Ultraszorzatok és magasabbrendű formulák

Kola László
tv.: Sági Gábor

1. Bevezetés

Legyen $\langle \mathcal{A}_i : i \in I \rangle$ azonos nyelvű elsőrendű struktúrák egy rendszere és legyen $\mathcal{F}$ egy ultraszűrő I felett. Az $\langle \mathcal{A}_i : i \in I \rangle$ struktúrák $\mathcal{F}$ szerinti ultraszorzatát úgy kapjuk, hogy direktszorzatukban azonosítjuk azokat az elemeket, melyeknek $\mathcal{F}$-majdnem minden koordinátája egybeesik. Ez a konstrukció központi szerepet játszik az elsőrendű logika modellelméletében, mert meglehetősen precízen kontrollálható, hogy az $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ struktúrák mely elsőrendű tulajdonságai öröklődnek az ultraszorzataikra: az $\mathcal{F}$ szerinti ultraszorzatukban pontosan azok az elsőrendű formulák lesznek igazak, melyek $\mathcal{F}$-majdnem minden $\mathcal{A}_i$-ben igazak voltak.

Természetesen merül fel a kérdés, hogy milyen hasonló megőrzési tételek érvényesek a magasabbrendű formulákkal kapcsolatban. A kurzus során [1] és [2] feldolgozásával ezt a problémakört tanulmányoztam én is. Az előbbi cikkekben adott válaszok azon alapulnak, hogy az ultraszorzatokon természetes módon be lehet vezetni bizonyos topológiákat, és a megőrzési tételek e topológiák segítségével fogalmazhatók meg. Ebben az beszámolóban [1]-et és [2]-t követve összefoglalom a szükséges definíciókat, és a rájuk vonatkozó főbb (korábban ismert) eredményeket. Végül, az utolsó fejezetben - témavezetőm korábban publikálatlan ötletét közösen kidolgozva - e topológiai indíttatású fogalmi keretek között megadjuk, hogy két struktúrában mikor teljesülnek pontosan ugyanazok a másodrendű formulák.

A magasabbrendű formulák közül a legegyszerűbbek a másodrendű egzisztenciális formulák (röviden Σ^1_1-formulák); ezek a következő alakúak: $\exists R_0 ... \exists R_{n-1} \psi$, ahol $R_0, ..., R_{n-1}$ relációváltozók és ψ egy elsőrendű formula. Ha φ egy Σ^1_1 formula, akkor ezt úgy is jelöljük, hogy $\varphi \in \Sigma^1_1$. A megőrzés egyik iránya azonnal következik:

1. Állítás. *Ha $\varphi \in \Sigma^1_1$ olyan, amely majdnem minden $\mathcal{A}_i$ $(i \in I)$ struktúrában igaz, akkor φ igaz az $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i / \mathcal{F}$ ultraszorzatban.*

Bizonyítás. Legyen $J := \{i \in I : \mathcal{A}_i \models \varphi\}$. Minden egyes $j \in J$-hez létezik olyan $R^j_0, ..., R^j_{n-1} \subseteq A^m_j$ relációváltozók, hogy $\langle A_i, R^j_0, ..., R^j_{n-1} \rangle \models \varphi$. Most legyen $j \in J$ esetén $\mathcal{B}_j := \langle A_i, R^j_0, ..., R^j_{n-1} \rangle$ és $i \in I \setminus J$ esetén legyen $\mathcal{B}_i := \mathcal{A}_i$. Ekkor a Łoś-lemma alapján

$$\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i / \mathcal{F} \models \psi$$

így φ igaz a megfelelő ultraszorzatban. □

A másik irány nem ennyire nyilvánvaló, és általában nem igaz. Erre mutatunk egy példát. Minden egyes $n \in \omega$ esetén A_n legyen egy olyan halmaz, hogy $|A_n| = n$. Legyen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ egy nemfő ultraszűrő. Legyen $\varphi \in \Sigma^1_1$ az a formula, hogy "van injektív, de nem szürjektív függvény". Ekkor minden egyes $k \in \omega$ esetén létezik egy olyan elsőrendű formula, amely azt fejezi ki, hogy az alaphalmaznak legalább k darab eleme van. A Łoś-lemma miatt $\prod_{n \in \omega} A_n / \mathcal{F}$ végtelen struktúra, tehát φ igaz benne. Másrészt, mivel minden A_n halmaz véges, ezért

$$\{n \in \omega : A_n \models \varphi\} = \emptyset \notin \mathcal{F}$$

A másik irány vizsgálatához [1]-ben bevezették az ultratopológiák fogalmát. Alább ezt, és az [1]-ben kidolgozott kapcsolódó fogalmakat és eredményeket ismertetjük.

