

Leszámlálások algebrai topológián át

Mazug Péter

Témavezető: Fehér László

Feladat

Hány egyenes metsz 4 adott egyenest a térben?

Leszámlálások

Feladat

Hány egyenes metsz 4 adott egyenest a térben?

Megoldás

Dimenziószámlálás.

Leszámlálások

Feladat

Hány egyenes metsz 4 adott egyenest a térben?

Megoldás

Dimenziószámlálás.

Definíció

$k \leq n$ -ra a $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ *Grassmann-sokaság* \mathbb{C}^n k -dimenziós lineáris altereinek tere.

Leszámlálások

Feladat

Hány egyenes metsz 4 adott egyenest a térben?

Megoldás

Dimenziószámlálás.

Definíció

$k \leq n$ -ra a $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ *Grassmann-sokaság* \mathbb{C}^n k -dimenziós lineáris altereinek tere.

Megoldás

Egy $l \in Gr_2(\mathbb{C}^4)$ -re legyen $\sigma_l = \{V \in Gr_2(\mathbb{C}^4) \mid \dim(V \cap l) > 0\}$.
 $[\sigma_{l_1} \cap \sigma_{l_2} \cap \sigma_{l_3} \cap \sigma_{l_4}] = [\sigma_l]^4$ -t kell kiszámolni.

Állítás

B^+ (felső-háromszög mátrixok) minden orbitjában pontosan egy $V_I = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$ koordináta-altér található.

Schubert-cellák

Állítás

B^+ (felső-háromszög mátrixok) minden orbitjában pontosan egy $V_I = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$ koordináta-altér található.

Állítás

$B^+ V_I \cong \mathbb{C}^{|I|}$, ahol $|I| = \sum_{j=1}^k (i_j - j)$.

Schubert-cellák

Állítás

B^+ (felső-háromszög mátrixok) minden orbitjában pontosan egy $V_I = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$ koordináta-altér található.

Állítás

$B^+ V_I \cong \mathbb{C}^{|I|}$, ahol $|I| = \sum_{j=1}^k (i_j - j)$.

Definíció

A $B^+ V_I$ részsokaság az I Schubert-szimbólumhoz tartozó Sch_I Schubert-cella.

Partíciók

Definíció

$$\lambda_j = \lambda(I)_j = n - k + j - i_j, \lambda(I) = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$$

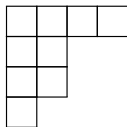
Partíciók

Definíció

$$\lambda_j = \lambda(I)_j = n - k + j - i_j, \lambda(I) = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$$

Definíció

Az ilyen λ -k partíciók. A $\lambda_j = n - k + j - i_j$ formula meghatároz egy bijekciót n -nek a k -elemű részhalmazai, és $n - k$ -nál nagyobb számokat nem használó partíciói között.



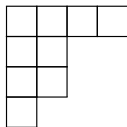
Partíciók

Definíció

$$\lambda_j = \lambda(I)_j = n - k + j - i_j, \lambda(I) = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$$

Definíció

Az ilyen λ -k partíciók. A $\lambda_j = n - k + j - i_j$ formula meghatároz egy bijekciót n -nek a k -elemű részhalmazai, és $n - k$ -nál nagyobb számokat nem használó partíciói között.



Definíció

A λ partícióhoz tartozó σ_λ Schubert-varietás

$$\overline{B^+ V_I} = \{V \in \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \mid \dim(V \cap F_{I(\lambda)_j}) \geq j, \forall j = 1, \dots, k\}$$

Rétegelt Sokaságok

Definíció

Egy X n -dimenziós sokaság *rétegelése* egy $\mathcal{X} = (X_0, \dots, X_n)$ partíciója a sokaságnak. Megköveteljük, hogy X_i egy i -kodimenziós részsokaság legyen (vagy üres). Emellett még teljesülnie kell a *mezsgye-feltételnek*:

$$\bar{X}_i \subseteq \bigcup_{j \geq i} X_j$$

A $Z_i = \bigcup_{j \geq i} X_j$ -ket X *rétegelt részsokaságainak* hívjuk.

Rétegelt Sokaságok

Definíció

Egy X n -dimenziós sokaság *rétegelése* egy $\mathcal{X} = (X_0, \dots, X_n)$ partíciója a sokaságnak. Megköveteljük, hogy X_i egy i -kodimenziós részsokaság legyen (vagy üres). Emellett még teljesülnie kell a *mezsgye-feltételnek*:

$$\overline{X_i} \subseteq \bigcup_{j \geq i} X_j$$

A $Z_i = \bigcup_{j \geq i} X_j$ -ket X *rétegelt részsokaságainak* hívjuk.

