Komplex dinamikai problémák

Sidó Dávid

Témavezető: Sigray István

2025. január 9.

Fatou- és Julia-halmaz

Jelölés: $f^{\circ n}$ a függvény n-szeri iteráltja.

Definíció

Legyenek S és S' Riemann-gömbök. **Normális**nak nevezzük $f_\alpha : S \to S'$ holomorf leképezések egy családját, ha minden $\{f_n\}$ végtelen sorozatból kiválasztható lokálisan egyenletesen konvergens $\{f_{n_k}\}$ részsorozat.

Definíció

Legyen S a Riemann-gömb, $f : S \to S$ egy nemkonstans meromorf leképezés, és rögzítsünk egy $z_0 \in S$ pontot. Ha létezik U környezet úgy, hogy $\{f^{\circ n}|_U\}$ normális családot alkot, akkor azt mondjuk, hogy z_0 **reguláris** vagy normális pont. Ezek összessége a **Fatou-halmaz** ($\mathcal{F}$), a komplementumbeli pontok pedig a **Julia-halmaz**hoz ($\mathcal{J}$) tartoznak.

Vonzó és taszító fixpontok

Definíció

Ha $f(z_0) = z_0$ és $|f'(z_0)| < 1$, akkor z_0 **vonzó fixpont**, ha viszont $|f'(z_0)| > 1$, akkor **taszító**.

Definíció

Ha z_0 vonzó fixpont, akkor

$$\Omega := \{z \in \hat{\mathbb{C}} : \exists U \text{ környezet úgy, hogy } f^{\circ n} \xrightarrow{e} z_0 \; U\text{-n}\}$$

a z_0 **vonzási tartománya**.

Vonzó és taszító pályák

Definíció

Tekintsük a

$$z_0 \mapsto z_1 \mapsto \ldots \mapsto z_{n-1} \mapsto z_n = z_0$$

periodikus pályát. Ekkor a **multiplikátor**

$$\lambda = (f^{\circ n})'(z_i) = f'(z_0) \cdot \ldots \cdot f'(z_n).$$

Ha $|\lambda| < 1$, akkor a pályát **vonzó**nak, ha $|\lambda| > 1$ akkor **taszító**nak hívjuk, a $\lambda = 0$ esetben pedig **szupervonzó**nak.

Hasonlóan definiálható egy vonzó periodikus pálya vonzási tartománya.

Néhány tulajdonság

- $\mathcal{J}$ teljesen invariáns f-re nézve, vagyis $f(\mathcal{J}) = f^{-1}(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$.
- Minden $n \in \mathbb{Z}^+$-ra $\mathcal{J}(f^{\circ n}) = \mathcal{J}(f)$.
- $\Omega \subseteq \mathcal{F}$, de $\partial\Omega \subseteq \mathcal{J}$.
- Ha f legalább másodfokú racionális törtfüggvény, akkor $\mathcal{J}$ nem üres.
- Ha $\mathcal{J}$ tartalmaz belső pontot, akkor az egész Riemann-gömb.

A két alaptétel

Tétel

Ha $z_0 \in \mathcal{J}(f)$, akkor az iterált ősképek halmaza, vagyis

$$\{z : \exists n \geq 0\ f^{\circ n}(z) = z_0\}$$

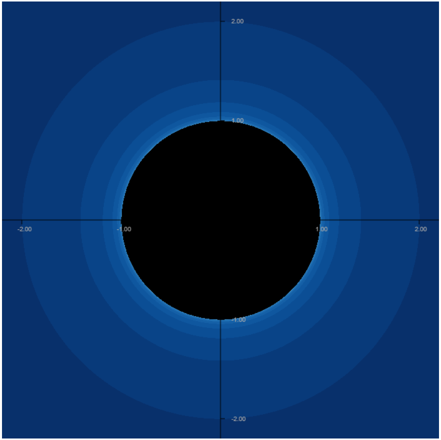
mindenütt sűrű a Julia-halmazban.

A tétel erőssége, hogy algoritmust szolgáltat a Julia-halmazok ábrázolására.

