

# Iwasawa-elmélet

## Egyéni kutatómunka 2

Márton Dénes

Témavezető: Zábrádi Gergely

Budapest, 2025. január 10.

Legyen  $p$  páratlan prím és  $\mu_{p^\infty}$  jelölje az összes  $p$ -hatványadik egységgyököt.

Egy  $\mathfrak{O}$  provéges Abel csoportra  $\Lambda(\mathfrak{O}) = \varprojlim_{\mathfrak{O}/\mathfrak{O} \leq \mathfrak{O} \text{ nyílt}} \mathbb{Z}_p[\mathfrak{O}/\mathfrak{O}]$  az Iwasawa algebraja.

Legyen  $p$  páratlan prím és  $\mu_{p^\infty}$  jelölje az összes  $p$ -hatványadik egységgyököt.

Egy  $\mathfrak{O}$  provéges Abel csoportra  $\Lambda(\mathfrak{O}) = \varprojlim_{\mathfrak{H} \leq \mathfrak{O} \text{ nyílt}} \mathbb{Z}_p[\mathfrak{O}/\mathfrak{H}]$  az Iwasawa algebraja.

$Q(\mathfrak{O})$  a  $\Lambda(\mathfrak{O})$  teljes hányadosgyűrűje, azaz  $Q(\mathfrak{O}) = S^{-1}\Lambda(\mathfrak{O})$ , ahol  $S$  a  $\Lambda(\mathfrak{O})$  gyűrű nem nullosztóinak multiplikatívan zárt halmaza.

$\lambda \in Q(\mathfrak{O})$  pszeudomérték  $\mathfrak{O}$ -n, ha  $(g-1)\lambda \in \Lambda(\mathfrak{O})$  minden  $g \in \mathfrak{O}$ -re.

Legyen  $p$  páratlan prím és  $\mu_{p^\infty}$  jelölje az összes  $p$ -hatványadik egységgyököt.

Egy  $\mathfrak{G}$  provéges Abel csoportra  $\Lambda(\mathfrak{G}) = \varprojlim_{\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G} \text{ nyílt}} \mathbb{Z}_p[\mathfrak{G}/\mathfrak{H}]$  az Iwasawa algebraja.

$Q(\mathfrak{G})$  a  $\Lambda(\mathfrak{G})$  teljes hányadosgyűrűje, azaz  $Q(\mathfrak{G}) = S^{-1}\Lambda(\mathfrak{G})$ , ahol  $S$  a  $\Lambda(\mathfrak{G})$  gyűrű nem nullosztóinak multiplikatívan zárt halmaza.

$\lambda \in Q(\mathfrak{G})$  pszeudomérték  $\mathfrak{G}$ -n, ha  $(g-1)\lambda \in \Lambda(\mathfrak{G})$  minden  $g \in \mathfrak{G}$ -re. Definiálható  $\mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{C}_p$  folytonos függvények integrálása a  $\Lambda(\mathfrak{G})$  elemei szerint. Egy  $\lambda$  pszeudomértékre és egy nem konstans  $1$ ,  $\nu : \mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{C}_p^\times$  folytonos csoporthomomorfizmusra

$$\int_{\mathfrak{G}} \nu d\lambda = \frac{\int_{\mathfrak{G}} \nu d((g-1)\lambda)}{\nu(g) - 1}$$

tetszőleges  $g \in \mathfrak{G}$ -re, amire  $\nu(g) \neq 1$ .

Legyen  $\mathcal{F}_\infty = \mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$  és  $F_\infty = \mathcal{F}_\infty^+$  a legnagyobb valós részteste, illetve  $\mathcal{G} = \text{Gal}(\mathcal{F}_\infty/\mathbb{Q})$  és  $G = \text{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q})$ . Legyen  $\{1, \iota\} = \text{Gal}(\mathcal{F}_\infty/F_\infty)$ .  
 $\Lambda(\mathcal{G}) = \Lambda(\mathcal{G})^+ \oplus \Lambda(\mathcal{G})^-$ , ahol  $\Lambda(\mathcal{G})^+ = \frac{1+\iota}{2}\Lambda(\mathcal{G})$  és  $\Lambda(\mathcal{G})^- = \frac{1-\iota}{2}\Lambda(\mathcal{G})$ .

