Nemkommutatív Iwasawa-elmélet
Egyéni kutatómunka I

Patrik Pálffy

2024 Ősz

A félév során Simon Wadsley [1] nemkommutatív Iwasawa algebrákról szóló előadását dolgoztam fel.

1. Filtrált és fokszámozott struktúrák

1.1. Definíció. Legyen R egy gyűrű. Filtrálásnak nevezzük R-n azt a függvényt

$$v : R \to \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

amire teljesüknek a következők $\forall r, s \in R$-re

- $v(r - s) \geq \min(v(r), v(s))$
- $v(rs) \geq v(r) + v(s)$
- $v(1) = 0$
- $v(0) = \infty$.

1.2. Definíció. Legyen (R, v) és (S, w) filtrált gyűrűk. A két gyűrű közti filtrált gyűrű homomorfizmusnak nevezzük azt a gyűrű homomorfizmust, amire teljesül, hogy $f : R \to S$ és $w(f(r)) \geq v(r)$ minden $r \in R-$re.

1.3. Jelölés. Legyen (R, v) egy filtrált gyűrű. Ennek a gyűrűnek létezik ideáljainak egy családja $R_\lambda = \{r \in R | v(r) \geq \lambda\}$, amikre teljesül, hogy

$$R_0 = R$$
$$R_\lambda = \bigcap_{\mu<\lambda} R_\mu \forall \lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}.$$

1.4. Definíció. A következő műveletet nevezzük az (R, v) filtrált gyűrű telítésének

$$\hat{R} = \varprojlim R/R_\lambda = \{(r_\lambda + R_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}^{\geq 0}} \in \prod_{\lambda\in\mathbb{R}^{\geq 0}} R/R_\lambda | (\forall \mu < \lambda)\ r_\lambda + R_\mu = r_\mu + R_\mu\},$$

így egy gyűrűt kapunk és a műveletet koordinátánként végezük. Továbbá létezik egy természetes gyűrű homomorfizmus $R \to \varprojlim R/R_\lambda$, $r \mapsto (r+R_\lambda)$. Azt mondjuk, hogy (R, v) filtrált gyűrű telített, ha a természetes homomorfizmus izomorfizmus.

1.5. Definíció. Legyen A egy gyűrű. A fokszámozott gyűrű, ha létezik egy $A = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{R}^{\geq 0}} A_\lambda$ felbontása abel csoportok direktösszegére és minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{\geq 0}$-re $A_\lambda A_\mu \subset A_{\lambda+\mu}$.

1.6. Definíció. Legyen (R, v) egy filtrált gyűrű és $R_{\lambda^+} = \{r \in R | v(r) > \lambda\}$, $gr_\lambda R = R_\lambda / R_{\lambda^+}$ minden $\lambda \geq 0$-re részgyűrűk. Ekkor az R-hez asszociált fokszámozott gyűrű a következő fokszámozott gyűrű

$$grR = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{R}^{\geq 0}} gr_\lambda R$$

ahol a szorzás a következő bilineáris leképezés

$$gr_\lambda R \times gr_\mu R \to gr_{\lambda+\mu} R$$
$$(r + R_{\lambda^+})(s + R_{\mu^+}) \mapsto rs + R_{(\lambda+\mu)^+}.$$

1.7. Definíció. Legyen $A = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}} A_\lambda$ és $B = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}} B_\lambda$ fokszámozott gyűrűk. Ekkor $f : A \to B$ egy fokszámozott gyűrű homomorfizmus, ha

- gyűrű homomorfizmus
- $f(A_\lambda) \subset B_\lambda$ minden $\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}$.

1.8. Definíció. Legyen G egy csoport. Filtrálásnak nevezzük azt a függvényt G-n, $\omega : G \to \mathbb{R}^{>0} \cup \{\infty\}$, amire teljesül, hogy

- $\omega(xy^{-1}) \geq \min(\omega(x), \omega(y))$ minden $x, y \in G$.
- $\omega(x^{-1}y^{-1}xy) \geq \omega(x) + \omega(y)$.

