Érintőgráfok
Egyéni kutatómunka 1.

Osztényi József
Témavezető: Keszegh Balázs

1 Bevezetés

A téma alapvető célja a görbék közötti maximális számú érintések vizsgálata. Két görbe, akkor érinti egymást, ha pontosan egy közös pontjuk van és ebben a metszéspontban nem keresztezik, hanem érintik egymást (pontos definiálás lentebb).

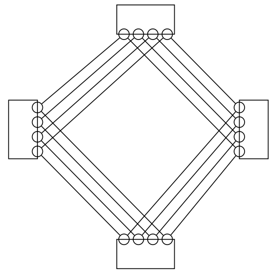
A téma síkbeli görbékkel foglalkozik, amik alatt Jordan-görbéket értünk, vagyis egy injektív folytonos függvény képe egy zárt intervallumból $\mathbb{R}^2$-be. Mivel ilyen általános görbék esetén általában nem érdekes kérdés, emiatt legtöbbször speciális görbecsaládok esetével foglalkozunk. Egy görbét x*-monoton*-nak hívunk, ha nincs két olyan pontja, melyeknek az x-koordinátája megegyezne. Olyan görbecsaládokkal foglalkozunk, amelyekben minden görbepár metszéspontjainak száma véges. Egy görbecsaládot t*-metsző*-nek hívunk, ha a családban szereplő görbepárok metszéspontjainak száma legfeljebb t. Továbbá egy görbét *bi-infinit*-nek hívunk, ha bármely x-koordináta esetén van olyan görbebeli pont, amely felveszi azt.

Két görbének p metszéspontja, akkor keresztezési pont, ha van egy kis D kör, aminek a középpontja p és nincs benne több metszéspontja a két görbének, továbbá mindkettő görbe pontosan 2 pontban metszi D-nek a határát és ezen 4 pont ciklikus sorrendjében nincs kettő egymásutáni pont, amely egy görbéhez tartozik. Ha két görbe pontosan egy olyan pontban metszi egymást, amely nem keresztezési pont, akkor azt mondjuk, hogy a két görbe abban a pontban érinti egymást. Ezen érintések száma a görbecsalád érintő párjainak száma. Természetesen lehetséges, hogy egy pontban több görbe is érinti egymást. Erre jó példa az x^{2k} függvények, ahol $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ és a $[-1, 1]$ intervallumból képezzük a függvényeket. A továbbiakban minden görbecsaládról feltesszük, hogy minden görbehármasnak nincs közös pontja, hogy előbbi eset ne álljon fenn.

Adott egy görbecsalád, akkor az érintőgráfjukat az alábbi módon definiáljuk:

- a csúcsai megfelelnek a görbéknek,
- két csúcs között pedig él megy, ha a megfelelő görbék érintik egymást.

Ezzel a megfogalmazással az a célunk, hogy bizonyos görbecsaládok esetében felismerhetjük, hogy érintőgráfuk mindig egy bizonyos fajtájú gráf lesz (pl.: fagráf, síkgráf), amivel tudunk becslést adni az érintőgráf éleinek számára. Kezdésnek tekintsünk két speciális esetet.



Ábra 1.1: n sokszög között $O(n^2)$ érintés.

Állítás 1.1. *[4] Adott egy $\mathcal{C}$ n elemű görbecsalád, aminek minden metszéspontja érintési pont, ekkor legfeljebb $3n-6$ az érintések száma a $\mathcal{C}$ családban, ahol $n \geq 3$.*

Bizonyítás. A $\mathcal{C}$ görbecsalád minden görbéjéhez rendeljünk hozzá reprezentáló csúcsot, ezen pont legyen a görbe egy tetszőleges pontja, ami nem esik egybe egyetlen érintési ponttal sem. Az érintőgráf két csúcsa között pedig fusson az alábbi módon él, ha az adott két görbe érinti egymást. Legyen c_1 és c_2 görbék, amik érintik egymást és legyenek reprezentáló pontjaik F és G. Ekkor az él induljon F pontból és fusson c_1 görbén egészen a $c_1 \cap c_2$ érintési pontig, majd onnan haladjon tovább c_2 görbén a G pontig. Ezt az élhúzási műveletet végezzük el minden érintési pont esetén, az világos, hogy ebben az esetben lehetséges több él is egybe fog esni az adott görbéken, de meggondolható, hogy ez a folyamat precízzé tehető, hogyha görbéknek minimális kiterjedést adunk, vagyis "felfújjuk" őket és az élek behúzása során figyelünk arra, hogy azok ne metszék el egymást. Ekkor az érintőgráfról látható, hogy egy síkgráf lett, aminek éleire fennáll az Euler-formula, vagyis legfeljebb $3n-6$ éle lehet. □

