Leszámlálások algebrai topológián át

Mazug Péter
Témavezető: Fehér László

2024

1. Bevezetés

A *Schubert-kalkulus* egy a 19. században létrejött ága az algebrai geometriának, amely a témakör egy klasszikus problémakörében, *leszámlálás*i kérdésekben hivatott válaszokat adni. Hermann Schubert forradalmi ötletei számos fontos modern fogalmat alapoztak meg. Eredményeinek jelentőségét az is mutatja, hogy Hilbert 15. problémája Schubert módszerének precíz megalapozása volt. Ebben a beszámolóban a Schubert-kalkulus topológiai fogalmait fogjuk áttekinteni, és körbejárjuk leszámlálási feladatok megoldásait algebrai topológiai szemüvegen keresztül.

2. A Schubert-kalkulus ötlete

2.1. Feladat. Hány egyenes metsz 4 adott egyenest a térben?

Ilyen és hasonló feladatok képzik a leszámlálások témakörét. Természetesen a konkrét válasz sok mindentől függ, valós vagy komplex, affin vagy projektív a tér, melyben dolgozunk, nem is beszélve esetleg az egyenesek választásáról. Amennyiben nem komplex, projektív térben dolgozunk, elképzelhető, hogy „elvesznek” megoldások, így mi most csak ezt az esetet fogjuk vizsgálni. Ilyen feltételek mellett arra számítunk, hogy a generikus esetben mindig ugyanazt a számot kapjuk. Az a kérdés is felmerül, hogy miért pont 4 egyenest vegyünk. Ezt első megközelítésben *dimenziószámlálás*sal gondolhatjuk meg:

Megoldás. Egy egyenest a térben 4 paraméterrel lehet megadni, 4-dimenziós az egyenesek tere. (Pl. két síkon egy-egy pont kiválasztásával.) Az a feltétel, hogy egy adott egyenest messen, 1-gyel csökkenti a paraméterek számát. (Miután a síkon kiválasztottuk a pontot már csak az adott egyenesről választunk még egyet.) Így 4 adott egyenes után 4-gyel csökkent a dimenzió, ennyi feltétel mellett számíthatunk 0-dimenziós megoldáshalmazra, vagyis véges sok pontra. □

2.1. Definíció. $k \leq n$-ra a $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ *Grassmann-sokaság* $\mathbb{C}^n$ k-dimenziós lineáris altereinek tere. Ezt mint a $\mathrm{V}_k(\mathbb{C}^n) = \{(x_1, \ldots, x_k) \in (\mathbb{C}^n)^k \mid x_1, \ldots, x_k \text{ ortonormált}\}$ *Stiefel-sokaság* faktora topologizáljuk. Fontos, hogy ez egy sima (sőt holomorf) sokaság.

A Grassman-sokaság a Schubert-kalkulus központi objektuma. Ezzel felvértezve vázoljuk fel a fentebbi leszámlálási feladat megoldását Schubert-kalkulussal.

Megoldás. A komplex projektív térben dolgozunk, ez igazából $\mathrm{Gr}_1(\mathbb{C}^4)$. Egy egyenes a komplex projektív térben egy affin síknak felel meg, tehát az egyenesek tere $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$. Egy $l \in \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$-re legyen $\sigma_l = \{V \in \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4) \mid \dim(V \cap L) > 0\}$ az l-et metsző egyenesek halmaza. Tehát l_1, l_2, l_3, l_4 általános helyzetű egyenesekre $|\sigma_{l_1} \cap \sigma_{l_2} \cap \sigma_{l_3} \cap \sigma_{l_4}|$-át kell kiszámolni. Ezeknek a σ_{l_i} *Schubert-varietás*oknak van $[\sigma_l] \in H^2(\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4))$ Poincaré-duálisa, annak ellenére, hogy nem egy részsokaságok - ennek okait fogjuk tárgyalni. Bizonyítható, hogy a generikus esetben hasonlóan lehet számolni, mint transzverzális részsokaságok esetén: $[\sigma_{l_1} \cap \sigma_{l_2} \cap \sigma_{l_3} \cap \sigma_{l_4}] = [\sigma_l]^4$. Láttuk, hogy $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$ 4-dimenziós, és mivel komplex, irányítható, így $H^8(\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^4)) \cong \mathbb{Z}$, és $[*]$ generálja. Tehát ha $[\sigma_l]^4 = a \cdot [*]$, akkor a metszet a db pontból áll. Ezek alapján most már látjuk, hogy leszámlálási feladatok megoldásához Grassman-sokaságok kohomológia-gyűrűiben kell számoljunk. Ezek megértése lesz az egyik fő cél. Ez esetben $a = 2$-t kapunk majd, így 4 egyenest 2 egyenes metsz a térben - ez egybeesik a klasszikus módszerek eredményével. □