Tétel

Legyen X egy sima projektív algebrai varietás és Y egy d -kodimenziós részvarietás. Ekkor Y az X $2d$ -kodimenziós rétegelt részsokasága, ahol a rétegek komplex sokaságok.

Részvarietás Poincaré-duálisa

Tétel

Legyen X egy n -dimenziós sokaság, és Y egy d -kodimenziós rétegelt részsokasága, az $\mathcal{X} = (X_0, \dots, X_n)$ rétegelés szerint. Feltesszük, hogy X_d koirányított. Ekkor

- a $H^d(X) \rightarrow H^d(X \setminus Z_{d+1})$ megszorítás injektív, vagyis legfeljebb egy $\alpha \in H^d(X)$ létezik, melyre

$$\alpha|_{X \setminus Z_{d+1}} = [X_d]$$

- ha X_{d+1} üres, akkor létezik ilyen α .

Definíció

Tekintsük $Y \setminus Z_{d+1} = X_d$ -t, ez egy zárt részsokasága $X \setminus Z_{d+1}$ -nek. Y Poincaré-duálisa az az egyértelmű $\alpha \in H^d(X)$, melyre $\alpha|_{X \setminus Z_{d+1}} = [X_d]$.

Plücker-leképezés

Definíció

Legyen $V \in \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ -nek egy $\varphi \in \text{Inj}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^n)$ beágyazása. Egy $I \in \binom{[n]}{k}$ kiválasztáshoz tekintsük $m_I(\varphi) = \det(M_I(\varphi))$ -t. Az m_I koordinátákat tekinthetjük projektív koordinátáknak, hiszen ha ψ egy másik reprezentánsa V -nek, akkor $\psi\varphi^{-1} \in \text{GL}(k)$, és $m_I(\psi) = \det(\psi\varphi^{-1})m_I(\varphi)$. Ezek a *Plücker-koordináták* definiálják a

$$\text{plu}: \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{CP}^{\binom{n}{k}-1}$$

Plücker-leképezést.

Geometriai Giambelli-formula

Tétel

Legyen λ egy partíció és $\sigma_\lambda \subseteq \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ a megfelelő Schubert varietás. Ekkor

$$[\sigma_\lambda] = \begin{bmatrix} \bar{c}_{\mu_1} & \bar{c}_{\mu_1+1} & \cdots & \bar{c}_{\mu_1+d-1} \\ \bar{c}_{\mu_2-1} & \bar{c}_{\mu_2} & \cdots & \bar{c}_{\mu_1+d-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{c}_{\mu_1-d+1} & \bar{c}_{\mu_1-d+2} & \cdots & \bar{c}_{\mu_d} \end{bmatrix} = |\bar{c}_{\mu_i-j+i}|_{d \times d}$$

ahol $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) = \lambda^\top$ a λ^\top a λ partíció konjugáltja, továbbá $\bar{c}_i = c_i(S^*) = (-1)^i c_i(S)$ a tautologikus nyaláb duálisának i -edik Chern osztálya. A továbbiakban: $\Delta_\lambda(y_1, \dots, y_i, \dots) = |y_{\lambda_i-j+i}|_{d \times d}$

Geometriai Giambelli-formula

Tétel

Legyen λ egy partíció és $\sigma_\lambda \subseteq \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ a megfelelő Schubert varietás. Ekkor

$$[\sigma_\lambda] = \begin{bmatrix} \bar{c}_{\mu_1} & \bar{c}_{\mu_1+1} & \dots & \bar{c}_{\mu_1+d-1} \\ \bar{c}_{\mu_2-1} & \bar{c}_{\mu_2} & \dots & \bar{c}_{\mu_1+d-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{c}_{\mu_1-d+1} & \bar{c}_{\mu_1-d+2} & \dots & \bar{c}_{\mu_d} \end{bmatrix} = |\bar{c}_{\mu_i-j+i}|_{d \times d}$$

ahol $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) = \lambda^\top$ a λ^\top a λ partíció konjugáltja, továbbá $\bar{c}_i = c_i(S^*) = (-1)^i c_i(S)$ a tautologikus nyaláb duálisának i -edik Chern osztálya. A továbbiakban: $\Delta_\lambda(y_1, \dots, y_i, \dots) = |y_{\lambda_i-j+i}|_{d \times d}$

Következmény

A $H^*(\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$ gyűrűt generálják a $c_i(S^*)$ Chern-osztályok.