Állítás 1.2. *[5] Adott egy $\mathcal{C}$ n elemű görbecsalád, aminek metszéspontjainak számára nincsen korlát, ekkor elérhető, hogy $\Theta(n^2)$ legyen az érintések száma a $\mathcal{C}$ családban.*

Bizonyítás. A $\mathcal{C}$ családot osszuk kettő $n/2$ elemű görbecsaládra, amiknek elemei páronként érintik egymást, vagyis $\lfloor n^2/4 \rfloor$ érintést adnak. Ezt még úgy is meg lehet tenni, hogy minden görbe zárt és konvex. Az 1.1 ábra mutatja ezt az esetet és látható, hogy ebben az esetben sok metszéspont lesz egy családban lévő görbék között.

□

Ezek alapján látható, hogy érdekes eseteket leginkább akkor kapunk, ha van felső korlátja egy görbepár metszéspontjai számának. Elsőnek olyan eseteket fogunk vizsgálni, amikor két olyan családunk van, amelyek mindegyike páronként diszjunkt görbékből áll. Másodjára pedig arra az esetre koncentrálunk, amikor egy görbecsaládunk van, amelynek görbéi páronként metszik egymást vagy nem.

2 Két görbecsalád érintéseinek száma

Ha a görbe családunk kettő görbecsaládból adódik össze (legyenek piros és kék görbék a továbbiakban), ekkor az érintőgráfunk páros gráfot alkot. Pach, Suk és Treml [8] cikkükben több két görbecsaládos eredményt mutatnak be. Az egyik eredményükben a görbecsaládokat zárt görbék alkotják és ezeknek az érintési számukra adnak felső becslést.

Tétel 2.1. *[8] Legyen $\mathcal{C} = \mathcal{P} \cup \mathcal{K}$ egy $n > 5$ darab konvex zárt görbékből álló család a síkban, ahol a $\mathcal{P}$ és $\mathcal{K}$ családok páronként diszjunkt görbékből állnak. Ekkor a $\mathcal{P}$ és $\mathcal{K}$ tagjai közötti érintések száma legfeljebb $4n - 16$.*

A tétel bizonyítása indukcióval történik. A bizonyítás egyik fő ötlete abban rejlik, hogy a konvex alakzatokat lecseréljük az érintési pontjaik által meghatározott konvex burokra és tudjuk venni ezen csúcsokat egy gráf csúcsainak és az oldalakat, pedig éleknek a gráfban. Természetesen, ekkor lesznek a gráfnak olyan lapjai, amik az eredeti sokszögek között nem szerepelnek. Ezen külső oldalak a számát lehet felülről becsülni, úgy hogy ha két külső háromszög oldal találkozik egy pontban, akkor abban a pontban az egyik belső sokszög legalább 6 oldalú. Ezzel megkaptuk a bizonyítás második fő gondalatát és ezután az Euler-féle poliéder tétel alkalmazásával és pár átalakítás után adódik a tételben kimondott eredmény.

A cikkben továbbiakban *x-monoton* görbecsaládokkal foglalkoznak.

Tétel 2.2. *[8] Legyen $\mathcal{C} = \mathcal{P} \cup \mathcal{K}$ egy n elemű x-monoton görbecsalád.A $\mathcal{P}$ olyan páronként diszjunkt piros görbékből áll, amelyek bal végpontjai egy l függőleges egyenesre esnek (baloldali zászló), a $\mathcal{K}$ pedig olyan páronként diszjunkt kék görbék családja, amelyek teljesen az l egyenestől jobbra helyezkednek el. Akkor a görbék közötti piros-kék érintések száma legfeljebb $30n \log n$.*

A bizonyítás indukción alapszik, aminek az alapja, hogy veszünk egy l' függőleges egyenest, ami felezi a $\mathcal{K}$ görbecsaládot egy adott módon. Természetesen a témakörben az is fontos szerepet játszik, hogy adott felső korlátokhoz tudjunk adni konstrukciót, ami felveszi nagyságrendileg azt az érintési számot. A cikkben ehhez a tételhez találhatunk is ilyet, ami a következőt adja:

A konstrukció rekurzión alapszik. Legyen $\{p_1, \ldots, p_{n/2}\}$ és $\{k_1, \ldots, k_{n/2}\}$ egy piros baloldali zászló és egy kék jobboldali zászló $x = 2$, illetve $x = 3$ egyenlettel, amelyek között $f_1(n/2)$ darab érintés van. Legyen $\{p_{n/2+1}, \ldots, p_n\}$ és $\{b_{n/2+1}, \ldots, b_n\}$ egy piros baloldali zászló és egy kék jobboldali zászló $x = 0$ és $x = 1$ egyenlettel, amelyek között hasonlóan $f_1(n/2)$ érintés van. Könnyű belátni, hogy az r_i $(i \leq n/2)$ görbék balra, a b_j $(j > n/2)$ görbék pedig jobbra meghosszabbíthatók, amíg az $x = 0$, illetve az $x = 3$ egyeneseket nem érintik, így r_i minden $i \leq n/2$ esetén felülről érinti a $b_{i+n/2}$-t az $1 < x < 2$ függőleges sávban. Tehát az n-tagú baloldali és n-tagú jobboldali zászló közötti érintkezések maximális számára az $f_1(n) \geq 2f_1(n/2) + n/2$ rekurzió adható, ami azt adja, hogy $f_1(n) = \Omega(n \log n)$.

A 2.2 tétel egy speciális esete a következő tételnek és a bizonyítása során használva is volt.

Tétel 2.3. *[8] Jelölje $f(n)$ a síkban két x-monoton görbékből álló n tagú családok közötti legnagyobb érintés számot, ha az egyes családok páronként diszjunkt görbékből állnak. Ekkor $\Omega(n \log n) \leq f(n) \leq O(n \log^2 n)$.*

Az alsó korlátot itt is ugyanaz adja, mint fentebb és a felső korlát bizonyítása itt is indukcióval zajlik.

Később Keszegh és Pálvölgyi ezt az eredményt megjavította és a [6] cikkben publikálta több témakörbe vágó eredménnyel együtt. A cikkükben a felső korlátot $\Theta(n \log n)$-re javították meg, ami egybeesik az alsó korláttal. Keszegh, Pálvölgyi és Ackermann a [2] cikkükben megjegyzik, hogy a [8] cikkben lévő alsó korlát konstrukciójában a különböző színű görbéknek legfeljebb két közös pontjuk van, emiatt ez felveti azt a kérdést, hogy kisebb korlát áll-e fenn, ha a két családunk 1-*metsző*.

Tétel 2.4. *[2] Adott egy n darab piros és kék görbéből álló 1-metsző görbecsalád, úgy hogy két azonos színű görbe nem metszi egymást, ekkor a görbék közötti érintések száma legfeljebb $O(n)$.*

Természetesen, ha elhagyjuk az 1-*metsző* tulajdonságot, akkor nagyságrendileg nagyobb alsó korlátra tudunk konstrukciót adni, amit Keszegh és Pálvölgyi a [6] cikkben írt le.

Tétel 2.5. *[6] Létezik egy olyan n darab görbéből álló piros és kék görbecsalád, amelyben bármely két azonos színű görbe nem metszi egymást és a görbék közötti érintések száma $\Omega(n^{4/3})$.*

A konstrukció alapját Erdős és Purdy híres konstrukciója adja, ami adott n darab pontot és n darab egyenest a síkon, hogy a köztük lévő illeszkedések száma $\Omega(n^{4/3})$ nagyságú. A konstrukcióban az egyik család a pontok módosítása lesz, míg a másika család az egyenesek olyasfajta módosítása lesz, hogy eleget tegyenek a tételben szereplő feltételnek.

3 Érintések száma egy görbecsaládban

Rengeteg érdekes kérdés merül fel, ha egyetlen görbecsaládunk lesz és megköveteljük, hogy minden görbepárnak legyen metszéspontja. Pár ábra rajzolás után érzékelhető, hogy ez a feltétel kisebb szabadságot és kisebb érintési számot fog eredményezni, mint az eddig látott eredmények. Pach a következő sejtést fogalmazta meg a témában:

Sejtés 3.1. *Legyen $\mathcal{C}$ egy olyan n elemű görbecsalád, melyben minden görbepár pontosan egy pontban metszi egymást, ami keresztezés vagy érintés. Ekkor a $\mathcal{C}$ görbecsaládban az érintések száma $O(n)$.*

Ackermannak és Keszeghnek sikerült a sejtést belátnia x-*monoton* görbecsaládra a [1] cikkükben.

Tétel 3.2. *[1] Legyen $\mathcal{C}$ egy n elemű x-monoton görbékből álló család, amiben minden görbepár pontosan egy pontban metszi egymást, ami keresztezés vagy érintés. Ekkor a $\mathcal{C}$ görbecsaládban az érintések száma legfeljebb $1160n$.*

A bizonyítás alapötlete az, hogy esetekre osztják az érintéseket aszerint, hogy a két érintő görbe x-koordinátára vonatkozó projekciója szerint teljes mértékben tartalmazza a másikat vagy nem. Mindegyik esetben az érintőgráfukat fogjuk tekinteni a görbecsaládnak. Az egyik esetben, ha az élek bizonyos lineáris méretű részét törölve a maradék élek erdőt alkotnak. A másik esetben is speciális részekre lehet bontani, amikben a megmaradt éleket tudjuk úgy rendezni, hogy ezen rendezés tekintetében nem lehet hosszú monoton növekvő út.

