

# Komplex dinamikai problémák

## Kutatómunka 1.

Szerző: Sidó Dávid  
Témavezető: Sigray István

2024. december 20.

### 1. Bevezetés

A komplex dinamika a matematika egyik leggyorsabban fejlődő ága. Klasszikus tételei alapvető szerepet játszanak a holomorf leképezések iterációi viselkedésének megértésében. Jelen tanulmány célja ezen tételek valós együtthatós racionális törtfüggvényekre való alkalmazhatóságának vizsgálata.

Többek között kitérünk az iterált ösképekre és a tasztító periodikus pontok Julia-halmazbeli sűrűségére. Ezen fő tételek a Julia-halmaz megszámlálható sűrű részalmazát adják meg, és mi a hozzájuk kapcsolódó kérdésekkel foglalkozunk.

Az eredmények nagy része John Milnor könyvéből származik [1], de a kutatómunkám során egyéb cikkekbe is beleástam magam. [2]

### 2. Elméleti összefoglaló

#### 2.1. Fatou- és Julia-halmazok

A holomorf leképezések iteráltjainak lokális, vagyis fixpont körüli viselkedésének elméletét már a késő XIX. századra kidolgozták, globális leírásuk azonban még igen hiányos volt. 1906-ban Pierre Fatou megmutatta, hogy a  $z \mapsto \frac{z^2}{z^2+2}$  függvény esetén – Cantor-halmaznyi kivételes ponttól eltekintve – majdnem minden orbit az origóba konvergál. Ez felkeltette a matematikusok érdeklődését. Fatou mellett az első világháborúban súlyosan megsérült Gaston Julia szintén jelentős mértékben hozzájárult a tudományág fejlődéséhez. Úttörő munkásságát a párizsi akadémia díjjal jutalmazta.

**2.1.1. Definíció.** Legyenek  $S$  és  $S'$  Riemann-gömbök. Ekkor normálisnak nevezzük  $f_\alpha: S \rightarrow S'$  holomorf leképezések egy családját, ha minden  $\{f_n\}$  végtelen sorozatból kiválasztható lokálisan egyenletesen konvergens  $\{f_{n_k}\}$  részsorozat.

**2.1.2. Definíció.** Legyen  $S$  a Riemann-gömb,  $f: S \rightarrow S$  egy nemkonstans meromorf leképezés és  $f^{on}$  az  $n$ -szeri iteráltja. Rögzítsünk egy  $z_0 \in S$  pontot. Ha létezik  $z_0$ -nak  $U$  környezete, amelyre korlátozva az  $\{f^{on}|_U\}$  iteráltak sorozata normális családot alkot, akkor azt mondjuk, hogy  $z_0$  reguláris vagy normális pont. Ezen pontok összessége a Fatou-halmaz. Egyébként  $z_0$  a Julia-halmazhoz tartozik, amit  $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}$ -vel jelölünk, a Fatou-halmazt pedig  $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}$ -fel.

A definíció értelmében a Fatou-halmaz nyílt, komplementuma, a Julia-halmaz zárt. Leegyszerűsítve a Julia-halmazba azon pontok tartoznak, amelyek környezete kaotikus módon viselkedik a dinamikai rendszerre nézve: már egy kis perturbáció is hatalmas változást okozhat.

**2.1.3. Példa.** Tekintsük a négyzetre emelés függvényét a Riemann-gömbön, azaz  $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , ahol  $f(z) = z^2$ . Ekkor nyilván  $\mathbb{D}, \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D} \subseteq \mathcal{F}$ , hiszen az előbbi esetben  $f^{on} \rightarrow 0$ , míg az utóbbiban  $f^{on} \rightarrow \infty$  lokálisan egyenletesen. Tehát  $\mathcal{J} = \mathbb{S}^1 = \{z : |z| = 1\}$ .

Most lássuk a Julia-halmaz néhány fontos tulajdonságát.

**2.1.4. Állítás.**  $\mathcal{J}(f)$  teljesen invariáns  $f$ -re nézve, ami azt jelenti, hogy ha  $\mathcal{J} = \mathcal{J}(f)$ , akkor  $f(\mathcal{J}) = f^{-1}(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$ .

Ebből következik, hogy a Julia-halmaz „önhasonló”. Legyenek  $U_1, U_2$  a  $z_1, z_2$  pontok környezetei. Ha  $f(z_1) = z_2$  és  $f'(z_1) \neq 0$ , akkor ez egy konform izomorfizmust indukál  $U_1 \cap \mathcal{J}$  és  $U_2 \cap \mathcal{J}$  között.