2. Ultratopológiák

Ebben a fejezetben I egy halmazt, $\mathcal{F}$ egy I feletti ultraszűrőt jelöl, továbbá az $\mathcal{A}_i$ $(i \in I)$ struktúrák mindig ugyanannak az előre rögzített nyelvnek modelljei.

1. Definíció. Legyen $A = \prod_{i\in I} A_i/\mathcal{F}$ egy ultraszorzat. Egy $R \subseteq A^k$ reláció felbontható A-ban, ha minden egyes $i \in I$-hez létezik egy olyan $R_i \subseteq (A_i)^k$ reláció, hogy $\langle \mathcal{A}, R\rangle = \left(\prod_{i\in I}\langle \mathcal{A}_i, R_i\rangle\right)/\mathcal{F}$. Ebben az esetben azt is mondjuk, hogy $\langle R_i, i \in I\rangle$ R-nek a dekompozíciója.

2. Definíció. Legyen $a = (a_0, a_1, ..., a_{k-1}) \in A^k$. Azt mondjuk, hogy $\widehat{a} = (a'_0, a'_1, ..., a'_{k-1}) \in \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^k$ a-nak egy reprezentánsa, ha $a_0 = a'_0/\mathcal{F}, a_1 = a'_1/\mathcal{F}, ..., a_{k-1} = a'_{k-1}/\mathcal{F}$. Egy k-választási függvényen egy olyan $\hat{}: A^k \to \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^k$ függvényt értünk, hogy minden $a \in A^k$ esetén $\widehat{a}$ éppen az a egy reprezentánsa. Továbbá $h/\mathcal{F}$ jelöli a $(h_0/\mathcal{F}, h_1/\mathcal{F}, ..., h_{k-1}/\mathcal{F}) \in \left(\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i/\mathcal{F}\right)^k$ relációt.

Az 1-választási függvény a-hoz az $\widehat{a}$ reprezentánst rendeli. A 2-választási függvény is ugyanezt csinálja, viszont fontos kiemelni, hogy a választási függvény nem feltétlenül koordinátánként hat. Azaz, ha $a \neq b$, akkor $\widehat{a}$ és $\widehat{b}$ ugyanazon koordinátái lehet, hogy nem egyenlőek.

3. Definíció. Legyen $\hat{}$ egy k-választási függvény, és $R \subseteq A^k$ reláció. R zárt az adott választási függvényre, ha

$$(\forall a \in A^k)(\{i \in I : (\exists b \in R)\widehat{a}(i) = \widehat{b}(i)\} \in \mathcal{F} \Rightarrow a \in R)$$

Ha a választási függvény a szövegkörnyezetből kiderül, akkor csupán annyit mondunk, hogy R zárt.

Legyen $\hat{}$ egy k-választási függvény egy $\mathcal{A}$ ultraszorzaton. Ekkor egy $a \in A^k$ pontot pontosan akkor tekinthetjük egy $R \subseteq A^k$ részhalmaz torlódási pontjának, ha "a majdnem mindenütt egybeesik R-nek egy megfelelő elemével". Tehát a 3. Definícióban követtük azt az intuíciót, hogy egy zárt halmaznak minden torlódási pont eleme, amely megalapozza a definíció helyességét. Az alábbi lemma elmondja, hogy a zárt relációk valóban egy topológiát alkotnak.