Ezt a csoportot (G, ω) filtrált csoportnak nevezzük

1.9. Lemma. Legyen (G, ω) egy filtrált csoport. Ekkor minden $x, y \in G$

1. $\omega(e_G) = \infty$
2. $\omega(x) = \omega(x^{-1})$
3. $\omega(y^{-1}xy) = \omega(x)$
4. $\omega(xy) = \min(\omega(x), \omega(y))$, ha $\omega(x) \neq \omega(y)$
5. Ha H egy részcsoportja G-nek akkor $\omega|_H$ egy filtrálás H-n.

1.10. Definíció. Egy filtrálás szeparált, ha $\omega^{-1}(\infty) = \{e_G\}$.

1.11. Lemma. Minden filtrált (G, ω) csoportra és $\lambda > 0$-ra, G_λ és G_{λ^+} normálosztói G-nek. Továbbá $G_\lambda / G_{\lambda^+} \subset Z(G/G_{\lambda^+})$.

1.12. Tétel. (Hall-Petrescu Formula) Legyen G egy csoport és $x, y \in G$ $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$x^n y^n = (xy)^n c_2^{\binom{n}{2}} c_3^{\binom{n}{3}} \dots c_{n-1}^n c_n$$

valamilyen $c_i \in \gamma_i(G)$.($\gamma_i(G)$ az alsó centrális lánc tagjai.)

1.13. Definíció. Az asszociált fokszámozott csoportja G-nek

$$grG = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{R}^{>0}} G_\lambda / G_{\lambda^+}.$$

Mostantól $gr_\lambda G$-t fogunk írni $G_\lambda / G_{\lambda^+}$ helyett.

1.14. Definíció. Minden $\lambda, \mu > 0$-ra legyen

$$[-,-] : gr_\lambda G \times gr_\mu G \to gr_{\lambda+\mu} G$$

és

$$[xG_{\lambda^+}, yG_{\mu^+}] \mapsto (x, y) G_{\lambda+\mu^+}.$$

1.15. Állítás. A grG egy $\mathbf{Z}-$Lie algebrát alkot $[-,-]$-nek a $\mathbf{Z}-$bilineáris bővítésével.

2. p-értékelt csoportok

2.1. Definíció. Legyen p egy prím. A szeparált filtrálást G-n p-értéknek nevezzük, ha minden $g \in G$

- $\omega(g) > \frac{1}{p-1,}$
- $\omega(g^p) = \omega(g) + 1$.

2.2. Lemma. Legyen G egy csoport és rajta egy p-érték ω ekkor minden $\lambda > 0 - ra$

- $G_\lambda / G_{\lambda^+}$ p rendű.
- G/G_λ egy p-csoport
- G torziómentes.

2.3. Lemma. Legyen G egy csoport, amin létezik egy p-érték ω. Legyen $x, y \in G, n \in \mathbb{N}$ és $\omega(y) \geq \omega(x)$, ekkor a következők igazak

- $\omega(x^{-p} y^{-p} (xy)^{-p}) > \omega(y) + 1$
- $\omega(x^{-p^n} y^{-p^n}) = \omega(x^{-1} y) + n$ minden $n \geq 0$.

2.4. Állítás. Legyen (G, ω) egy $p$értékelt csoport. Ekkor létezik csoport homomorfizmusok egy családja

$$P_\lambda : gr_\lambda G \to gr_{\lambda+1} G$$

és

$$xG_{\lambda^+} \mapsto x^p G_{\lambda+1^+}.$$

Továbbá ha $a \in gr_\lambda G$ és $b \in gr_\mu G$ ekkor $[P_\lambda a, b] = P_{\lambda+\mu}[a, b]$.

2.5. Észrevétel. Előbbi P_λ-k direkt összege $\bigoplus P_\lambda$ egy 1 fokszámú operátor grG-n.

