

Nemkommutatív Iwasawa-elmélet

Pálffy Patrik Dániel

2025 január

Tétel

Legyen p egy páratlan prím. Ha $x, y, z \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy $x^p + y^p = z^p$ akkor $xyz = 0$.

Tétel (Kummer, 1850)

Ha p és $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ osztályszáma relatív prímekek akkor az előző tétel igaz p -re.

Sajnálatosan végtelen sok olyan prím van, amire a feltétel nem teljesül. Ezeket irreguláris prímekek hívjuk.

Iwasawa az 1950-es években az $F_n = \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ alakú testeket vizsgálta. Ezek egy növekvő bővítést alkotják \mathbb{Q} -nak

$$F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n \subset \dots$$

Vizsgálata során az $\text{CL}(F_n)$ osztálycsoport A_n p -Sylow csoportjának nagyságát nézte n -től függően.

Tétel (Iwasawa, 1958)

Minden p prímre léteztek λ, μ, c nemnegatív egészek amelyekre teljesül, hogy ha n elég nagy akkor

$$\log_p |A_n| = \lambda n + \mu p^n + c.$$

Definíció (gyűrű filtrálás)

Legyen R egy gyűrű. Filtrálásnak nevezzük R -n azt a függvényt

$$v : R \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

amire teljesülnek a következők $\forall r, s \in R$ -re

- $v(r - s) \geq \min(v(r), v(s))$
- $v(rs) \geq v(r) + v(s)$
- $v(1) = 0$
- $v(0) = \infty$.

Jelölés

Legyen (R, v) egy filtrált gyűrű. Ennek a gyűrűnek létezik ideáljainak egy családja $R_\lambda = \{r \in R \mid v(r) \geq \lambda\}$, amikre teljesül, hogy

$$R_\lambda = \bigcap_{\mu < \lambda} R_\mu \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}.$$

Definíció (Telítés)

A következő műveletet nevezzük az (R, ν) filtrált gyűrű telítésének

$$\begin{aligned}\hat{R} &= \varinjlim R/R_\lambda \\ &= \{(r_\lambda + R_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}} \in \prod_{\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}} R/R_\lambda \mid (\forall \mu < \lambda) r_\lambda + R_\mu = r_\mu + R_\mu\},\end{aligned}$$

így egy gyűrűt kapunk és a műveletet koordinátánként végezzük. Továbbá létezik egy természetes gyűrű homomorfizmus $R \rightarrow \varinjlim R/R_\lambda$, $r \mapsto (r + R_\lambda)$. Azt mondjuk, hogy (R, ν) filtrált gyűrű teljes, ha a természetes homomorfizmus izomorfizmus.

Fokszámozott gyűrű

Definíció (fokszámozott gyűrű)

Legyen A egy gyűrű. A fokszámozott gyűrű, ha létezik egy $A = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}} A_\lambda$ felbontása abel csoportok direktösszegére és minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ -re $A_\lambda A_\mu \subset A_{\lambda+\mu}$.

Definíció (Asszociált fokszámozott gyűrű)

Legyen (R, v) egy filtrált gyűrű és $R_{\lambda^+} = \{r \in R \mid v(r) > \lambda\}$, $gr_\lambda R = R_\lambda / R_{\lambda^+}$ minden $\lambda \geq 0$ -re részgyűrűk. Ekkor az R -hez asszociált fokszámozott gyűrű a következő fokszámozott gyűrű

$$grR = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}} gr_\lambda R$$

ahol a szorzás a következő bilineáris leképezés

$$gr_\lambda R \times gr_\mu R \rightarrow gr_{\lambda+\mu} R$$

$$(r + R_{\lambda^+})(s + R_{\mu^+}) \mapsto rs + R_{(\lambda+\mu)^+}.$$

Definíció

Legyen G egy csoport. Filtrálásnak nevezzük azt a függvényt G -n, $\omega : G \rightarrow \mathbb{R}^{>0} \cup \{\infty\}$, amire teljesül, hogy

- $\omega(xy^{-1}) \geq \min(\omega(x), \omega(y))$ minden $x, y \in G$.
- $\omega(x^{-1}y^{-1}xy) \geq \omega(x) + \omega(y)$.

Ezt a csoportot (G, ω) filtrált csoportnak nevezzük. Egy filtrálás szeparált, ha $\omega^{-1}(\infty) = \{e_G\}$.

Definíció

Legyen p egy prím. A szeparált filtrálást G -n p -értéknek nevezzük, ha minden $g \in G$

- $\omega(g) > \frac{1}{p-1}$,
- $\omega(g^p) = \omega(g) + 1$.

Lemma

Legyen G egy csoport és rajta egy p -érték ω ekkor minden $\lambda > 0$ – ra

- $\text{gr}G := G_\lambda/G_{\lambda+}$ p rendű.
- G/G_λ egy p -csoport
- G torziómentes.

Definíció (Asszociált fokszámozott csoport)

Az asszociált fokszámozott csoportja a G p -értékelt csoportnak

$$\text{gr}G = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{R}^{>0}} G_\lambda/G_{\lambda+}.$$

Megjegyzés

Asszociált fokszámozott csoportot lehet általánosan is definiálni filtrált csoportokra.