Legyen  $\mathcal{F}_\infty = \mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$  és  $F_\infty = \mathcal{F}_\infty^+$  a legnagyobb valós részteste, illetve  $\mathcal{G} = \text{Gal}(\mathcal{F}_\infty/\mathbb{Q})$  és  $G = \text{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q})$ . Legyen  $\{1, \iota\} = \text{Gal}(\mathcal{F}_\infty/F_\infty)$ .

$\Lambda(\mathcal{G}) = \Lambda(\mathcal{G})^+ \oplus \Lambda(\mathcal{G})^-$ , ahol  $\Lambda(\mathcal{G})^+ = \frac{1+\iota}{2}\Lambda(\mathcal{G})$  és  $\Lambda(\mathcal{G})^- = \frac{1-\iota}{2}\Lambda(\mathcal{G})$ .

$\Lambda(\mathcal{G}) \twoheadrightarrow \Lambda(G) \rightsquigarrow \Lambda(\mathcal{G})^+ \simeq \Lambda(G) \rightsquigarrow \Lambda(G) \subset \Lambda(\mathcal{G})$

Hasonlóan  $Q(G) \subset Q(\mathcal{G})$  és így a pszeudomértékeket  $G$ -n megfeleltethetjük azon pszeudomértékeknek  $\mathcal{G}$ -n, melyek  $Q(\mathcal{G})^+$ -ban vannak.

Legyen  $\mathcal{F}_\infty = \mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$  és  $F_\infty = \mathcal{F}_\infty^+$  a legnagyobb valós részteste, illetve  $\mathcal{G} = \text{Gal}(\mathcal{F}_\infty/\mathbb{Q})$  és  $G = \text{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q})$ . Legyen  $\{1, \iota\} = \text{Gal}(\mathcal{F}_\infty/F_\infty)$ .

$\Lambda(\mathcal{G}) = \Lambda(\mathcal{G})^+ \oplus \Lambda(\mathcal{G})^-$ , ahol  $\Lambda(\mathcal{G})^+ = \frac{1+\iota}{2}\Lambda(\mathcal{G})$  és  $\Lambda(\mathcal{G})^- = \frac{1-\iota}{2}\Lambda(\mathcal{G})$ .

$\Lambda(\mathcal{G}) \twoheadrightarrow \Lambda(G) \rightsquigarrow \Lambda(\mathcal{G})^+ \simeq \Lambda(G) \rightsquigarrow \Lambda(G) \subset \Lambda(\mathcal{G})$

Hasonlóan  $Q(G) \subset Q(\mathcal{G})$  és így a pszeudomértékeket  $G$ -n megfeleltethetjük azon pszeudomértékeknek  $\mathcal{G}$ -n, melyek  $Q(\mathcal{G})^+$ -ban vannak.

## Tétel

Létezik egyetlen  $\zeta_p$  pszeudomérték  $G$ -n, amire

$$\int_G \chi(g)^k d\zeta_p = (1 - p^{k-1})\zeta(1 - k)$$

teljesül minden páros  $k \geq 2$  számra, ahol  $\zeta$  a Riemann-féle zéta-függvény és  $\chi : \mathcal{G} \simeq \mathbb{Z}_p^\times$  körosztási karakter, azaz  $\sigma(\zeta) = \zeta^{\chi(\sigma)}$  minden  $\zeta \in \mu_{p^\infty}$  és  $\sigma \in \mathcal{G}$  esetén.

# $\Lambda(G)$ -modulusok struktúrája

Legyen  $M$  kompakt  $\mathbb{Z}_p$ -modulus, amin  $G$  folytonosan hat.

Pontrjagin duális:  $M^D = \{M \rightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \text{ folytonos homomorfizmus}\}$ , ahol  $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$  diszkrét  $\mathbb{Z}_p$ -modulus.

# $\Lambda(G)$ -modulusok struktúrája

Legyen  $M$  kompakt  $\mathbb{Z}_p$ -modulus, amin  $G$  folytonosan hat.

Pontrjagin duális:  $M^D = \{M \rightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \text{ folytonos homomorfizmus}\}$ , ahol  $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$  diszkrét  $\mathbb{Z}_p$ -modulus.