2.6. Következmény. Legyen (G, ω) egy $p$értékelt csoport. Ekkor grG egy fokszámozott $\mathbf{F}_p[t]-$Lie algebra, ahol t úgy hat, mint P és a fokszáma 1.

2.7. Lemma. grG torziómentes $\mathbf{F}_p[t]-$modulus.

2.8. Definíció. Azt mondjuk, hogy (G, ω) $p$értékelt csoport véges rangú, ha grG végesen generált $\mathbf{F}_p[t]-$modulus. Ekkor (G, ω) rangja a legkisebb generátor halmaz számossága.

2.9. Lemma. Legyen (G, ω) egy véges rangú $p$értékelt csoport és $g_1, \ldots, g_d \in G$ olyan elemek, hogy $\{\sigma(g_1), \ldots, \sigma(g_d)\}$ generálják G-t mint $\mathbf{F}_p[t]$-modulus. Ekkor

- Minden $x \in G \setminus \{e\}$ léteznek olyan egészek $n_1, \ldots, n_d$, hogy $\omega(g_i) + v_p(n_i) = \omega(x)$, ha $n_i \neq 0$ és $\sigma(x) = \sigma(g_1^{n_1} \ldots g_d^{n_d})$.
- $\omega(G \setminus \{e\})$ egy diszkrét részhalmaza $\mathbb{R}$-nek.

2.10. Definíció. Legyen (G, ω) egy filtrált csoport. Meg tudunk határozni egy topológiát G-n úgy, hogy egy részhalmaz nyílt akkor és csak akkor, ha gG_λ alakú mellékosztályok uniója.

2.11. Definíció. Legyen (G, ω) egy filtrált csoport. Ekkor a csoport telítése alatt a következőt értjük

$$\hat{G} = \varprojlim_{\lambda > 0} G/G_\lambda = \{(g_\lambda G_\lambda)_{\lambda > 0} \in \prod_{\lambda > 0} G/G_\lambda | g_\lambda G_\mu = g_\mu G_\mu \text{ minden } \mu < \lambda\}.$$

Azt mondjuk, hogy G telített, ha a természetes csoport homomorfizmus

$$G \to \hat{G}$$

$$g \mapsto (gG_\lambda)_{\lambda > 0}$$

egy izomorfizmus.

2.12. Lemma. Legyen $x \in G$ és $\lambda \in \mathbf{Z}_p$. Ekkor egyértelműen létezik egy $x^\lambda \in G$ olyan, hogy minden $t > 0$, $x^\lambda G_t = x^{\lambda_t} G_t$, ha $\lambda_t \in \mathbb{Z}$ és $v_p(\lambda - \lambda_t) \geq t$.

2.13. Definíció. Legyen G egy telített $p$értékelt csoport és $x \in G$. Az előző lemmában adott függvényt a p-adikus hatványozásnak hívjuk.

2.14. Állítás. Legyen $(g_1, \ldots, g_d)$ nem egységeknek d-ese $G-$ben. A következő állítások ekvivalensek

- $\sigma(g_1), \ldots, \sigma(g_d) \in grG$ lineárisan függetlenek $\mathbf{F}_p[t]$ fölött.
- $\omega(g^\lambda) = \min\{\omega(g_i) + v_p(\lambda_i)\}$ minden $\lambda \in \mathbf{Z}_p^n$.
- $\omega((g^\mu)^{-1} g^\lambda) = \min\{\omega(g_i) + v_p(\lambda_i - \mu_i)\}$ minden $\lambda, \mu \in \mathbf{Z}_p^n$.