Definíció

Minden $\lambda, \mu > 0$ -ra legyen

$$[-, -] : gr_\lambda G \times gr_\mu G \rightarrow gr_{\lambda+\mu} G$$

és

$$[xG_{\lambda+}, yG_{\mu+}] \mapsto (x, y)G_{\lambda+\mu+}.$$

Állítás

A grG egy \mathbf{Z} -Lie algebrát alkot $[-, -]$ -nek a \mathbf{Z} -bilineáris kiterjesztése.

p -értékel csoport, mint $\mathbb{F}_p[t]$ -Lie algebra

Állítás

Legyen (G, ω) egy p -értékelt csoport. Ekkor létezik csoport homomorfizmusok egy családjá

$$P_\lambda : gr_\lambda G \rightarrow gr_{\lambda+1} G$$

és

$$xG_{\lambda+} \mapsto x^p G_{\lambda+1+}.$$

Továbbá ha $a \in gr_\lambda G$ és $b \in gr_\mu G$ ekkor $[P_\lambda a, b] = P_{\lambda+\mu}[a, b]$.

Észrevétel

Előbbi P_λ -k direkt összege $\bigoplus P_\lambda$ egy 1 fokszámú operátor grG -n.

következmény

Legyen (G, ω) egy p -értékelt csoport. Ekkor grG egy fokszámozott $\mathbb{F}_p[t]$ -Lie algebra, ahol t úgy hat, mint P és a fokszáma 1.

Definíció

Legyen (G, ω) egy filtrált csoport. Meg tudunk határozni egy topológiát G -n úgy, hogy egy részhalmaz nyílt akkor és csak akkor, ha gG_λ alakú mellékosztályok uniója.

Definíció

Legyen (G, ω) egy filtrált csoport. Ekkor a csoport telítése alatt a következőt értjük

$$\hat{G} = \varprojlim_{\lambda > 0} G/G_\lambda = \{(g_\lambda G_\lambda)_{\lambda > 0} \in \prod_{\lambda > 0} G/G_\lambda \mid g_\lambda G_\mu = g_\mu G_\mu \text{ minden } \mu < \lambda\}.$$

Azt mondjuk, hogy G teljes, ha a természetes csoport homomorfizmus

$$G \rightarrow \hat{G}$$

$$g \mapsto (gG_\lambda)_{\lambda > 0}$$

egy izomorfizmus.

Lemma

Legyen $x \in G$ és $\lambda \in \mathbf{Z}_p$. Ekkor egyértelműen létezik egy $x^\lambda \in G$ olyan, hogy minden $t > 0$, $x^\lambda G_t = x^{\lambda_t} G_t$, ha $\lambda_t \in \mathbb{Z}$ és $v_p(\lambda - \lambda_t) \geq t$.

Definíció

Legyen G egy teljes p -értékelt csoport és $x \in G$. Az előző lemmában adott függvényt a p -adikus hatványozásnak hívjuk.

Következmény

Minden teljes véges rangú p -értékelt csoport véges p -csoportok inverz limesze.

Példa

A következő csoport egy p -értékelt (pro- p is) csoport

$$U^{(1)} = \text{Ker}(\text{GL}_n(\mathbf{Z}_p) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{F}_p)) = \{I + pA \mid A \in \mathbf{Z}_p\}$$

A filtrálást A -nak az összes értéke közül a legkisebb p -hatvány határozza meg. Az is világos, hogy $v((I + pA)^p) = I + pA + \dots = v(I + pA) + 1$.

Jelölés

Mostantól \mathcal{O} egy teljes diszkrét értékű gyűrű úgy, hogy $k = \mathcal{O}/p\mathcal{O}$ egy p karakterisztikájú test. Továbbá legyen (G, ω) egy p -értékelt csoport. Ekkor minden $\lambda \geq 0$ -ra

$$\mathcal{O}[G]_{\lambda} = \mathcal{O} \cdot \{p^r (g_1 - 1) \dots (g_s - 1) \mid r + \sum_{i=1}^s \omega(g_i) \geq \lambda \quad \forall g_1, \dots, g_s \in G\}.$$

Lemma

Az előbbi család $(\mathcal{O}[G]_{\lambda})_{\lambda > 0}$ definiál egy filtrált algebrát $(\mathcal{O}[G], v)$ -n. Továbbá $gr\mathcal{O}[G]$ -t nézhetjük, mint egy fokszámozott $k[t]$ algebra.

Állítás

A következő függvények családja

$$\phi_\lambda : gr_\lambda G \rightarrow gr_\lambda \mathcal{O}[G]$$

$$gG_{\lambda^+} \mapsto (g - 1) + \mathcal{O}[G]_{\lambda^+},$$

indukálnak egy leképezést a fokszámozott $\mathbb{F}_p[t]$ -Lie algebrákon

$$\phi = \bigoplus \phi_\lambda$$

és $gr\mathcal{O}[G]$ -en a kommutátorok adják a Lie struktúrát.