Legyen  $H \leq G$  nyílt részcsoport.

$H$ -invariánsok:  $M^H =$  legnagyobb részmodulusa  $M$ -nek, amit  $H$  fixen hagy.

$H$ -koinvariánsok:  $M_H =$  legnagyobb faktora  $M$ -nek, amit  $H$  fixen hagy.

# $\Lambda(G)$ -modulusok struktúrája

Legyen  $M$  kompakt  $\mathbb{Z}_p$ -modulus, amin  $G$  folytonosan hat.

Pontrjagin duális:  $M^D = \{M \rightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \text{ folytonos homomorfizmus}\}$ , ahol  $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$  diszkrét  $\mathbb{Z}_p$ -modulus.

Legyen  $H \leq G$  nyílt részcsoport.

$H$ -invariánsok:  $M^H =$  legnagyobb részmodulusa  $M$ -nek, amit  $H$  fixen hagy.

$H$ -koinvariánsok:  $M_H =$  legnagyobb faktora  $M$ -nek, amit  $H$  fixen hagy.

$$M^D = \bigcup_{H \leq G \text{ nyílt}} (M^D)^H$$

Ennek duálisát véve

$$M = \varprojlim M_H.$$

# $\Lambda(G)$ -modulusok struktúrája

Legyen  $M$  kompakt  $\mathbb{Z}_p$ -modulus, amin  $G$  folytonosan hat.

Pontrjagin duális:  $M^D = \{M \rightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \text{ folytonos homomorfizmus}\}$ , ahol  $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$  diszkrét  $\mathbb{Z}_p$ -modulus.

Legyen  $H \leq G$  nyílt részcsoport.

$H$ -invariánsok:  $M^H =$  legnagyobb részmodulusa  $M$ -nek, amit  $H$  fixen hagy.

$H$ -koinvariánsok:  $M_H =$  legnagyobb faktora  $M$ -nek, amit  $H$  fixen hagy.

$$M^D = \bigcup_{H \leq G \text{ nyílt}} (M^D)^H$$

Ennek duálisát véve

$$M = \varprojlim M_H.$$

A  $\Lambda(G) = \varprojlim \mathbb{Z}_p[G/H]$  hatása ezen koordinátáinként értelmezhető.

# Egységek, mint $\Lambda(G)$ -modulusok

Fixáljuk a  $\mu_{p^{n+1}}$  ( $n \geq 0$ ) csoportok valamilyen  $\zeta_n$  generátorait, amelyekre  $\zeta_{n+1}^p = \zeta_n$ . Legyenek  $\pi_n = \zeta_n - 1$ .  $\mathcal{F}_n = \mathbb{Q}(\mu_{p^{n+1}})$ ,  $F_n = \mathcal{F}_n^+$ , továbbá

$\mathcal{D}_n = \mathcal{F}_n$  egészeinek gyűrűjének egységei  $\cap \langle \sigma(\pi_n) \in \mathcal{F}_n^\times : \sigma \in \text{Gal}(\mathcal{F}_n/\mathbb{Q}) \rangle$

$D_n = \mathcal{D}_n \cap F_n$ .

# Egységek, mint $\Lambda(G)$ -modulusok

Fixáljuk a  $\mu_{p^{n+1}}$  ( $n \geq 0$ ) csoportok valamilyen  $\zeta_n$  generátorait, amelyekre  $\zeta_{n+1}^p = \zeta_n$ . Legyenek  $\pi_n = \zeta_n - 1$ .  $\mathcal{F}_n = \mathbb{Q}(\mu_{p^{n+1}})$ ,  $F_n = \mathcal{F}_n^+$ , továbbá

$\mathcal{D}_n = \mathcal{F}_n$  egészeinek gyűrűjének egységei  $\cap \langle \sigma(\pi_n) \in \mathcal{F}_n^\times : \sigma \in \text{Gal}(\mathcal{F}_n/\mathbb{Q}) \rangle$

$D_n = \mathcal{D}_n \cap F_n$ .

$\mathcal{K}_n = \mathbb{Q}_p(\mu_{p^{n+1}})$ ,  $K_n = \mathcal{K}_n^+$  és egy  $A$  részhalmazuk lezártját a  $p$ -adikus topológiában jelölje  $\bar{A}$ .

