások

[1] Csongor Beke, Gergely Kál Csáji, Péter Csikvári, and Sára Pituk. The merino–welsh conjecture is false for matroids. *Advances in Mathematics*, 446:109674, 2024.

[2] Csongor Beke, Gergely Kál Csáji, Péter Csikvári, and Sára Pituk. Permutation tutte polynomial. *European Journal of Combinatorics*, 2024.

[3] Rodolfo Conde and Criel Merino. Comparing the number of acyclic and totally cyclic orientations with that of spanning trees of a graph. *Int. J. Math. Com*, 2009.

[4] Joanna A. Ellis-Monaghan and Iain Moffatt. *Handbook of the Tutte polynomial and related topics*. CRC Press, 2022.

[5] Bill Jackson. An inequality for tutte polynomials. *Combinatorica*, 2010.

[6] D.J. Kleitman and K.J. Winston. Forests and score vectors. *Combinatorica*, 1:49–54, 1981.

[7] Criel Merino and Dominic Welsh. Forests, colorings and acyclic orientations of the square lattice. *Annals of Combinatorics*, 1999.