1. Lemma ([1], 3.4 Lemma). *Legyen $\hat{}$ egy k-választási függvény. Legyen $\mathcal{C} := \{R \subseteq A^k : R \text{ zárt}\}$. Ekkor $\mathcal{C}$ zárt véges unióképzésre és tetszőleges metszetképzésre.*

4. Definíció. Legyen $T = \langle A^k, \mathcal{C}\rangle$ egy $\mathcal{A}$ ultraszorzat feletti topologikus tér, ahol $\mathcal{C}$ éppen a T összes zárt részhalmazainak családja. Ekkor $\mathcal{C}$ pontosan akkor egy k-dimenziós ultratopológia, ha létezik egy olyan $\hat{}$ k-választási függvény, hogy $\mathcal{C}$ éppen az összes zárt k-változós relációk halmaza.

5. Definíció. Ha T egy topologikus tér, R T-nek a részhalmaza, akkor azt mondjuk, hogy R nyílt-zárt, ha egyszerre nyílt és zárt T-ben.

Most karakterizáljuk a felbontható relációkat az ultratopológiákkal.

1. Tétel ([1], 3.8 Theorem). *Egy $R \subseteq A^k$ k-változós reláció pontosan akkor felbontható, ha létezik egy olyan $\mathcal{C}$ ultratopológia A^k-n, hogy R nyílt-zárt $\langle A^k, \mathcal{C}\rangle$-ben.*

Az ultratopológiák és felbontható relációk segítségével jellemezni lehet, hogy az ultraszorzatok mikor őrzik meg teljesen egy Σ^1_1-formula igazságát.

2. Tétel ([1], 3.11 Theorem)**.** *Legyen $\varphi \equiv \exists R_0 ... \exists R_{n-1}\psi$ egy Σ^1_1 formula. Ekkor a következők ekvivalensek:*

1. $\{i \in I : \mathcal{A}_i \models \varphi\} \in \mathcal{F}$
2. *Létezik egy olyan $\mathcal{C}$ ultratopológia az $\mathcal{A} = \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i/\mathcal{F}$ ultraszorzaton, hogy léteznek olyan nyílt-zárt $R_0^{\mathcal{A}}, ..., R_{n-1}^{\mathcal{A}}$ relációk $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C}\rangle$-ben, hogy $\langle \mathcal{A}, R_0^{\mathcal{A}}, ..., R_{n-1}^{\mathcal{A}}\rangle \models \psi$.*

Vezessük be a következő jelölést: legyen $f : A \to B$ függvény, $k \in \omega$ és $U \subseteq A^k$. Legyen

$$f^*(U) := \{(f(u_0), ..., f(u_{k-1})) : (u_0, ..., u_{k-1}) \in U\}$$

6. Definíció. Legyenek $\mathcal{A}_0$ és $\mathcal{B}_0$ ugyanazon nyelv modelljei. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{B}_0$ inszeparábilis $\mathcal{A}_0$-tól, ha minden $k \in \omega$ esetén és minden véges sok k-változós $R_0, ..., R_{n-1} \subseteq {}^k A_0$ relációkhoz léteznek olyan $\mathcal{A} = {}^I\mathcal{A}_0/\mathcal{F}$ és $\mathcal{B} = {}^I\mathcal{B}_0/\mathcal{G}$ ultrahatványok, $\tau_{\mathcal{A}}, \tau_{\mathcal{B}}$ ultratopológiák és $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ izomorfizmus, hogy $f^*({}^I R_0/\mathcal{F}), ..., f^*({}^I R_{n-1}/\mathcal{F})$ zárt-nyíltak $\tau_{\mathcal{B}}$-ben. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}_0$ és $\mathcal{B}_0$ egymástól inszeparábilisek, ha $\mathcal{A}_0$ inszeparábilis $\mathcal{B}_0$-tól, és $\mathcal{B}_0$ inszeparábilis $\mathcal{A}_0$-tól.

Az inszeparabilitás segítségével jellemezhető, hogy két struktúrában mikor igazak ugyanazok a formulák. Ehhez bevezetjük a következő definíciókat:

7. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ egy L nyelv modellje. Ekkor $\mathcal{A}$ Σ^1_1-elméletét úgy definiáljuk, hogy

$$TH_{\Sigma^1_1}(\mathcal{A}) := \{\varphi \in Fm_{\Sigma^1_1}(L) : \mathcal{A} \models \varphi\}$$

ahol $Fm_{\Sigma^1_1}(L)$ jelöli az L nyelv Σ^1_1-formuláinak halmazát.

