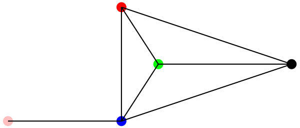
Érintőgráfok

Osztényi József
Témavezető: Keszegh Balázs

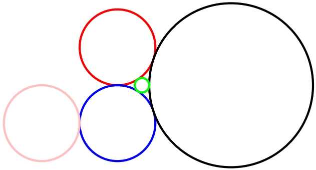
Egyéni kutatómunka 1.
2025.01.10.

Tétel (Koebe–Andreev–Thurston)

Minden G véges összefüggő egyszerű síkgráfhoz létezik egy olyan körpakolás a síkban, amelynek az érintőgráfja megegyezik (izomorfikusan) G-vel.



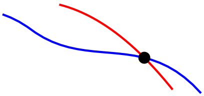
Egy síkgráf



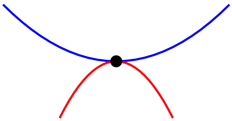
Megfelelő körpakolás

Alapfogalmak

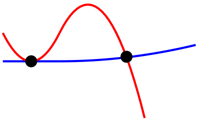
- Érintés, keresztezés
- Görbetulajdonságok: x-monoton, bi-infinit, konvex
- Érintőgráf



Keresztezés



Érintés



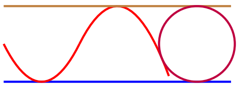
Keresztezés

Minden metszés érintés

Tétel (Erdős, Grünbaum)

Adott egy $\mathcal{C}$ n elemű görbecsalád, aminek minden metszéspontja érintési pont, ekkor legfeljebb $3n-6$ az érintések száma a $\mathcal{C}$ családban, ahol $n \geq 3$.

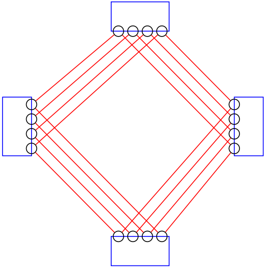
- Érintőgráf konstruálás a görbékből



Csak érintések vannak a görbék között

Tétel (Ezra, Pach, Sharir)

Adott egy $\mathcal{C}$ n elemű görbecsalád, aminek metszéspontjainak számára nincsen korlát, ekkor elérhető, hogy $\Theta(n^2)$ legyen az érintések száma a $\mathcal{C}$ családban.



n sokszög között $O(n^2)$ érintés

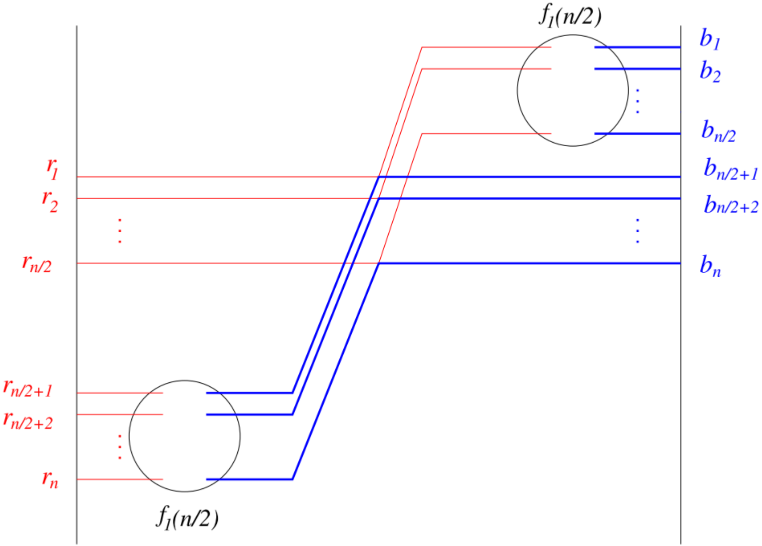
Két görbecsalád érintéseinek száma

Tétel (Pach, Suk, Treml)

Jelölje $f(n)$ a síkban két x-monoton görbékből álló n tagú családok közötti legnagyobb érintés számot, ha az egyes családok páronként diszjunkt görbékből állnak. Ekkor $\Omega(n \log n) \leq f(n) \leq O(n \log^2 n)$.

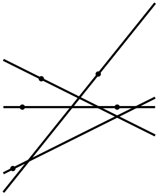
- Keszegh és Pálvölgyi megjavította a felső korlátot
- $f(n) = O(n \log n)$ látták be, ami egybe esik az alsó korláttal

Alsó korlát konstrukciója



Egyenesek és pontok illeszkedése

- Sok példa alapját adja Erdős és Purdy konstrukciója
- A példában $\Omega(n^{4/3})$ illeszkedés van
- Pontokból görbéket képzünk



- 2-metsző, páronként metsző görbecsalád
- 1-metsző x-monoton görbecsalád
- (Pseudo-)körök családja

Pach sejtése

Sejtés (Pach)

Legyen $\mathcal{C}$ egy olyan n elemű görbecsalád, melyben minden görbepár pontosan egy pontban metszi egymást, ami keresztezés vagy érintés. Ekkor a $\mathcal{C}$ görbecsaládban az érintések száma $O(n)$.

Tétel (Ackerman, Keszegh)

Legyen $\mathcal{C}$ egy n elemű x-monoton görbékből álló család, amiben minden görbepár pontosan egy pontban metszi egymást, ami keresztezés vagy érintés. Ekkor a $\mathcal{C}$ görbecsaládban az érintések száma legfeljebb $1160n$.

Speciális esetben a sejtés

Sejtés

Legyen $\mathcal{C}$ egy olyan n elemű k-metsző, x-monoton és bi-infinit görbecsalád, melyben minden görbepár legalább egy pontban metszi egymást. Ekkor a $\mathcal{C}$ görbecsaládban az érintések száma $O(n)$.

- $k = 1$ esetben az érintőgráf erdő
- $k = 2$ esetben az érintőgráf síkgráf

Köszönöm a figyelmet!