3. Schubert-cellák

Legyen $F_\bullet = \{F_0 = 0 < F_1 = \langle e_1 \rangle < \ldots < F_n = \langle e_1 \ldots e_n \rangle\}$ a standard zászló, és $B^+ < \mathrm{GL}(n)$ pedig $F_\bullet$ stabilizátor-részcsoportja, a felső-háromszög mátrixok. B^+ indukál egy hatást $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$-en. Ekkor tekintve az $I = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_k\} \in \binom{n}{k}$ kiválasztásokat

3.1. Állítás. B^+ minden orbitjában pontosan egy $V_I = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\}$ koordináta-altér található.

Bizonyítás. A tömörség érdekében a bizonyításokat többnyire nem részletezzük alaposan. Itt azt fontos megjegyeznünk, hogy bevezetjük a B^+-invariáns

$$di_V(j) = \dim(V \cap F_j)$$

dimenziófüggvényt. Egy adott V altérre ezen függvény ugráshalmaza egyértelműen meghatározza az orbitját. Ez az ugráshalmaz V_I-re pont I lesz. Segíteni fog továbbá felépíteni egy egyszerű *Bruhat-felbontás*t. □

3.1. Definíció. Egy M maximális rangú $n \times k$-as mátrix, egy $M = b\varphi_I g$ alakban történő felírását *Bruhat-felbontásnak* hívunk, ha b egy szigorú felső háromszögmátrix, φ_I az a $n \times k$-as mátrix, amelyiknek az I-minora identitás és mindenhol máshol 0, és $g \in \mathrm{GL}(k)$. Ekkor $b\varphi_J$-t hívjuk *Bruhat-mátrix*nak.

A Bruhat-felbontás segítségével az alábbi állítást is megkapjuk, a Bruhat-mátrix nem-0 és nem-1 tagjait vizsgálva.

3.2. Állítás. $B^+V_I \cong \mathbb{C}^{|I|}$, ahol $|I| = \sum_{j=1}^{k}(i_j - j)$.

3.2. Definíció. A B^+V_I részsokaság az I *Schubert-szimbólum*hoz tartozó *Schubert-cella*, melyet Sch_I-vel jelölünk. A Schubert-cellák megadnak $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$-en egy CW-struktúrát.

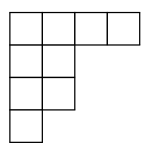
Mivel kohomolgiákat szeretnénk vizsgálni, érdemes a kodimenziót kiszámolni:

$$\mathrm{codim}(\mathrm{Sch}_I) = k(n-k) - \sum_{j=1}^{k}(i_j - j) = \sum_{j=1}^{k}(n-k-i_j-j)$$

Ez alapján érdemes bevezetni $\lambda_j = \lambda(I)_j = n-k+j-i_j$, $\lambda(I) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ jelöléseket, illetve az $i_j = I(\lambda)_j = n-k+j-\lambda_j$, $I(\lambda) = (i_1, \ldots, i_k)$ inverzeket.

3.3. Állítás. Az ilyen λ-k partíciók. A $\lambda_j = n-k+j-i_j$ formula meghatároz egy bijekciót n-nek a k-elemű részhalmazai, és $n-k$-nál nagyobb számokat nem használó partíciói között.