# Egységek, mint $\Lambda(G)$ -modulusok

Fixáljuk a  $\mu_{p^{n+1}}$  ( $n \geq 0$ ) csoportok valamilyen  $\zeta_n$  generátorait, amelyekre  $\zeta_{n+1}^p = \zeta_n$ . Legyenek  $\pi_n = \zeta_n - 1$ .  $\mathcal{F}_n = \mathbb{Q}(\mu_{p^{n+1}})$ ,  $F_n = \mathcal{F}_n^+$ , továbbá

$\mathcal{D}_n = \mathcal{F}_n$  egészeinek gyűrűjének egységei  $\cap \langle \sigma(\pi_n) \in \mathcal{F}_n^\times : \sigma \in \text{Gal}(\mathcal{F}_n/\mathbb{Q}) \rangle$

$D_n = \mathcal{D}_n \cap F_n$ .

$\mathcal{K}_n = \mathbb{Q}_p(\mu_{p^{n+1}})$ ,  $K_n = \mathcal{K}_n^+$  és egy  $A$  részhalmazuk lezártját a  $p$ -adikus topológiában jelölje  $\bar{A}$ .

$\mathcal{U}_n = \mathcal{K}_n$  egészeinek gyűrűjének egységei,  $\mathfrak{p}_n = \mathcal{K}_n$  egészeinek gyűrűjének maximális ideálja, továbbá  $U_n = K_n$  egészeinek gyűrűjének egységei.

$U_n^1 = \{x \in U_n \mid x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_n}\}$  és  $Z \leq U_n$  részcsoportha  $Z^1 = Z \cap U_n^1$ .

# Egységek, mint $\Lambda(G)$ -modulusok

Fixáljuk a  $\mu_{p^{n+1}}$  ( $n \geq 0$ ) csoportok valamilyen  $\zeta_n$  generátorait, amelyekre  $\zeta_{n+1}^p = \zeta_n$ . Legyenek  $\pi_n = \zeta_n - 1$ .  $\mathcal{F}_n = \mathbb{Q}(\mu_{p^{n+1}})$ ,  $F_n = \mathcal{F}_n^+$ , továbbá

$\mathcal{D}_n = \mathcal{F}_n$  egészeinek gyűrűjének egységei  $\cap \langle \sigma(\pi_n) \in \mathcal{F}_n^\times : \sigma \in \text{Gal}(\mathcal{F}_n/\mathbb{Q}) \rangle$

$D_n = \mathcal{D}_n \cap F_n$ .

$\mathcal{K}_n = \mathbb{Q}_p(\mu_{p^{n+1}})$ ,  $K_n = \mathcal{K}_n^+$  és egy  $A$  részhalmazuk lezártját a  $p$ -adikus topológiában jelölje  $\bar{A}$ .

$\mathcal{U}_n = \mathcal{K}_n$  egészeinek gyűrűjének egységei,  $\mathfrak{p}_n = \mathcal{K}_n$  egészeinek gyűrűjének maximális ideálja, továbbá  $U_n = K_n$  egészeinek gyűrűjének egységei.

$U_n^1 = \{x \in U_n \mid x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_n}\}$  és  $Z \leq U_n$  részcsoportha  $Z^1 = Z \cap U_n^1$ .

Legyen  $C_n = \bar{D}_n$  és

$$U_\infty^1 = \varprojlim U_n^1, \quad C_\infty^1 = \varprojlim C_n^1$$

$\mathbb{Z}_p$ -modulusok, amiken  $G = \varprojlim \text{Gal}(F_n/\mathbb{Q}) = \varprojlim \text{Gal}(K_n/\mathbb{Q}_p)$  folytonosan hat, így  $\Lambda(G)$ -modulusok.

## Tétel (Iwasawa)

Az  $U_{\infty}^1/C_{\infty}^1$   $\Lambda(G)$ -modulus kanonikusan izomorf a  $\Lambda(G)/I(G)\zeta_p$  modulussal.

## Tétel (Iwasawa)

Az  $U_\infty^1/C_\infty^1$   $\Lambda(G)$ -modulus kanonikusan izomorf a  $\Lambda(G)/I(G)\zeta_p$  modulussal.