A félévem során 3.1 sejtéshez kapcsolódó sejtéssel próbálkoztam, ami így szól:

Sejtés 3.3. *Legyen $\mathcal{C}$ egy olyan n elemű k-metsző, x-monoton és bi-infinit görbecsalád, melyben minden görbepár legalább egy pontban metszi egymást. Ekkor a $\mathcal{C}$ görbecsaládban az érintések száma $O(n)$.*

A sejtésből következne a következő sejtés állítása is, amiben a k megegyezik a korábban használt k értékével.

Sejtés 3.4. *Legyen $\mathcal{C}$ egy olyan n elemű $(k-2)$-metsző, x-monoton görbecsalád, amiben minden görbepár legalább egy pontban metszi egymást. Ekkor a $\mathcal{C}$ görbecsaládban az érintések száma $O(n)$.*

A 3.3 sejtés $k = 1, 2$ esete ismert. A $k = 1$ esetben belátható, hogy az érintőgráf erdőt alkot, vagyis legfeljebb $n - 1$ érintés lehetséges a görbecsaládban. A $k = 2$ eset már ismert eredmény, a [3] cikkben szereplő 2.4 tétel ekvivalens állítás vele. A tétel pseudo-parabolákra mondja ki az állítást, ami teljesen ekvivalens az állításban szereplő görbecsaláddal, mert a pseudo-parabolák olyan folytonos és minden valós számon értelmezett függvények, amiknek legfeljebb 2 metszéspontjuk van. A bizonyítás ötlete azon alapszik, hogy veszünk egy olyan függőleges l egyenest, ami minden metszésponttól balra helyezkedik el. A görbéket reprezentáló csúcsok az érintőgráfban az adott görbe metszete az l függőleges egyenessel. A bizonyítás további részében belátjuk, hogy tudjuk az éleket úgy behúzni a pontok között, hogy azok ne metszék egymást és ezek mellett meggondolható, hogy a gráfunk páros gráf lesz, vagyis legfeljebb $2n - 4$ él lehet benne.

Az egy görbecsaládra vonatkozó ismert eredményeket a 3.1 táblázatban összegzem.

Görbe típusa	**k-metsző**	**Érintések száma**	**Felső korlát**
Általános	legalább 1 [1], $k = 1$	$\Theta(n)$	triviális
x-monoton	legalább 1 [1], $k = 1$	$\Theta(n)$	Ackerman & Keszegh [1]
x-monoton	$k = 1$	$O(n^{4/3} \log(n)^{2/3})$	Pach & Sharir [7]
x-monoton, bi-infinit	legalább 1 [1], $k = 2$	$\Theta(n)$	Pach és társai [3]
x-monoton, bi-infinit	$k = 1$	$O(n \log(n))$	Pach & Sharir [7]

Táblázat 3.1: Egy görbecsaládról ismert eredmények összegzése.

Hivatkozások

[1] Eyal Ackerman and Balázs Keszegh. On the number of tangencies among 1-intersecting x-monotone curves. *European Journal of Combinatorics*, 2024.

[2] Eyal Ackerman, Balázs Keszegh, and Dömötör Pálvölgyi. On tangencies among planar curves with an application to coloring l-shapes. *European Journal of Combinatorics*, 2024.

[3] Pankaj K Agarwal, Eran Nevo, János Pach, Rom Pinchasi, Micha Sharir, and Shakhar Smorodinsky. Lenses in arrangements of pseudo-circles and their applications. *Journal of the ACM (JACM)*, 2004.

[1] Minden görbepárnak van legalább egy közös pontja.

[4] Paul Erdős and Branko Grünbaum. Osculation vertices in arrangements of curves. *Geometriae Dedicata*, 1973.

[5] Esther Ezra, János Pach, and Micha Sharir. On regular vertices on the union of planar objects. In *Proceedings of the twenty-third annual symposium on Computational geometry*, pages 220–226, 2007.

[6] Balázs Keszegh and Dömötör Pálvölgyi. The number of tangencies between two families of curves. *Combinatorica*, 2023.

[7] János Pach and Micha Sharir. On vertical visibility in arrangements of segments and the queue size in the bentley-ottmann line sweeping algorithm. *SIAM Journal on Computing*, 1991.

[8] János Pach, Andrew Suk, and Miroslav Treml. Tangencies between families of disjoint regions in the plane. In *Proceedings of the twenty-sixth annual symposium on Computational geometry*, 2010.