A partíciókat majd gyakran a Young-diagramjukkal fogjuk reprezentálni. Például a $\lambda = (4,2,2,1)$ partíció Young-diagramja:



A jövőben a Schubert-cellákról fontos lesz az alábbi állítás is:

3.4. Állítás. $\overline{B^+V_I} = \bigcup_{J \geq I} B^+V_J$, ahol $J \geq I$ pontosan akkor, ha $J(t) \geq I(t)$ $\forall t = 1, \ldots k$.

Ez az állítás már most segítségünkre van az alábbi definícióban:

3.3. Definíció. A λ partícióhoz tartozó σ_λ *Schubert-varietás*

$$\{V \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \mid di_V(I(\lambda)_j) \geq j, \forall j = 1, \ldots k\}$$

Ami ezek szerint $\overline{B^+V_I}$ lesz.

4. Részvarietás Poincaré-duálisa

Láttuk, hogy az elmélet folytatásához ezen a ponton határozottan szükség lenne arra, hogy vehessük varietások Poincaré-duálisát. Ennek módját itt sima projektív algebrai varietások részvarietásaira mutatjuk meg. Igazából a kulcsfogalom itt a *rétegelt részsokaság* lesz, ezeknek tudjuk Poincaré-duálisát definiálni, és a részvarietásokat pedig majd szeretnénk rétegelt sokaságokként realizálni.

4.1. Definíció. Egy X n-dimenziós sokaság *rétegelés*e egy $\mathcal{X} = (X_0, \ldots, X_n)$ partíciója a sokaságnak. Megköveteljük, hogy X_i egy i-kodimenziós részsokaság legyen (vagy üres). Emellett még teljesülnie kell a *mezsgye-feltétel*nek:

$$\overline{X_i} \subseteq \bigcup_{j \geq i} X_j$$

A $Z_i = \bigcup_{j \geq i} X_j$-ket X *rétegelt részsokaság*ainak hívjuk.

4.2. Definíció. Az X n-dimenziós sokaságnak $Y \subseteq X$ egy d-kodimenziós *rétegelt részsokaság*a, ha van X-nek olyan rétegelése, melyre $Y = Z_d$.

Y Poincaré-duálisát keresve tekintsük $Y \setminus Z_{d+1} = X_d$-t, ez egy zárt részsokasága $X \setminus Z_{d+1}$-nek. Ha koirányított, létezik $[X_d] \in H^d(X \setminus Z_{d+1})$ Poincaré-duálisa. Ezt az $[X_d]$-t szeretnénk valahogy visszavinni $H^d(X)$-be, azaz kéne egy $\alpha \in H^d(X)$, melyre

$$\alpha|_{X \setminus Z_{d+1}} = [X_d]$$

Ha α egyértelmű, akkor azt jogosan nevezhetjük Y Poincaré-duálisának, $[Y]$-nal fogjuk jelölni. Ilyet α-t pedig az alábbi tételből fogunk kapni:

4.1. Tétel. Legyen X egy n-dimenziós sokaság, és Y egy d-kodimenziós részsokasága, az $\mathcal{X} = (X_0, \ldots, X_n)$ rétegelés szerint. Feltesszük, hogy X_d koirányított. Ekkor

(i) a $H^d(X) \to H^d(X \setminus Z_{d+1})$ megszorítás injektív, vagyis legfeljebb egy $\alpha \in H^d(X)$ létezik, melyre

$$\alpha|_{X \setminus Z_{d+1}} = [X_d]$$

(ii) ha X_{d+1} üres, akkor létezik ilyen α.

Bizonyítás. Tekintsük az $(X, X \setminus Z_{d+1})$ pár kohomológia hosszú egzakt sorát:

$$H^d(X, X \setminus Z_{d+1}) \to H^d(X) \to H^d(X \setminus Z_{d+1}) \to H^{d+1}(X, X \setminus Z_{d+1})$$

Az egzaktság miatt elég, ha az első tag 0. Ebben segít az alábbi lemma:

4.2. Lemma. Legyen X egy n-dimenziós sokaság, és $\mathcal{X} = (X_0, \ldots, X_n)$ az X rétegelése. Ekkor

$$H^i(X, X \setminus Z_k) = 0, \text{ ha } i < n.$$

A lemmát k szerint csökkenő indukcióval bizonyítjuk. $k > n$-re triviálisan igaz. A $k+1$-ről k-ra lépéshez tekintsük az $(X, X \setminus Z_{k+1}, X \setminus Z_k)$ tér-hármas kohomológia hosszú egzakt sorát:

$$H^i(X, X \setminus Z_{k+1}) \to H^i(X, X \setminus Z_k) \to H^i(X \setminus Z_{k+1}, X \setminus Z_k)$$

$H^i(X, X \setminus Z_{k+1})$ az indukciós feltevés szerint 0. $X \setminus Z_{k+1}, X \setminus Z_k = X_k$, egy zárt részsokasága $X \setminus Z_{k+1}$-nek. Ezek szerint létezik ν normálnyalábja, erre a csőszerű környezet lemma és a kivágási tétel alkalmazása után kapjuk, hogy

$$H^i(X \setminus Z_{k+1}, X \setminus Z_k) \cong H^i(\nu, \nu \setminus X_k)$$

Azt, hogy ez $i < k$-ra 0, pedig tetszőleges vektornyalábra tudjuk. (X_k-ra mint a bázisra gondolunk a nullszelésbe beágyazva.) Irányított esetben ez a Thom-izomorfizmustétel azonnali következménye, de egyébként is belátható.

Innen az egzaktságot visszafejtve megkapjuk az injektivitást. A (ii) feltétele mellett $Z_{d+1} = Zd + 2$, tehát

$$H^{d+1}(X, X \setminus Z_{d+1}) = H^{d+1}(X, X \setminus Z_{d+2})$$

Ami a lemma miatt megint 0, így a szürjektivitással is kész vagyunk. □

Részvarietásokból így elég a fentebbi feltételeket teljesítő rétegelt részsokaságokat csinálni, hogy megkapjuk a kívánt tételt.

4.3. Tétel. Legyen X egy sima projektív algebrai varietás és Y egy d-kodimenziós részvarietás. Ekkor Y az X $2d$-kodimenziós rétegelt részsokasága, ahol a rétegek komplex sokaságok.

Bizonyítás. A rétegelést azon tény segítségével lehet elkészíteni, hogy egy varietás szinguláris pontjainak halmaza Zariski-zárt része a varietásnak. Ezt iterálva tudjuk elkülöníteni a rétegeket, és mivel a dimenzió mindig esik, egy idő után el fogunk jutni pontokhoz. A szükséges koirányítást a komplex struktúra fogja adni, és a komplexségnek köszönhetjük azt is, hogy minden páratlan kodimenzióban X_i üres, ami a 4.1 tétel (ii) pontjában adott feltételt elégíti ki automatikusan. □

5. A Grassmann-sokaság kohomológia-gyűrűje

Ahhoz, hogy a Schubert-varietásokkal elkezdhessünk kohomológiákat számolni, így már csak az hiányzik, hogy $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ egy projektív algebrai sokaság legyen. Ezt is tisztázzuk gyorsan.

5.1. Definíció. Egy $V \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ altérnek vegyük egy $\varphi \in \mathrm{Inj}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^n)$ beágyazását. Egy $I \in \binom{n}{k}$ kiválasztáshoz tekintsük $m_I(\varphi) = \det(M_I(\varphi))$-t, φ mátrixának I szerinti minor determinánsát. Az m_I koordinátákat tekinthetjük projektív koordinátáknak, hiszen ha ψ egy másik reprezentánsa V-nek, akkor $\psi\varphi^{-1} \in \mathrm{GL}(k)$, és $m_I(\psi) = \det(\psi\varphi^{-1})m_I(\varphi)$. Ezek a *Plücker-koordinátá*k definiálják a

$$\mathrm{plu}\colon Gr_k(\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{\binom{n}{k}-1}$$

*Plücker-leképezés*t.

A kohomológia-gyűrű jellemzése a $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ feletti S tautologikus vektornyalábra fog hagyatkozni, illetve annak Chern-osztályaira. Az alapos körbejáráshoz szükségünk az S-t kiegészítő Q hányadosnyalábra, illetve a duálisaikra is.