2.15. Definíció. A következő rendezett n-es $(g_1, \ldots, g_n)$ rendezett bázisa (G, ω)-nek, ha a $\mathbf{Z}_p^n \to G; \lambda \mapsto g^\lambda$ egy bijekció és

$$\omega(g^\lambda) = \min\{v_p(\lambda_i) + \omega(g_i)\} \text{ minden } \lambda \in \mathbf{Z}_p^n.$$

2.16. Tétel. Legyen (G, ω) egy telített $p$értékelt csoport és $\{g_1, \ldots, g_d\} \subset G$. A következő állítások ekvivalensek

- $\{\sigma(g_1), \ldots, \sigma(g_d)\}$ egy szabad generátor rendszere grG-nek $\mathbf{F}_p[t]$ fölött.
- $(g_1, \ldots, g_d)$ egy rendezett bázisa G-nek.

Legyen $(g_1, \ldots, g_n)$ egy rendezett bázisa G-nek és minden $s \in \mathbb{R}$-re legyen $n_i = n_i(s) = inf\{n \in \mathbb{N}_0 | g_i^{p^n} \in G_s\}$.

1. $(g_1^{p_1^n}, \ldots, g_d^{p_d^n})$ egy rendezett bázisa $(G_s, \omega|_{G_s})$-nek.
2. $G/G_s = \{g^\lambda G_s | 0 \leq \lambda_i < p^{n_i} \text{ minden } i = 1 \ldots d\}$.
3. $|G/G_s| = p^{n_1 + \cdots + n_d}$.

2.17. Következmény. Minden telített véges rangú $p$értékelt csoport egy véges p-csoport inverz limesze.

3. Csoportgyűrűk

3.1. Jelölés. Mostantól $\mathcal{O}$ egy teljes diszkrét értékű gyűrű úgy, hogy $k = \mathcal{O}/p\mathcal{O}$ egy p karakterisztikájú test. Továbbá legyen (G, ω) egy $p$értékelt csoport.Ekkor minden $\lambda \geq 0$-ra

$$\mathcal{O}[G]_\lambda = \mathcal{O} \cdot \{p^r (g_1 - 1) \ldots (g_s - 1) | r + \sum_{i=1}^{s} \omega(g_i) \geq \lambda \forall g_1, \ldots, g_s \in G\}.$$

3.2. Lemma. Az előbbi család $(\mathcal{O}[G]_\lambda)_{\lambda > 0}$ definiál egy filtrált algebrát $(\mathcal{O}[G], v)$-n. Továbbá $gr\mathcal{O}[G]$-t nézhetjük, mint egy fokszámozott $k[t]$ algebra.

3.3. Állítás. A következő függvények családja

$$\phi_\lambda : gr_\lambda G \to gr_\lambda \mathcal{O}[G]$$

$$gG_{\lambda^+} \mapsto (g - 1) + \mathcal{O}[G]_{\lambda^+},$$

indukálnak egy leképzést a fokszámozott $\mathbf{F}_p[t]$-Lie algebrákon

$$\phi = \bigoplus \phi_\lambda$$

és $gr\mathcal{O}[G]$-en a kommutátorok adják a Lie struktúrát.

3.4. Definíció. Legyen $\mathfrak{g}$ egy k-Lie algebra. Ekkor $\mathfrak{g}$-nek létezek egy univerzális burkoló algebrája $U(\mathfrak{g}) = k < \mathfrak{g} > /(xy - yx - [x, y])$.

3.5. Állítás. Az előző állításban megadott fokszámozott $\mathbf{F}_p[t]$-Lie algebra leképzés kiterjed egy szürjektív fokszámozott $k[t]$-algebra homomorfizmussá

$$\phi : U_{k[t]}(k \otimes_{\mathbf{F}_p} gr\mathcal{O}[G]) \to gr\mathcal{O}[G].$$

3.6. Lemma. $\mathcal{O}[G/G_s]$-ben $\{\mathbf{b}^\alpha | \alpha \in \mathbb{N}_0^d\}$ egy bázisát alkotja egy $\mathcal{O}$-modulusnak.