8. Definíció. Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ ugyanazon nyelvek modelljei. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ Σ^1_1-kisebb, mint $\mathcal{B}$, ha $TH_{\Sigma^1_1}(\mathcal{A}) \subseteq TH_{\Sigma^1_1}(\mathcal{B})$. Jelben: $\mathcal{A} \leq_{\Sigma^1_1} \mathcal{B}$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ Σ^1_1-ekvivalensek, ha $TH_{\Sigma^1_1}(\mathcal{A}) = TH_{\Sigma^1_1}(\mathcal{B})$. Jelben: $\mathcal{A} \equiv_{\Sigma^1_1} \mathcal{B}$.

3. Tétel ([1], 4.4 Theorem)**.** *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ ugyanazon nyelvek modelljei. Ekkor a következők ekvivalensek:*

1. *$\mathcal{B}$ inszeparábilis $\mathcal{A}$-tól*
2. $\mathcal{A} \leq_{\Sigma^1_1} \mathcal{B}$

1. Következmény ([1], 4.5 Corollary)**.** *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ ugyanazon nyelvek modelljei. Ekkor $\mathcal{A} \equiv_{\Sigma^1_1} \mathcal{B}$ pontosan akkor, ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ inszeparábilisek egymástól.*

3. Főeredmény

Az alábbiakban módszerünket Σ^1_1-formulákról kiterjesztjük tetszőleges másodrendű formulákra. Ez az eredmény korábban nem jelent meg sehol, a kurzus keretében témavezetőm ötletét dolgoztam ki.

4. Tétel. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ ugyanazon nyelv modelljei. Ekkor a következők ekvivalensek:*

1. *$\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ egymástól inszeparábilisek.*

2. *Rögzített $k \in \omega$ esetén létezik olyan J indexhalmaz, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(J)$ ultraszűrő, $\tau_\mathcal{A}, \tau_\mathcal{B}$ ultratopológiák és $g : {}^J\mathcal{A}/\mathcal{G} \to {}^J\mathcal{B}/\mathcal{G}$ izomorfizmus, hogy minden $n \in \omega$-re és $R_0, ..., R_{n-1} \subseteq {}^kA$ relációk esetén $g^*({}^IR_0/\mathcal{G}), ..., g^*({}^IR_{n-1}/\mathcal{G})$ zárt-nyíltak $\tau_\mathcal{B}$-ben. Itt $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ szerepe megcserélhető.*

3. *$\mathcal{A} \equiv_{\Sigma^1_1} \mathcal{B}$*

4. *$\mathcal{A} \equiv_{SO} \mathcal{B}$, azaz tetszőleges másodrendű φ formulára $\mathcal{A} \models \varphi$ ACSA $\mathcal{B} \models \varphi$.*

Bizonyítás.

1. $\to$ 2. : Legyen $k \in \omega$ rögzített és legyen

$$J := \{\{R_0, ..., R_{n-1}, S_0, ..., S_{m-1}\} | n, m \in \omega, \forall i < n : R_i \subseteq {}^kA, \forall j < m : S_j \subseteq {}^kB\}.$$

A feltétel szerint minden $S \in J$-hez létezik I_S indexhalmaz, $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{P}(I_S)$ ultraszűrő, $\tau_{\mathcal{A},S}, \tau_{\mathcal{B},S}$ ultratopológiák és $f_S : {}^{I_S}\mathcal{A}/\mathcal{F_S} \to {}^{I_S}\mathcal{B}/\mathcal{F_S}$ izomorfizmus, hogy $f^*_S({}^{I_S}R_0/\mathcal{F_S}), ...,$ $f^*_S({}^{I_S}R_{n-1}/\mathcal{F_S})$ zárt-nyíltak $\tau_{\mathcal{B},S}$-ben. Legyen $S \in J$ esetén $\widehat{S} := \{Z \in J : S \subseteq Z\}$. Mivel ha $S_0, ..., S_{m-1} \in J$, akkor $\widehat{S}_0 \cap ... \cap \widehat{S}_{m-1} \ni \{S_0, ..., S_{m-1}\}$, ezért $\{\widehat{S} : S \in J\}$ egy véges metszet tulajdonságú halmazrendszer, így kiterjeszthető egy $\mathcal{F}$ ultraszűrővé. Legyen a $\mathcal{G}$ ultraszűrő az $\mathcal{F}_S$ ultraszűrők szorzataként definiálva a $\bigcup_{S \in J} I_S$ halmazon:

$$X \in \mathcal{G} \overset{d}{\iff} \{S \in J : \{Y \in I_S : (S, Y) \in X\} \in \mathcal{F}_S\} \in \mathcal{F}$$