**2.1.5. Állítás.** Minden  $n \in \mathbb{Z}^+$ -ra  $\mathcal{J}(f^{on})$  megegyezik  $\mathcal{J}(f)$ -fel.

**2.1.6. Definíció.** Ha  $f(z_0) = z_0$  és  $|f'(z_0)| < 1$ , akkor  $z_0$  vonzó fixpont, ha pedig  $|f'(z_0)| > 1$ , akkor taszító.

**2.1.7. Megjegyzés.** A  $z_0 = \infty$  pont vonzó fixpontja  $f(z)$ -nek, ha a 0 vonzó fixpontja  $g(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$ -nek.

A vonzó fixpontot azért nevezik vonzónak, mert van olyan  $U$  környezete, hogy  $f^{on}(z) \rightarrow z_0$  egyenletesen minden  $z \in U$ -ra.

**2.1.8. Definíció.** Ha  $z_0$  vonzó fixpont, akkor

$$\Omega := \{z \in \hat{\mathbb{C}} : \exists U \text{ környezet úgy, hogy } f^{on} \xrightarrow{c} z_0 \text{ } U\text{-n}\}$$

a  $z_0$  vonzási tartománya.

**2.1.9. Állítás.** Egy vonzó fixpont vonzási tartományára fennáll, hogy  $\Omega \subseteq \mathcal{F}$ , viszont  $\partial\Omega \subseteq \mathcal{J}$ , illetve a taszító fixpontok is Julia-halmazbeliek.

Most általánosítunk periodikus pontok esetére.

**2.1.10. Definíció.** Tekintsük az

$$f : z_0 \mapsto z_1 \mapsto \dots \mapsto z_{n-1} \mapsto z_n = z_0$$

periodikus trajektóriát, azaz ciklust. Ha az összes  $z_i$  különböző, akkor  $n$  a periódus. Ekkor a

$$\lambda = (f^{on})'(z_i) = f'(z_0) \cdot \dots \cdot f'(z_n)$$

komplex szám az adott pálya multiplikatora vagy sajátértéke. A derivált jóldefiniált, ezért segítségével kategorizálhatjuk a pályákat. Ha  $|\lambda| < 1$ , akkor a pályát vonzónak, ha  $|\lambda| > 1$  akkor taszítónak hívjuk, a  $\lambda = 0$  esetben pedig szupervonzónak.

**2.1.11. Megjegyzés.** Az ideális pont ismét speciális abból a szempontból, hogy a reciprokkal kell konjugálnunk. Például  $f(z) = 2z$  esetén a  $\infty$  mint vonzó fixpont multiplikatora  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

**2.1.12. Definíció.** Egy vonzó periodikus pálya vonzási tartománya az az  $\Omega$  nyílt halmaz, amelynek  $z$  pontjaira az  $f^{on}(z), f^{2n}(z), \dots$  sorozat a periodikus pálya valamely pontjához konvergál.

**2.1.13. Állítás.** Hasonlóan elmondható, hogy a Fatou-halmaz tartalmaz minden vonzó periodikus pályát, sőt azok vonzási tartományát is. Azonban  $\partial\Omega \subseteq \mathcal{J}$  a taszító pályákkal együtt.

**2.1.14. Definíció.** Egy periodikus pontot parabolikusnak hívunk, ha  $\lambda = 1$  (vagy  $n$ -edik egységgyök), de  $f^{on}$  mégsem az identitás.

**2.1.15. Állítás.** Minden parabolikus pont a Julia-halmazhoz tartozik.

**2.1.16. Állítás.** Ha  $f$  legalább másodfokú törtfüggvény, akkor  $\mathcal{J}(f)$  nemüres.

**2.1.17. Állítás.** Ha a Julia-halmaz tartalmaz belső pontot, akkor az egész Riemann-gömb.

**2.1.18. Tétel.** Ha  $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ , akkor az iterált ősképek halmaza, vagyis

$$\{z : \exists n \geq 0 \ f^{on}(z) = z_0\}$$

mindenhon sűrű a Julia-halmazban.

**2.1.19. Következmény.** Ha  $f$  legalább másodfokú, akkor  $\mathcal{J}(f)$ -nek nincsenek izolált pontjai.

A tétel egyik erőssége, hogy algoritmust szolgáltat a Julia-halmazok ábrázolására. Valóban, hiszen az iterált ősképek meghatározásával tetszőlegesen közel kerülhetünk a Julia-halmaz bármely pontjához. Azonban a módszer hátránya, hogy bonyolultabb függvényeknél magas az idő- és tárigenye.

## 2.2. Sima Julia-halmazok

A legtöbb Julia-halmaz fraktálszerkezettel rendelkezik, azonban akadnak függvények, amelyek Julia-halmaza sima topológiai sokaság. Az alábbiakban három példát tárgyalunk.

