

Ultraszorzatok és magasabbrendű formulák

Kola László
Témavezető: Sági Gábor

ELTE
Természettudományi Kar
Matematikus Msc

Σ_1^1 formulák megőrzése

Σ_1^1 formula: $\exists R_0 \dots \exists R_{n-1} \psi$ alakú másodrendű formula, ahol R_0, \dots, R_{n-1} relációváltozók és ψ elsőrendű formula.

Tétel

$\varphi \in \Sigma_1^1$ majdnem minden \mathcal{A}_i ($i \in I$) struktúrában igaz $\Rightarrow \varphi$ igaz az $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i / \mathcal{F}$ ultraszorzatban.

Bizonyítás.

Legyen $J := \{i \in I : \mathcal{A}_i \models \varphi\}$.

$\forall j \in J : \exists R_0^j, \dots, R_{n-1}^j \subseteq A_j^m : \langle \mathcal{A}_j, R_0^j, \dots, R_{n-1}^j \rangle \models \varphi$.

$\mathcal{B}_j := \langle \mathcal{A}_j, R_0^j, \dots, R_{n-1}^j \rangle$ ($j \in J$) és $\mathcal{B}_i := \mathcal{A}_i$ ($i \in I \setminus J$).

A Łoś-lemma alapján $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i / \mathcal{F} \models \psi$, így φ igaz a megfelelő ultraszorzatban. □

Σ_1^1 formulák megőrzése

A másik irány nem ennyire nyilvánvaló, és általában nem igaz. Erre mutatunk egy példát.

$\forall n \in \omega$: legyen $A_n : |A_n| = n$. Legyen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ nemfő ultraszűrő.

Legyen $\varphi := (\exists f)(f \text{ injektív, de nem szürjektív függvény})$.

Legyen $\psi_k := (|\text{alaphalmaz}| \geq k) \ (k \in \omega)$. Egyrészt

$$\text{Łoś-lemma} \Rightarrow \prod_{n \in \omega} \mathcal{A}_n / \mathcal{F} \text{ végtelen struktúra} \Rightarrow \prod_{n \in \omega} \mathcal{A}_n / \mathcal{F} \models \varphi.$$

Másrészt,

$$|A_n| < \omega \Rightarrow \{n \in \omega : \mathcal{A}_n \models \varphi\} = \emptyset \notin \mathcal{F}.$$

A másik irány vizsgálatához [1]-ben bevezették az ultratopológiák fogalmát.

Definíció

Legyen $\mathcal{A} = \prod_{i \in I} A_i / \mathcal{F}$ egy ultraszorzat. Egy $R \subseteq A^k$ reláció felbontható \mathcal{A} -ban, ha

$$\forall i \in I : \exists R_i \subseteq (A_i)^k : \langle \mathcal{A}, R \rangle = \left(\prod_{i \in I} \langle A_i, R_i \rangle \right) / \mathcal{F}.$$

Definíció

Legyen $a = (a_0, a_1, \dots, a_{k-1}) \in A^k$.

Az a reprezentánsa $\hat{a} = (a'_0, a'_1, \dots, a'_{k-1}) \in (\prod_{i \in I} A_i)^k$, ha $a_0 = a'_0/\mathcal{F}, a_1 = a'_1/\mathcal{F}, \dots, a_{k-1} = a'_{k-1}/\mathcal{F}$.

$\hat{\cdot} : A^k \rightarrow (\prod_{i \in I} A_i)^k$ egy k -választási függvény, ha $\forall a \in A^k : \hat{a}$ éppen az a egy reprezentánsa.

Definíció

Legyen $\hat{\cdot}$ egy k -választási függvény, és $R \subseteq A^k$ reláció. R zárt (a választási függvényre nézve), ha

$$(\forall a \in A^k)(\{i \in I : (\exists b \in R)\hat{a}(i) = \hat{b}(i)\} \in \mathcal{F} \Rightarrow a \in R).$$

Lemma ([1], 3.4 Lemma)

Legyen $\hat{\cdot}$ egy k -választási függvény. Legyen

$$\mathcal{C} := \{R \subseteq A^k : R \text{ zárt}\}.$$

\mathcal{C} zárt véges unióképzésre és tetszőleges metszetképzésre.

Definíció

Legyen $T = \langle A^k, \mathcal{C} \rangle$ egy \mathcal{A} ultraszorzat feletti topologikus tér, ahol \mathcal{C} éppen a T összes zárt részhalmazainak családja.

\mathcal{C} egy k -dimenziós ultratopológia, ha $\exists \wedge$ k -választási függvény: \mathcal{C} az összes zárt k -változós relációk halmaza.

Definíció

Legyen T egy topologikus tér, $R \subseteq T$.

R nyílt-zárt, ha egyszerre nyílt és zárt T -ben.

Tétel ([1], 3.8 Theorem)

$R \subseteq A^k$ reláció felbontható $\iff \exists \mathcal{C}$ ultratopológia A^k -n: R nyílt-zárt $\langle A^k, \mathcal{C} \rangle$ -ben.