3.7. Következmény. A következő halmaz linerálisan független $\mathcal{O}[G]$ fölött

$$\{\mathbf{b}^\alpha | \alpha \in \mathbb{N}_0^d\}.$$

3.8. Lemma. Ha H egy véges p csoport és $J_H = ker(k[H] \to k)$ ekkor J_H nilpotens.

3.9. Következmény. Minden $m \in \mathbb{N}$ és $s \in \mathbb{R}^{>0}$ a következő homomorfizmus magja nilpotens $(\mathcal{O}/p^m\mathcal{O})[G/G_s] \to k$.

3.10. Következmény. Minden $m \in \mathbb{N}$ és $s \in \mathbb{R}^{>0}$ létezik $\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ amire teljesül, hogy $\mathcal{O}[G]_\lambda \subset ker(\psi_{s,m} : \mathcal{O}[G] \to (\mathcal{O}/p^m\mathcal{O})[G/G_s])$.

3.11. Jelölés. Legyen

$$B = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \mathcal{O}\mathbf{b}^\alpha \subset \mathcal{O}[G]$$

és továbbá $u : B \to \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$

$$u(\sum r_\alpha \mathbf{b}^\alpha) = \min\{v_p(r_\alpha) + \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \omega(g_i)\}$$

és $B_\lambda = \{x \in B | u(x) \geq \lambda\}$.

3.12. Lemma. Minden $\lambda < \mu \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ létezik egy természetes leképezés

$$B_\lambda / B_\mu \to \mathcal{O}[G]_\lambda / \mathcal{O}[G]_\mu$$

. Ez a leképezés szürjektív.

3.13. Állítás. $v(x) = u(x)$ minden $x \in B$.

3.14. Tétel. (Poincaré-Birkhoff-Witt) Legyen $\mathfrak{g}$ egy Lie algebra A kommutatív gyűrű felett. Továbbá legyenek $x_1, \ldots, x_n$ gernerálják $\mathfrak{g}$-t, mint A-modulus. Ekkor minden eleme $U(\mathfrak{g})$-nak A lineáris kombinációja a generátor elemek valamekkora hatványával, azaz $x \in U(\mathfrak{g})$ $x = x_1^{k_1} + \cdots + x_n^{k_n}$ valamely $k_i \in \mathbb{N}_0$. Továbbá ha $x_1, \ldots, x_n$ egy szabad generátor rendszerét alkotják $\mathfrak{g}-$nek A fölött akkor $x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n}$ is $U(\mathfrak{g})$-nek.

3.15. Tétel. A következő fokszámozott $\mathbf{F}_p$ algebra morfizmus

$$\phi : U_{k[t]}(k \otimes_{\mathbf{F}_p} grG) \to gr\mathcal{O}[G]$$

egy izomorfizmus.

3.16. Definíció. Legyen I egy rendezett halmaz úgy, hogy minden $i, j \in I$-re létezik egy $k \in I$, hogy $i \leq k, j \leq k$. Minden $i \in I$-re legyen A_i egy halmaz és tegyük fel, hogy ha $i \leq j$ akkor létezik egy leképzés $\phi_{ji} : A_j \to A_i$, hogy ϕ_{ii} =id és $\phi_{jk}\phi_{ij} = \phi_{ik}$, ha $i \leq j \leq k$. Ezt egy inverz rendszernek nevezzük.
Legyen $A = \prod A_i$ és definiáljuk az inverz limeszt úgy, hogy

$$\varprojlim A_i = \{(\ldots, a_i, \ldots) \in A | \phi_{kj}(a_k) = a_j, \text{ ha } j \leq k\}.$$

A $A \to A_i$ projekció indukál egy leképzést $\phi_i : \varprojlim A_i \to A_i$.

3.17. Lemma. Legyen R egy gyűrű. $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ és $\{J_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ ideálok családja, amire teljesül, hogy minden $\alpha \in \mathcal{A}$ létezik $\beta \in \mathcal{B}$, hogy $J_\beta \subseteq I_\alpha$ és fordítva. Ekkor létezik egy természetes izomorfizmus

$$\varprojlim_{\mathcal{A}} R/I_\alpha \simeq \varprojlim_{\mathcal{B}} R/J_\beta.$$

3.18. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy topológikus csoport G provéges, ha izomorf egy véges csoportoknak inverz limeszével. Azt mondjuk, hogy pro-p, ha a véges csoportok p-csoportok.