Legyen $\widehat{a} \in {}^J\mathcal{A}$. Ekkor $\widehat{a}$ felírható úgy, hogy $(\widehat{a}_0, \widehat{a}_1, ...)$, ahol $\widehat{a}_i \in {}^{J_{S_i}}\mathcal{A}$. Így $f : {}^J\mathcal{A}/\mathcal{G} \to {}^J\mathcal{B}/\mathcal{G}, f(a) := (f_{S_0}(a_0), f_{S_1}(a_1), ...)$ egy izomorfizmus.

2. $\to$ 1. : Nyilvánvaló.

1. $\leftrightarrow$ 3. : Ez az ekvivalencia azonos az 1. Következménnyel.

2. $\to$ 4. : Legyen φ egy másodrendű formula, amelynek alakja

$$\varphi \equiv (Q_0R_0)(Q_1R_1)...(Q_{n-1}R_{n-1})\psi$$

ahol mindegyik Q_i vagy egy másodrendű egzisztenciális vagy egy másodrendű univerzális kvantor, R_i-k másodrendű relációváltozók és ψ egy elsőrendű formula. A kvantorok száma szerinti indukciót alkalmazunk.

Ha a kvantorok száma legfeljebb 1, akkor készen vagyunk, hiszen megmutattuk, hogy az első 3 állítás ekvivalens.

Tegyük fel, hogy

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad ACSA \quad \mathcal{B} \models \varphi$$

teljesül n darab kvantor esetén. Legyen

$$\varphi' \equiv (Q_1 R_1)...(Q_{n-1} R_{n-1})(Q_n R_n)\psi$$

és $\varphi \equiv \exists R_0 \varphi'$. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \models \varphi$. Ekkor létezik egy olyan R_A reláció A-n, hogy $\langle \mathcal{A}, R_A \rangle \models \varphi'$. Továbbá az 1. és 2. állítások ekvivalenciája alapján létezik olyan R_B reláció B-n, hogy $\langle \mathcal{A}, R_A \rangle$ és $\langle \mathcal{B}, R_B \rangle$ inszeperábilisek egymástól. Tehát az indukció alapján $\langle \mathcal{B}, R_B \rangle \models \varphi'$, így $\mathcal{B} \models \varphi$. Hasonlóan bizonyítható az is, hogy ha $\mathcal{B} \models \varphi$, akkor $\mathcal{A} \models \varphi$ a szimmetria miatt.

Most legyen $\varphi \equiv \forall R_0 \varphi'$ és φ', mint az előbb. Ugyanúgy, elég azt bizonyítani, hogy ha $\mathcal{A} \models \varphi$, akkor $\mathcal{B} \models \varphi$. Indirekten tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \models \varphi$ és $\mathcal{B} \not\models \varphi$ egyszerre teljesül. Ekkor $\mathcal{B} \models \neg\varphi$ teljesül. Viszont $\neg\varphi \equiv \exists R_0 \neg\varphi'$, így az előző szakasz alapján $\mathcal{A} \models \exists R_0 \neg\varphi'$, azaz $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ teljesül, ami ellentmondás.

Ezzel befejeztük az indukciót.

4. $\rightarrow$ 3. : Triviális.

$\square$

4. Irodalomjegyzék

Hivatkozások

[1] Sági, G., *Ultraproducts and higher order formulas*, *MATHEMATICAL LOGIC QUARTERLY* **48:2**, pp. 261-275, (2002)

[2] Sági, G. and Gerlits, J., *Ultratopologies*, *MATHEMATICAL LOGIC QUARTERLY* **50:6**, pp. 603-612, (2004)