A geometriai Giambelli-formula egy fontos eszköze a témakörnek. Ezt bizonyítás nélkül átemeljük, de speciális eseteit látni fogjuk.

5.1. Tétel. *Geometriai Giambelli-formula.* Legyen λ egy partíció és $\sigma_\lambda \subseteq \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ a megfelelő (esetleg üres, ha λ „túl nagy") Schubert varietás. Ekkor

$$[\sigma_\lambda] = \begin{bmatrix} \bar{c}_{\mu_1} & \bar{c}_{\mu_1+1} & \dots & \bar{c}_{\mu_1+d-1} \\ \bar{c}_{\mu_2-1} & \bar{c}_{\mu_2} & \dots & \bar{c}_{\mu_1+d-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{c}_{\mu_1-d+1} & \bar{c}_{\mu_1-d+2} & \dots & \bar{c}_{\mu_d} \end{bmatrix} = |\bar{c}_{\mu_i-j+i}|_{d\times d}$$

ahol $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) = \lambda^T$ a $\lambda^\top$ a λ partíció konjugáltja, az a partíciót, melynek Young-diagramját λ Young-diagramját a főátlóra tükrözve kapjuk. Továbbá $\bar{c}_i = c_i(S^*) = (-1)^i c_i(S) =$ a tautologikus nyaláb duálisának i-edik Chern osztálya. Hogy a továbbiakban ne kelljen ekkora mátrixokat írni, bevezetjük a $\Delta_\lambda(y_1, \dots, y_i, \dots) = |y_{\lambda_i-j+i}|_{d\times d}$ jelölést.

5.2. Következmény. A $H^*(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$ gyűrűt generálják a $c_i(S*)$ Chern-osztályok.

A geometriai Giambelli-formulából már elvileg $H^*(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$ teljes szerkezetét kiszámolhatnánk, de ez csak kis n-ekre hatékony. A számolást segíteni fogja az algebrai Giambelli-formula, ami *Schur-polinom*okról szól.

5.2. Definíció. Egy λ partícióra $s(x_1, \dots, x_k) = \dfrac{|x_j^{\lambda_j+k-i}|_{k\times k}}{|x_j^{k-i}|_{k\times k}}$ egy *Schur-polinom.*

A Schur-polinomok szimmetrikusak lesznek, hiszen a nevező és a számláló is alternáló x_j-ben. Tudjuk, hogy a szimmetrikus polinomokat szabadon generálják az elemi szimmetrikus polinomok, hogy a Schur-polinomokat pontosan hogyan, azt adja meg az algebrai Giambelli-formula.

5.3. Tétel. *Algebrai Giambelli-formula.* Legyen λ egy partíció. Ekkor

$$s_\lambda = \Delta_{\lambda^\top}(E)$$

ahol $\lambda^\top$ a λ partíció konjugáltja, és E pedig azt jelöli, hogy y_i helyére E_i kerül, az i-ik elemi szimmetrikus polinom.

Ezek alapján tudunk következtetni itt egy mélyebb kapcsolatra is:

5.4. Tétel. *Kirwan-homomorfizmus.* A fentiek alapján a $\kappa(E_i) = c_i(S*)$ hozzárendelés egyértelműen kiterjed egy szürjektív $\kappa\colon \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k]^{S_k} \to H^*(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$ homomorfizmussá, mely szerint $\kappa(s_\lambda) = [\sigma_\lambda]$.

Ezek szerint a szorzást $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$-ben lefordíthatjuk Schur-polinomok szorzására. A Schur-polinomok additív bázisát alkotját a d-edfokú k-változós szimmetrikus polinomok csoportjának, így a szorzat felírható Schur-bázisban:

$$s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} s_\nu$$

ahol λ, μ, ν mind k-hosszú partíciók, és $|\lambda| + |\mu| = |\nu|$. A $c^\nu_{\lambda,\mu}$ *Littlewood-Richardson-együtthatók* kiszámolására számos kombinatorikus algoritmus létezik, de ezek ismételten túl bonyolultak ahhoz, hogy számunkra jól használhatóak legyenek. Egy speciális esetet viszont egyszerűen leír a

5.5. Tétel. *Pieri-formula.*

$$s_\lambda s_{(1^l)} = \sum_{\nu \in K(\lambda,l)} s_\nu$$

Ahol $K(\lambda, l) = \{\nu \supset \lambda \mid |\nu| = |\lambda| + l,\ \text{nincs két új kocka egy sorban}\}$. A Kirwan homomorfizmussal ezt használhatjuk Schubert-variátosok szorzására is.