További számolások $H^*(\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$ -ben

Definíció

Egy λ partícióra $s(x_1, \dots, x_k) = \frac{|x_j^{\lambda_j + k - i}|_{k \times k}}{|x_j^{k - i}|_{k \times k}}$ egy *Schur-polinom*.

Tétel

Algebrai Giambelli-formula. $s_\lambda = \Delta_{\lambda^\top}(E)$

További számolások $H^*(\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$ -ben

Definíció

Egy λ partícióra $s(x_1, \dots, x_k) = \frac{|x_j^{\lambda_j+k-i}|_{k \times k}}{|x_j^{k-i}|_{k \times k}}$ egy *Schur-polinom*.

Tétel

Algebrai Giambelli-formula. $s_\lambda = \Delta_{\lambda^\top}(E)$

Tétel

Kirwan-homomorfizmus. A $\kappa(E_i) = c_i(S^*)$ hozzárendelés egyértelműen kiterjed egy szürjektív $\kappa: \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k]^{S_k} \rightarrow H^*(\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$ homomorfizmussá, mely szerint $\kappa(s_\lambda) = [\sigma_\lambda]$.

A Pieri-formula

Definíció

Schur-polinomok szorzata felírható Schur-bázisban:

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu} c_{\lambda, \mu}^{\nu} s_{\nu}$$

ahol λ, μ, ν mind k -hosszú partíciók, és $|\lambda| + |\mu| = |\nu|$. A $c_{\lambda, \mu}^{\nu}$ -ket hívjuk *Littlewood-Richardson-együtthatóknak*.

Tétel

$$s_\lambda s_{(1^l)} = \sum_{\nu \in K(\lambda, l)} s_{\nu}$$

Ahol $K(\lambda, l) = \{\nu \supset \lambda \mid |\nu| = |\lambda| + l, \text{ nincs két új kocka egy sorban}\}$.

Dualitás

Definíció

Dualitási izomorfizmus. A $\delta: V \rightarrow \text{Ann}(V)$ megfeleltetés megad egy $\delta: \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow \text{Gr}_k((\mathbb{C}^n)^*)$ izomorfizmust.

Dualitás

Definíció

Dualitási izomorfizmus. A $\delta: V \rightarrow \text{Ann}(V)$ megfeleltetés megad egy $\delta: \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow \text{Gr}_k((\mathbb{C}^n)^*)$ izomorfizmust.

Tétel

Duális Pieri-formula. $s_\lambda s_l = \sum_{\nu \in K^*(\lambda, l)} s_\nu$, ahol

$K^*(\lambda, l) = \{\nu \supset \lambda \mid |\nu| = |\lambda| + l, \text{ nincs két új kocka egy oszlopban}\}$

Dualitás

Definíció

Dualitási izomorfizmus. A $\delta: V \rightarrow \text{Ann}(V)$ megfeleltetés megad egy $\delta: \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow \text{Gr}_k((\mathbb{C}^n)^*)$ izomorfizmust.

Tétel

Duális Pieri-formula. $s_\lambda s_{(l)} = \sum_{\nu \in K^*(\lambda, l)} s_\nu$, ahol

$K^*(\lambda, l) = \{\nu \supset \lambda \mid |\nu| = |\lambda| + l, \text{ nincs két új kocka egy oszlopban}\}$

Tétel

Poincaré-dualitás.

$\{[\sigma_\lambda] \mid \lambda \subseteq k \times (n - k), |\lambda| = d\}$ és $\{[\sigma_{\bar{\lambda}}] \mid \lambda \subseteq k \times (n - k), |\lambda| = d\}$
duális bázisok, azaz ha $|\lambda| + |\mu| = k(n - k)$, akkor

$$\langle [\sigma_\lambda], [\sigma_\mu] \rangle = \begin{cases} 1, & \text{ha } \mu = \bar{\lambda} \\ 0, & \text{ha } \mu \neq \bar{\lambda} \end{cases}$$

4 egyenes a térben

Megoldás

$\sigma_l = \sigma_{(1)}$. $[\sigma_{(1)}]^2$ a Pieri-formulával:

$$\square \cdot \square = \square \square + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

Tehát $[\sigma_{(1)}]^2 = [\sigma_{(2)}] + [\sigma_{(1,1)}]$.

$\square \square$ és $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$ önduálisak, így használhatjuk a Poincaré-dualitást.

$$[\sigma_{(1)}]^4 = ([\sigma_{(2)}] + [\sigma_{(1,1)}])^2 = 1 + 1 = 2$$

Köszönöm a figyelmet!