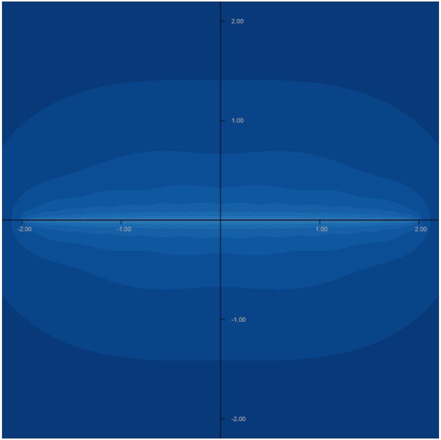
Tétel

Egy legalább másodfokú racionális törtfüggvény Julia-halmaza megegyezik a taszító periodikus pontok halmazának lezártjával.

Egyszerű példák



(a) $f(z) = z^{\pm n}$



(b) $f(z) = z^2 - 2$

A valós eset

Kérdés

Vajon igaz marad-e a fenti tétel, hogy egy valós együtthatós racionális törtfüggvény Julia-halmazának egy valós pontját véve, annak valós ősképei sűrű részhalmazát alkotják $\mathcal{J}(f) \cap \mathbb{R}$-nek?

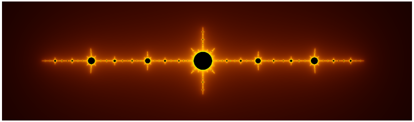
Válasz: Nem, a hatványfüggvények ellenpéldák.

Kérdés

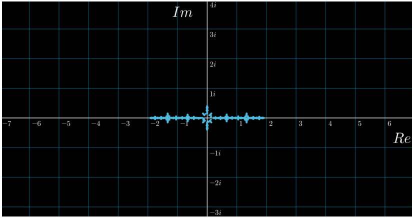
Vajon igaz-e az, hogy ezen valós ősképek tartalmazzák $\mathcal{J}(f) \cap \mathbb{R}$ összes torlódási pontját?

Válasz: Továbbra is nemleges. Erre Lattès adott ellenpéldát. De létezik olyan, ahol $\mathcal{J} \neq \hat{\mathbb{C}}$?

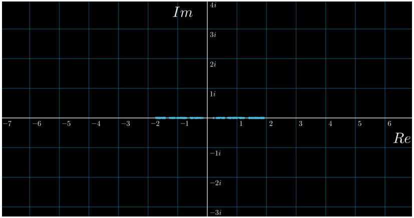
Eredmények $c = -1{,}75488$-re



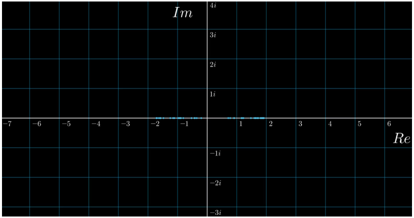
(a) Egy weboldal által készített ábra



(b) Program1 eredménye

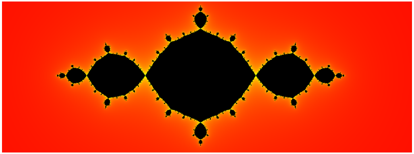


(c) Program2 eredénye

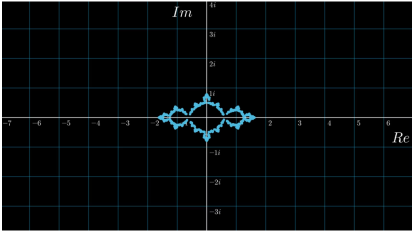


(d) Program3 eredénye

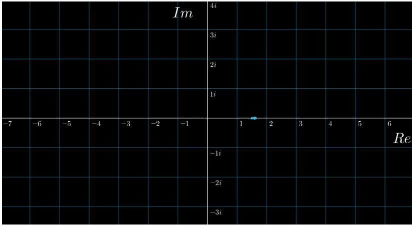
Eredmények $c = -1$-re



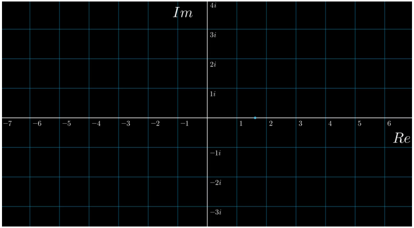
(a) Netes ábra



(b) Program1 eredménye



(c) Program2 eredénye



(d) Program3 eredénye

Köszönöm a figyelmet!