5.3. Definíció. Egy további központi fogalom, ami a segítségünkre lesz, a *dualitási izomorfizmus.* A $\delta\colon V \to \mathrm{Ann}(V)$ megfeleltetés megad egy $\delta\colon \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \to \mathrm{Gr}_k((\mathbb{C}^n)^*)$ izomorfizmust.

Az alábbi elemi állítások rámutatnak a dualitási izmorfizmus hasznosságára:

5.6. Állítás. $\delta^*(S) = Q^*$, $\delta^*(S^*) = Q$, $\delta^*(Q) = S^*$, $\delta^*(Q^*) = S$.

5.7. Állítás. $\delta(\sigma_\lambda(F_\bullet)) = \sigma_{\lambda^\top}(F_\bullet^\top)$, ahol $(F_\bullet^\top)$ a duális zászló.

Ezeknek a szabályoknak a segítségével dualizálhatjuk korábbi tételeinket.

5.8. Tétel. *Duális geometriai Giambelli-formula.* $[\sigma_\lambda] = \Delta_\lambda(c(Q))$.

5.9. Tétel. *Duális Pieri-formula.* $s_\lambda s_{(l)} = \sum_{\nu \in K^*(\lambda,l)} s_\nu$, ahol $K^*(\lambda, l) = \{\nu \supset \lambda \mid |\nu| = |\lambda| + l,\ \text{nincs két új kocka egy oszlopban}\}$

Láthatjuk, hogy a $\sigma_{(1^l)}$ és $\sigma_{(l)}$ különösen fontos szerepet töltenek be, így az ő esetükben mutatunk egy topológiai bizonyítást a geometriai Giambelli-formulára.

Bizonyítás. A dualitás miatt elég az egyiküket vizsgálni, tekintsük $\sigma_{(l)}$-t. A duális geometriai Giambelli-formula ez esetben egy egyszerű alakra redukálódik: $[\sigma_{(l)}] = c_l(Q)$.

Ahhoz, hogy belássuk $[\sigma_{(l)}]$ megegyezik az adott Chern-osztállyal, meg kell mutassuk, hogy $n-k-l+1$ független szelés létezésének obstrukciója. Ennyi szelésre gondolhatunk, mint egy darab s szelés a $\mathrm{Hom}(E_{n-k-l+1}, Q)$ nyalábban, ahol $E_{n-k-l+1}$ az $n-k-l+1$ rangú triviális nyaláb. s akkor felel meg független szeléseknek, ha minden pontban injektív homomorfizmust vesz fel. Ha s elég általános helyzetű (transzverzális az injektív homomorfizmusok résznyalábjára) akkor az elfajulási helyei tényleg $c_l(Q)$-t, mint egy obstrukciót fogják meghatározni.

$\mathrm{Hom}(E_n, Q)$-nak adódik egy s' szelése, mely a Q definíciójából jön, mint a nyaláb E_n hányadosa. $\sigma_{(l)}$ definíciójából ekvivalens azzal, hogy

$$\sigma_{(l)} = \{V \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \mid \dim(V \cap F_{n-k-l+1}) \geq 1\}$$

Tehát s'-t megszorítva az $F_{n-k-l+1}$ koordináta-altérre $\mathrm{Hom}(F_{n-k-l+1}, Q)$-nak kapjuk egy s szelését, és $s(V)$ pontosan akkor injektív, ha V csak a 0-ban metszi $F_{n-k-l+1}$-et, azaz $\sigma_{(l)}$ pontosan s elfajulási helye. $\square$

Utolsóként még a vizsgájuk meg a

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_{\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)} \alpha \cdot \beta$$

nem-elfajuló bilineáris formát. Eszerint $H^*(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$-ben a $\{[\sigma_\lambda] \mid \lambda \subseteq k \times (n-k)\}$ bázisnak kell duális bázisa legyen. Ennek jellemzéséhez vezessük be az alábbi fogalmat.