**2.2.1. Példa (Kör).** Korábban láttuk, hogy az  $f(z) = z^2$  leképezés Julia-halmaza az egységkör. Ez teljesül minden  $z \mapsto z^{\pm n}$  alakú hatványfüggvényre, ahol  $n \geq 2$ .

**2.2.2. Megjegyzés.** Az alábbi bizonyításokban felhasználjuk azt a tényt, hogy a dinamikai rendszer szempontjából  $f$  és egy  $\alpha$  homeomorfizmussal vett konjugáltja,  $\alpha \circ f \circ \alpha$  ekvivalens, azaz ugyanúgy viselkedik.

**2.2.3. Példa (Intervallum).** Tekintsük az  $f(z) = z^2 - 2$  függvényt. Figyeljük meg, hogy ez a  $T_2(z) = 2z^2 - 1$  másodfokú Csebisev-polinom konjugáltja az  $\alpha(z) = 2z$  lineáris függvénnyel. Általánosságban is elmondható, hogy bármely  $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$  Csebisev-polinom Julia-halmaza intervallum.

Az utolsó konstrukció Samuel Lattès francia matematikushoz fűződik, aki 1918-ban, röviddel halála előtt vetette papírra.

**2.2.4. Példa (Riemann-gömb).** Vegyünk egy  $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  paralelogrammarácsot ( $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  lineárisan független) a komplex síkon a hozzátartozó Weierstraß-féle  $\wp$ -függvénnyel. Ennek három fontos tulajdonságából – nevezetesen, hogy kétszeresen periodikus, páros és az alapparalelogrammában minden pontot multiplicitással számolva kétszer vesz föl – már kijön, hogy Julia-halmaza a Riemann-gömb. Valóban, mivel  $\wp(2\wp^{-1})(z)$  egy jóldefiniált negyedfokú racionális törtfüggvény, amelynek Julia-halmaza a Riemann-gömb. Ez hasonlóan igaz az  $n^2$ -edfokú  $\wp(n\wp^{-1})(z)$ -re, ahol  $n$  tetszőleges 1-nél nagyobb egész.

**2.2.5. Tétel.** *A legalább másodfokú racionális törtfüggvények Julia-halmaza megegyezik a taszító periodikus pontok halmazának lezártjával.*

## 3. A valós eset

A fenti ismertető után a figyelmes olvasóban felvetődik a kérdés, hogy mi a helyzet akkor, ha csupán valós együtthatókat engedünk meg és valós ösképekre szorítkozunk. Vajon igaz marad-e a 2.1.18. és a 2.2.5. Tétel, vagyis hogy egy valós együtthatós racionális törtfüggvény Julia-halmazának egy valós pontját véve, azok valós  $n$ -edrendű ösképei sűrű részhalmaza lesz-e  $\mathcal{J}(f) \cap \mathbb{R}$ -nek, továbbá hogy egy valós együtthatós racionális törtfüggvény valós taszító periodikus pontjai sűrű részhalmaza lesz-e  $\mathcal{J}(f) \cap \mathbb{R}$ -nek.

E kérdésekre a válasz nemleges, és fentebb láttunk is rá egy egyszerű ellenpéldát:  $f(z) = z^2$ . Továbbgondolva feltehető azonban az a kérdés, hogy az  $n$ -edrendű valós ösképek, illetve a valós periodikus pontok lezártja tartalmazza-e  $\mathcal{J}(f) \cap \mathbb{R}$  összes torlódási pontját.

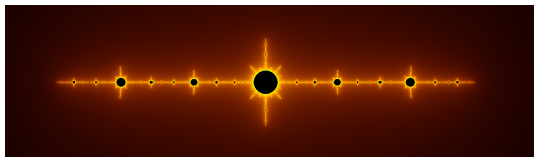
Erre szintűgy nemleges a válasz, hiszen a valós együtthatós Lattès-függvények jó ellenpéldát szolgáltatnak.

A kutatásom célja ezen utolsó kérdésre olyan ellenpéldát találni, amelynél a Julia-halmaz nem a Riemann-gömb, de kizárólag másodfokú polinomokkal kísérleteztem, ahol  $f(z) = z^2 + c$  alakú. Ehhez írtam három C++ programot, amelyek az alábbi eljárást hajtják végre:

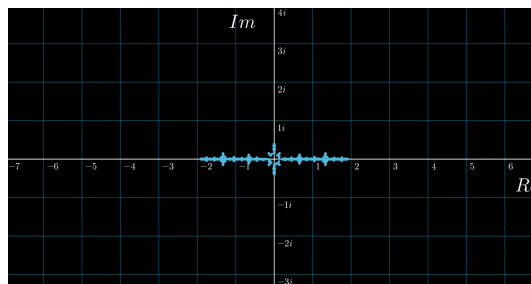
- az első program bekéri  $c$  értékét és azt, hogy  $f$ -nek melyik fixpontja legyen az első tag, majd ebből indulva létrehozza az ösképek  $z_n$  sorozatát úgy, hogy a gyök miatt lehetséges kettő közül mindig véletlenszerűen kiválasztja az egyiket (ez elvileg a teljes Julia-halmazt kirajzolja, ha elég sokáig futtadjuk);
- a kapott sorozatot elmenti egy Excel táblázatba, amelyet a második program beolvas, és kigyűjti belőle azon pontokat, amelyek imaginárius (képzetes) része kicsi, vagyis közel vannak a valós tengelyhez, pontosabban  $-\frac{1}{100} \leq \text{Im}(z) \leq \frac{1}{100}$ , illetőleg  $\text{Re}(z) \geq c$  (az összehasonlítás végett);
- végül a harmadik program is beolvassa a fájlt, de ezúttal csak a  $c$ -nél nem kisebb valósokat tartja meg;

- ezt követően betápláltam mindhárom adatkupacot a Manim nevű animációkészítő és ábrázoló programba, hogy megjelenjen előttem a Julia-halmaz, és hogy össze tudjam hasonlítani a második és harmadik program eredményét egymással.

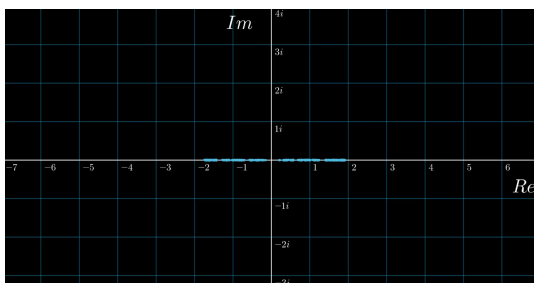
Több különböző  $c$  értékkel is teszteltem a programot, és úgy tapasztaltam, hogy a második és harmadik program által rajzolt ábrák eltérőek, ami arra mutat, hogy jó eséllyel már a polinomok között is akad ellenpélda. Szemléltetésül íme négy ábra a számomra leglátványosabbikról, amelyet a szakirodalomban repülő néven szoktak emlegetni:



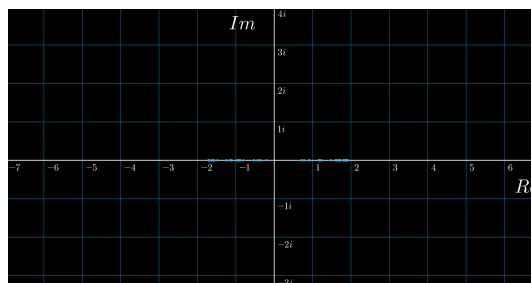
(a) Egy **weboldal** által készített ábra



(b) Program1 eredménye



(c) Program2 eredménye



(d) Program3 eredménye

1. ábra. Itt a  $c = -1,75488$  értéket használtam.

Ne várjunk el ugyanolyan minőséget, a netes verzió mögött komolyabb szoftver húzódik a háttérben, az enyémnek vannak hiányosságai, még fejlesztésre szorul! Ennek dacára viszont egész szépen visszaadja az online kép kicsinyített mását, habár kevésbé részletgazdagon.

A Julia-halmaznak két sűrű részhalmaza van: az iterált ősképek halmaza és a periodikus pontok pályái, azonban ez utóbbi jóval nehezebben programozható, mert egy sokadfokú egyenlet megoldásit kell hozzá megkeresnünk. Másrészt a memóriakapacitás korlátossága miatt az ősképeknél sem vehetjük az összeset, mivel ez exponenciális futásidejű algoritmushoz vezetne (az ősképek száma minden lépésben duplázódik), éppen ezért randomizált a program. Sőt ahhoz, hogy egyáltalán véget érjen és ne fusson örökké vagy ne szakadjon félbe,  $c$  értékét negatívnak kell venni, valamint úgy érdemes beállítani, hogy az a  $[-2, -1]$  intervallumba essen. Például  $-2$  alatt a Julia-halmaz már totálisan szétesővé válik. Ennek okát a dolgozat keretein belül nem tárgyaljuk. Egyébiránt pedig akár a  $\varphi$ -függvény szerint is programozhattam volna.

## Hivatkozások

- [1] John Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, 3rd Edition, Princeton University Press, (2006).
- [2] Scott Sutherland, An Introduction to Julia and Fatou Sets, *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, **92** (2014), 37–60. DOI: 10.1007/978-3-319-08105-2\_3