Bizonyítás ötletei:

- $0 \longrightarrow T_p(\mu) \longrightarrow U_\infty^1 \longrightarrow \Lambda(G) \longrightarrow T_p(\mu) \longrightarrow 0$  egzakt sorozat, ahol  $T_p(\mu) = \varprojlim \mu_{p^{n+1}}$ ;
- $J = \{1, \iota\}$ -invariánsokat véve egzakt marad:  $\mathcal{L}^1 : U_\infty^1 \simeq \Lambda(G)$ ;
- $C_\infty^1$  ciklikus modulus;
- kiszámolható, hogy  $\mathcal{L}^1(C_\infty^1) = I(G)\zeta_p$ .

# Karakterisztikus ideál

Az  $M$   $\Lambda(G)$ -modulus  $\Lambda(G)$ -torzió, ha minden elemét annullálja egy nem nullosztó eleme  $\Lambda(G)$ -nek.

## Állítás

Legyen  $M$  egy végesen generált torzió  $\Lambda(G)$ -modulus. Létezik  $\Lambda(G)$ -modulusoknak egy

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^h \frac{\Lambda(G)}{\Lambda(G)f_i} \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

egzakt sorozata, ahol  $f_1, \dots, f_h$  nem nullosztók  $\Lambda(G)$ -ben,  $Q$  pedig véges modulus.

# Karakterisztikus ideál

Az  $M$   $\Lambda(G)$ -modulus  $\Lambda(G)$ -torzió, ha minden elemét annihilálja egy nem nullosztó eleme  $\Lambda(G)$ -nek.

## Állítás

Legyen  $M$  egy végesen generált torzió  $\Lambda(G)$ -modulus. Létezik  $\Lambda(G)$ -modulusoknak egy

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^h \frac{\Lambda(G)}{\Lambda(G)f_i} \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

egzakt sorozata, ahol  $f_1, \dots, f_h$  nem nullosztók  $\Lambda(G)$ -ben,  $Q$  pedig véges modulus.

## Definíció

Az  $M$  modulus  $G$ -karakterisztikus ideálja  $\text{ch}_G(M) = f_1 \cdots f_h \Lambda(G)$  főideál  $\Lambda(G)$ -ben.

Legyen  $M_\infty$  a maximális kommutatív  $p$ -bővítése  $F_\infty$ -nek, ami elágazásmentes a  $p$  fölötti egyetlen prímeálon kívül.

$$X_\infty = \text{Gal}(M_\infty/F_\infty)$$

kompakt  $\mathbb{Z}_p$ -modulus ellátható egy  $G$ -hatással:

Legyen  $M_\infty$  a maximális kommutatív  $p$ -bővítése  $F_\infty$ -nek, ami elágazásmentes a  $p$  fölötti egyetlen prímeálon kívül.

$$X_\infty = \text{Gal}(M_\infty/F_\infty)$$

kompakt  $\mathbb{Z}_p$ -modulus ellátható egy  $G$ -hatással:

a  $g \in G$ -hez válasszunk  $\tilde{g} \in \text{Gal}(M_\infty/\mathbb{Q})$  felemeltet (azaz  $\tilde{g}|_{F_\infty} = g$ ) és  $g$  hatása  $x \in X_\infty$ -en legyen

$$g.x = \tilde{g}x\tilde{g}^{-1}.$$

Legyen  $M_\infty$  a maximális kommutatív  $p$ -bővítése  $F_\infty$ -nek, ami elágazásmentes a  $p$  fölötti egyetlen prímeálon kívül.

$$X_\infty = \text{Gal}(M_\infty/F_\infty)$$

kompakt  $\mathbb{Z}_p$ -modulus ellátható egy  $G$ -hatással:

a  $g \in G$ -hez válasszunk  $\tilde{g} \in \text{Gal}(M_\infty/\mathbb{Q})$  felemeltet (azaz  $\tilde{g}|_{F_\infty} = g$ ) és  $g$  hatása  $x \in X_\infty$ -en legyen

$$g.x = \tilde{g}x\tilde{g}^{-1}.$$

Tétel (Fő sejtés)

$$\text{ch}_G(X_\infty) = I(G)\zeta_p$$

# Kapcsolat az Iwasawa tétellel

Legyen  $L_\infty$  a maximális kommutatív  $p$ -bővítése  $F_\infty$ -nek, ami elágazásmentes mindenhol.

$$Y_\infty = \text{Gal}(L_\infty/F_\infty)$$

szintén  $\Lambda(G)$ -modulus.