5.4. Definíció. Egy λ partíciónak a Young-diagramját tükrözzük befoglaló a $k \times (n-k)$-s téglalap középpontjára, majd vegyük a komplementerét. Ezzel egy újabb Young-diagramot kapunk, a hozzá tartozó partíciót λ duálisának fogjuk hívni, és $\bar{\lambda}$-val jelöljük.

5.10. Tétel. *Poincaré-dualitás.*

$\{[\sigma_\lambda] \mid \lambda \subseteq k \times (n-k), |\lambda| = d\}$ és $\{[\sigma_{\bar{\lambda}}] \mid \lambda \subseteq k \times (n-k), |\lambda| = d\}$ duális bázisok, azaz ha $|\lambda| + |\mu| = k(n-k)$, akkor

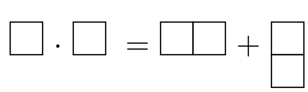
$$\langle [\sigma_\lambda], [\sigma_\mu] \rangle = \begin{cases} 1, & \text{ha } \mu = \bar{\lambda} \\ 0, & \text{ha } \mu \neq \bar{\lambda} \end{cases}$$

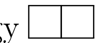
Bizonyítás. Bár ki is számolhatnánk, a Poincaré-dualitást be lehet bizonyítani a korábban látott geometriai eszközökkel, Különböző zászlókat kell a különböző Schubert-cellákhoz társítani, és ha követjük ezek egymásba transzformálása mit csinál a felosztásokkal illetve a Young-diagrammal, akkor metszések dimenzióit is ki lehet számolni. $\square$

6. Leszámlálási feladatok

Térjünk vissza a 2.1 feladatban maradt nyitott kérdésre, mi lesz $[\sigma_l]^4$?

Bizonyítás. Gondoljuk meg, hogy $\sigma_l = \sigma_{(1)}$, egy adott egyenest (F_2-t) kell elmetszeni. Először $[\sigma_{(1)}]^2$-et számoljuk ki, ez alkalommal már könnyű dolgunk van a Pieri-formulával:

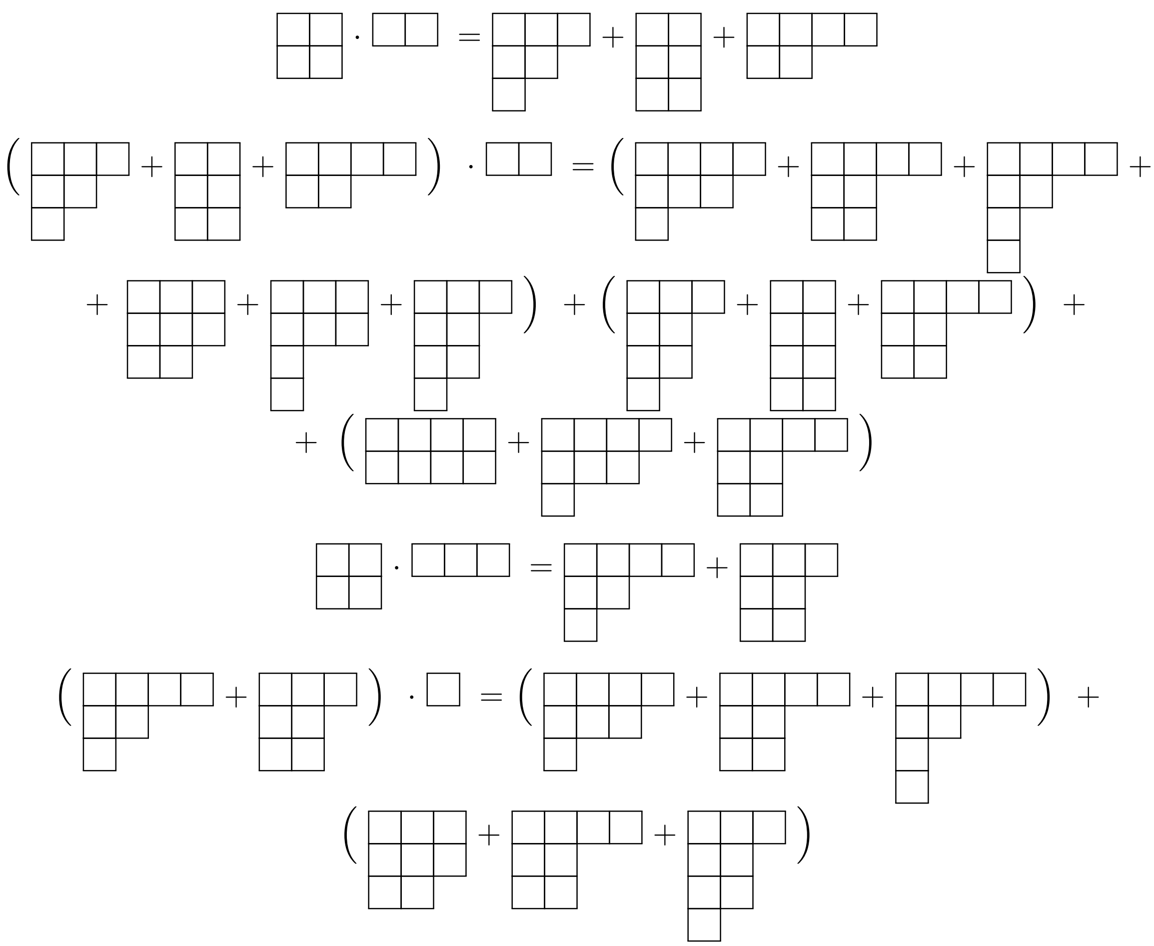


Tehát $[\sigma_{(1)}]^2 = [\sigma_{(2)}] + [\sigma_{(1,1)}]$ Vegyük észre, hogy  és  önduálisak, tehát a Poincaré-dualitással $[\sigma_{(1)}]^4 = ([\sigma_{(2)}] + [\sigma_{(1,1)}])^2 = 1 + 1 = 2$ □

6.1. Feladat. Négy 4-teret hány 4-tér metsz síkban $\mathbb{C}^8$-ban?

Bizonyítás. Ehhez azt kell meggondolnunk, hogy egy adott 4-teret (F_4-et) mely Schubert-varietás fog síkban metszeni. Ehhez 3 és 4 dimenziónál kell ugrás legyen, tehát $\sigma_{(2,2)}$-t kell vizsgálni, $[\sigma_{(2,2)}]^4$ érdekel minket.

A Giambelli-formulából $[\sigma_{(2,2)}] = [\sigma_2]^2 - [\sigma_1][\sigma_3]$. Így $[\sigma_{(2,2)}]^2 = [\sigma_{(2,2)}]([\sigma_2]^2 - [\sigma_1][\sigma_3])$. Ezt kibontjuk, és kiszámoljuk a duális Pieri-formula ismételt alkalmazásával.



□

$[\sigma_{(2,2)}][\sigma_2]^2 - [\sigma_{(2,2)}][\sigma_1][\sigma_3] = [\sigma_{(3,3,1,1)}] + [\sigma_{(3,2,2,1)}] + [\sigma_{(2,2,2,2)}] + [\sigma_{(4,4)}] + [\sigma_{(4,3,1)}] + [\sigma_{(4,2,2)}]$. Vegyük észre, hogy ezek mind önduálisak, tehát a Poincaré-dualitással azt kapjuk, hogy: $[\sigma_{(2,2)}]^4 = ([\sigma_{(3,3,1,1)}] + [\sigma_{(3,2,2,1)}] + [\sigma_{(2,2,2,2)}] + [\sigma_{(4,4)}] + [\sigma_{(4,3,1)}] + [\sigma_{(4,2,2)}])^2 = 6.$