Definíció

Legyen \mathfrak{g} egy k -Lie algebra. Ekkor \mathfrak{g} -nek léteznek egy univerzális burkoló algebrája $U(\mathfrak{g}) = k \langle \mathfrak{g} \rangle / (xy - yx - [x, y])$.

Állítás

Az előző állításban megadott fokszámozott $\mathbb{F}_p[t]$ -Lie algebra leképezés kiterjed egy szürjektív fokszámozott $k[t]$ -algebra homomorfizmussá

$$\phi : U_{k[t]}(k \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathfrak{g}\mathcal{O}[G]) \rightarrow \mathfrak{g}\mathcal{O}[G].$$

Lemma

Ha H egy véges p csoport és $J_H = \ker(k[H] \rightarrow k)$ ekkor J_H nilpotens.

Következmény

Minden $m \in \mathbb{N}$ és $s \in \mathbb{R}^{>0}$ a következő homomorfizmus magja nilpotens $(\mathcal{O}/p^m\mathcal{O})[G/G_s] \rightarrow k$.

Következmény

Minden $m \in \mathbb{N}$ és $s \in \mathbb{R}^{>0}$ létezik $\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ amire teljesül, hogy $\mathcal{O}[G]_\lambda \subset \ker(\psi_{s,m} : \mathcal{O}[G] \rightarrow (\mathcal{O}/p^m\mathcal{O})[G/G_s])$.

Tétel

A következő fokszámozott \mathbb{F}_p algebra morfizmus

$$\phi : U_{k[t]}(k \otimes_{\mathbb{F}_p} grG) \rightarrow gr\mathcal{O}[G]$$

egy izomorfizmus.

Definíció

Azt mondjuk, hogy egy topológikus csoport G provéges, ha izomorf egy véges csoportoknak inverz limeszével. Azt mondjuk, hogy pro- p , ha a véges csoportok p -csoportok.

Definíció

Minden kommutatív R gyűrűre és G provéges csoportra létezik a teljes R együtthetős csoportgyűrű, ami

$$RG = R[[G]] = \varprojlim_{N \triangleleft G} R[G/N].$$

Ha $R = \mathbf{Z}_p$ és G -nek létezik egy nyílt normálosztója N , amin megadható egy ω p -értékelést, amivel (N, ω) egy véges rangú teljes p -értékű csoportot alkot. Ekkor RG -t egy Iwasawa algebrának hívunk.

Definíció

$R * H$ gyűrűt R gyűrűnek és H csoportnak a keresztszorzatának hívjuk, ami tartalmazza R -t mint részgyűrűt és egységek olyan halmazát $\bar{H} = \{\bar{h} | h \in H\}$ amire teljesül a következők

- $R * H$ egy szabad R -balmodulus, amit $H \rightarrow R * H; h \mapsto \bar{h}$ general és
- minden $x, y \in H; \bar{x}R = R\bar{x}$ és $\bar{x}\bar{y}R = \bar{x}\bar{y}R$.

Lemma

Ha H egy nyílt normálosztója G -nek akkor H -nak az indexe véges. Továbbá $RG = RH * G/H$.

Tétel

Legyen (G, ω) egy véges rangú teljes p -értékelt csoport. Ekkor

$$\mathcal{O}G \simeq \varprojlim_{\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}} \mathcal{O}[G]/\mathcal{O}[G]_{\lambda}.$$

Definíció

Legyen R egy gyűrű. Ekkor \mathbb{N}_0 -filtráció az $(F_n R)_{n \in \mathbb{N}_0}$ részcsoportoknak növekvő családja R -ben amire teljesül, hogy

- $1 \in F_n R$ minden $n \in \mathbb{N}_0$;
- $F_n R F_m R \subseteq F_{n+m} R$ minden $n, m \in \mathbb{N}_0$ és
- $R = \bigcup_{n \geq 0} F_n R$.

Minden \mathbb{N}_0 -filtrációhoz R -en létezik egy asszociált fokszámozott gyűrűje R -nek, ami az \mathbb{N}_0 -fokszámozott gyűrű

$$grR = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} F_n R / F_{n-1} R$$

($F_{-1} R = 0$) és a szorzás a következő bilineáris leképezés adja meg

$$(F_n R / F_{n-1} R) \times (F_m R / F_{m-1} R) \rightarrow F_{n+m} R / F_{n+m-1} R$$

$$(r + F_{n-1} R, s + F_{m-1} R) \mapsto rs + F_{n+m-1} R$$

Az Iwasawa algebra noether

Állítás

Legyen R egy gyűrű és rajta egy növekvő vagy csökkenő filtrálás rajta. Ekkor

- 1 grR nullosztómentes akkor és csak akkor, ha R nullosztómentes,
- 2 grR noether (és csökkenő esetben, R legyen teljes és $v(\mathbb{R}^{\geq 0} \setminus 0)$ diszkrét és zárt $\mathbb{R}^{\geq 0}$ -ban) ekkor R is noether.

Következmény

Ha (G, ω) egy véges rangú teljes p -értékelt csoport, akkor $\mathcal{O}G$ egy noether nullosztómentes.

Következmény

Minden $\mathbf{Z}_p G$ Iwasawa algebra noether.