Legyen  $V_n$  az  $F_n$  egészeinek gyűrűjének egységei,  $E_n = \overline{V_n}$ ,  $E_\infty^1 = \varprojlim E_n^1$ .

# Kapcsolat az Iwasawa tétellel

Legyen  $L_\infty$  a maximális kommutatív  $p$ -bővítése  $F_\infty$ -nek, ami elágazásmentes mindenhol.

$$Y_\infty = \text{Gal}(L_\infty/F_\infty)$$

szintén  $\Lambda(G)$ -modulus.

Legyen  $V_n$  az  $F_n$  egészeinek gyűrűjének egységei,  $E_n = \overline{V_n}$ ,  $E_\infty^1 = \varprojlim E_n^1$ .  
Fundamentális egzakt sorozat:

$$0 \longrightarrow E_\infty^1/C_\infty^1 \longrightarrow U_\infty^1/C_\infty^1 \longrightarrow X_\infty \longrightarrow Y_\infty \longrightarrow 0.$$

A karakterisztikus ideál multiplikatív: ha

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

egzakt sorozat, akkor  $\text{ch}_G(M_2) = \text{ch}_G(M_1)\text{ch}_G(M_3)$ .

Iwasawa tétele miatt  $\text{ch}_G(U_\infty^1/C_\infty^1) = I(G)\zeta_p$ , tehát a fő sejtés ekvivalens  $\text{ch}_G(E_\infty^1/C_\infty^1) = \text{ch}_G(Y_\infty)$ -vel.

# Euler rendszerek motivációja

Legyen  $r \geq 2$ ,  $a_1, \dots, a_r$  nemnulla és  $n_1, \dots, n_r$  egész számok, melyekre  $\sum_{j=1}^r n_j = 0$ . Legyen

$$\alpha(T) = \prod_{j=1}^r (T^{-a_j/2} - T^{a_j/2})^{n_j}$$

hatványsor a  $T^{1/2}$  változóban. Legyen  $S$  az  $a_1, \dots, a_r$  számok prímosztóinak a halmaza a 2-vel együtt.

$$W_S = \{\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}^\times \mid \zeta^m = 1 \text{ valamilyen } m \geq 1 \text{ egészre, amire } (m, S) = 1\}$$

Mivel  $S$  tartalmazza a 2-t, ezért  $W_S$  minden elemének egyértelműen létezik négyzetgyöke. Legyen

$$\phi_\alpha : W_S \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times, \quad \phi_\alpha(\zeta) = \alpha(\zeta), \text{ ha } \zeta \neq 1, \quad \phi_\alpha(1) = \prod_{j=1}^r a_j^{n_j}.$$

## Lemma

Minden  $\zeta \in W_S$  egységgyökre

- (i) teljesül  $\phi_\alpha(\zeta^{-1}) = \phi_\alpha(\zeta)$  és  $\phi_\alpha(\zeta^\sigma) = \phi_\alpha(\zeta)^\sigma$  minden  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -ra;
- (ii) ha  $q$  prím nincs  $S$ -ben, akkor

$$\prod_{\rho \in \mu_q} \phi_\alpha(\rho\zeta) = \phi_\alpha(\zeta^q);$$

- (iii) ha  $q$  prím nincs  $S$ -ben és  $\zeta$  rendje relatív prím  $q$ -hoz, akkor

$$\phi_\alpha(\rho\zeta) \equiv \phi_\alpha(\zeta) \pmod{q}$$

minden  $\rho \in \mu_q$ -ra és minden  $q$  fölötti  $q$  prímre.

Legyen  $2 \in S$  prímek halmaza. Azt mondjuk, hogy  $\phi : W_S \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}^\times$  Euler rendszer, ha teljesül (i), (ii), (iii).



J. Coates and R. Sujatha.

*Cyclotomic Fields and Zeta Values.*

Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg,  
2006.