3.19. Definíció. Minden kommutatív R gyűrűre és G provéges csoportra létezik a telített R együtthatós csoportgyűrű, ami

$$RG = R[[G]] = \varprojlim_{N \trianglelefteq G} R[G/N].$$

Ha $R = \mathbf{Z}_p$ és G-nek létezik egy nyílt normálosztója N, amin megadható egy ω p-értékelést, amivel (N, ω) egy véges rangú telített $p-$értékű csoportot alkot. Ekkor RG-t egy Iwasawa algebrának hívunk.

3.20. Definíció. $R * H$ gyűrűt R gyűrűnek és H csoportnak a keresztszorzatának hívjuk, ami tartalmazza R-t mint részgyűrűt és egységek olyan halmazát $\bar{H} = \{\bar{h} | h \in H\}$ amire teljesül a következők

- $R * H$ egy szabad R-balmodulus, amit $H \to R * H; h \mapsto \bar{h}$ general és
- minden $x, y \in H; \bar{x}R = R\bar{x}$ és $\bar{x}\bar{y}R = \bar{xy}R$.

3.21. Lemma. Ha H egy nyílt normálosztója G-nek akkor H-nak az indexe véges. Továbbá $RG = RH * G/H$.

3.22. Tétel. Legyen (G, ω) egy véges rangú telített pértékelt csoport. Emlékezzünk a 3.2 Lemma filtrációjára $\mathcal{O}[G]$-n. Ekkor

$$\mathcal{O}G \simeq \varprojlim_{\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}} \mathcal{O}[G]/\mathcal{O}[G]_\lambda.$$

3.23. Definíció. Legyen R egy gyűrű. Ekkor $\mathbb{N}_0$-filtráció az $(F_n R)_{n \in \mathbb{N}_0}$ részcsoportoknak növekvő családja R-ben amire teljesül, hogy

- $1 \in F_n R$ minden $n \in \mathbb{N}_0$;
- $F_n R F_m R \subseteq F_{n+m} R$ minden $n, m \in \mathbb{N}_0$ és
- $R = \bigcup_{n \geq 0} F_n R$.

Minden $\mathbb{N}_0$-filtrációhoz R-en létezik egy asszociált fokszámozott gyűrűje R-nek, ami az $\mathbb{N}_0$-fokszámozott gyűrű

$$grR = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} F_n R / F_{n-1} R$$

$(F_{-1} R = 0)$ és a szorzás a következő bilineáris leképzés adja meg

$$(F_n R / F_{n-1} R) \times (F_m R / F_{m-1} R) \to F_{n+m} R / F_{n+m-1} R$$

$$(r + F_{n-1} R, s + F_{m-1} R) \mapsto rs + F_{m+n-1}$$

3.24. Állítás. Legyen R egy gyűrű és rajta egy növekvő vagy csökkenő filtrálás rajta. Ekkor

1. grR nullosztómentes akkor és csak akkor, ha R nullosztómentes,
2. grR noether (és csökkenő esetben, R legyen telített és $v(\mathbb{R}^{\geq 0} \setminus 0)$ diszkrét és zárt $\mathbb{R}^{\geq 0}$-ban) ekkor R is noether.

3.25. Következmény. Ha (G, ω) egy véges rangú telített pértékelt csoport, akkor $\mathcal{O}G$ egy noether nullosztómentes.

3.26. Következmény. Minden $\mathbf{Z}_p G$ Iwasawa algebra noether.

Hivatkozások

[1] Simon Wadsley. Iwasawa algebras, 2019. Elérhető:https://www.dpmms.cam.ac.uk/ sjw47/LecturesLent2019.pdf.