Tétel ([1], 3.11 Theorem)

Legyen $\varphi \equiv \exists R_0 \dots \exists R_{n-1} \psi$. A következők ekvivalensek:

- 1 $\{i \in I : \mathcal{A}_i \models \varphi\} \in \mathcal{F}$.
- 2 $\exists \mathcal{C}$ ultratopológia az $\mathcal{A} = \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i / \mathcal{F}$ ultraszorzonon:
 $\exists R_0^{\mathcal{A}}, \dots, R_{n-1}^{\mathcal{A}}$ nyílt-zárt relációk $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle$ -ben:
 $\langle \mathcal{A}, R_0^{\mathcal{A}}, \dots, R_{n-1}^{\mathcal{A}} \rangle \models \psi$.

Jelölés: $f : A \rightarrow B$ függvény, $k \in \omega$ és $U \subseteq A^k$. Legyen

$$f^*(U) := \{(f(u_0), \dots, f(u_{k-1})) : (u_0, \dots, u_{k-1}) \in U\}.$$

Definíció

Legyenek \mathcal{A}_0 és \mathcal{B}_0 ugyanazon nyelv modelljei.

\mathcal{B}_0 inszeperábilis \mathcal{A}_0 -tól, ha

$\forall k \in \omega, \forall R_0, \dots, R_{n-1} \subseteq A_0^k : \exists \mathcal{A} = \langle \mathcal{A}_0 / \mathcal{F}, \mathcal{B} = \langle \mathcal{B}_0 / \mathcal{G}, \exists \tau_{\mathcal{A}}, \tau_{\mathcal{B}}$
ultratopológiák, $\exists f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ izomorfizmus:

$f^*(\langle R_0 / \mathcal{F} \rangle), \dots, f^*(\langle R_{n-1} / \mathcal{F} \rangle)$ nyílt-zártak $\tau_{\mathcal{B}}$ -ben.

\mathcal{A}_0 és \mathcal{B}_0 egymástól inszeperábilisek, ha \mathcal{A}_0 inszeperábilis \mathcal{B}_0 -tól, és \mathcal{B}_0 inszeperábilis \mathcal{A}_0 -tól.

Definíció

- $\mathcal{A} \leq_{\Sigma_1^1} \mathcal{B}$, ha $TH_{\Sigma_1^1}(\mathcal{A}) \subseteq TH_{\Sigma_1^1}(\mathcal{B})$.
- $\mathcal{A} \cong_{\Sigma_1^1} \mathcal{B}$, ha $TH_{\Sigma_1^1}(\mathcal{A}) = TH_{\Sigma_1^1}(\mathcal{B})$.

Tétel ([1], 4.4 Theorem)

Legyenek \mathcal{A} és \mathcal{B} ugyanazon nyelvek modelljei. A következők ekvivalensek:

- 1 $\mathcal{A} \leq_{\Sigma_1^1} \mathcal{B}$.
- 2 \mathcal{B} inszeperábilis \mathcal{A} -tól.

Következmény ([1], 4.5 Corollary)

Legyenek \mathcal{A} és \mathcal{B} ugyanazon nyelvek modelljei.

$\mathcal{A} \equiv_{\Sigma_1^1} \mathcal{B} \iff \mathcal{A}$ és \mathcal{B} inszeperábilisek egymástól.

Tétel

Legyenek \mathcal{A} és \mathcal{B} ugyanazon nyelv modelljei. A következők ekvivalensek:

- 1 \mathcal{A} és \mathcal{B} egymástól inszeparábilisek.
- 2 Legyen $k \in \omega$. Ekkor $\exists J$ indexhalmaz, $\exists \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(J)$ ultraszűrő, $\exists \tau_{\mathcal{A}}, \tau_{\mathcal{B}}$ ultratopológiák, $\exists g : {}^J \mathcal{A} / \mathcal{F} \rightarrow {}^J \mathcal{B} / \mathcal{F}$ izomorfizmus:
 $\forall n \in \omega : \forall R_0, \dots, R_{n-1} \subseteq A^k : g^*(\uparrow R_0 / \mathcal{F}), \dots, g^*(\uparrow R_{n-1} / \mathcal{F})$
nyílt-zártak $\tau_{\mathcal{B}}$ -ben. Itt \mathcal{A} és \mathcal{B} szerepe megcserélhető.
- 3 $\mathcal{A} \equiv_{\Sigma_1^1} \mathcal{B}$.
- 4 $\mathcal{A} \equiv_{SO} \mathcal{B}$.



Az $1 \iff 3$ bizonyított.

A $2 \Rightarrow 1$ irány triviális.

Ha $1 \Rightarrow 2$ irány bizonyított, akkor $1 \iff 2 \iff 3$ igaz.

A $4 \Rightarrow 3$ irány triviális.

Ha $(1 \iff 2 \iff 3) \Rightarrow 4$ bizonyított, akkor igaz a tétel.

-  Sági, G., *Ultraproducts and higher order formulas*, *MATHEMATICAL LOGIC QUARTERLY* **48:2**, pp. 261-275, (2002)
-  Sági, G. and Gerlits, J., *Ultratopologies*, *MATHEMATICAL LOGIC QUARTERLY* **50:6**, pp. 603-612, (2004)