

# Csomók $p$ -színezhetősége

Györffi Ádám György - Egyéni kutatómunka 1.

Témavezető: Földvári Viktória

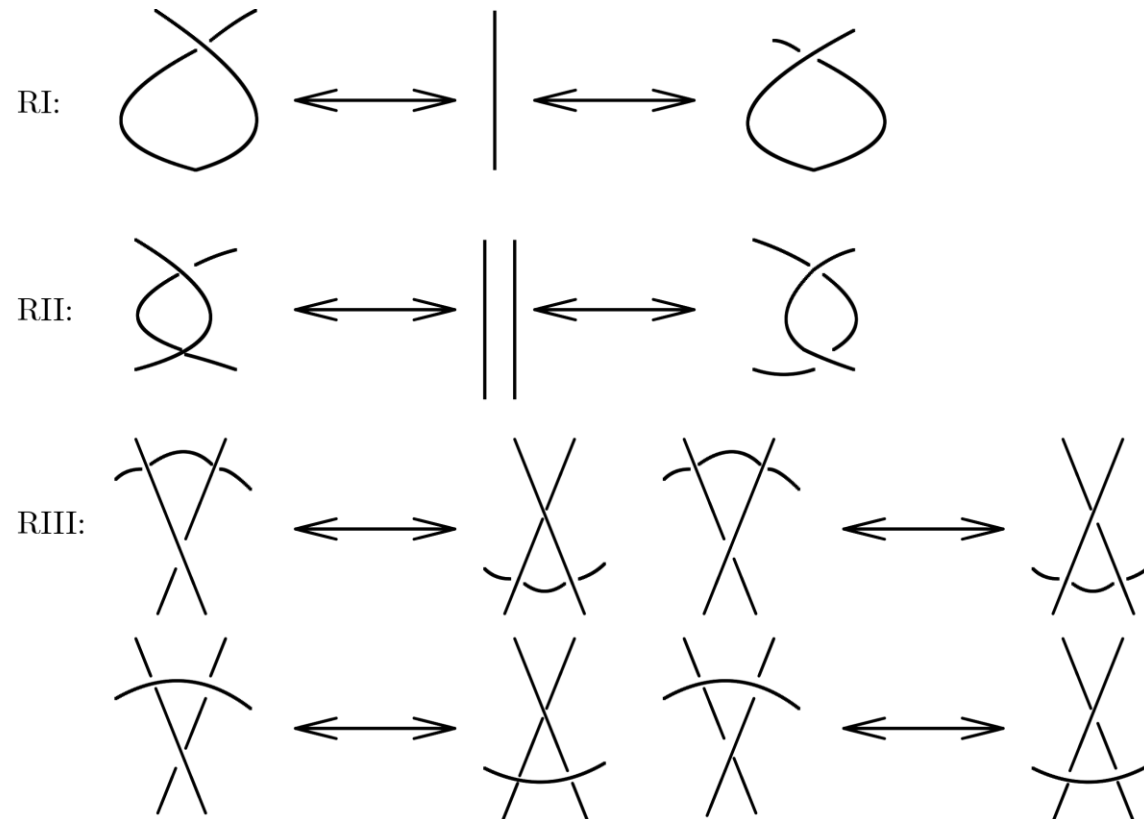
# Csomók, csomódiagramok

- ▶ Csomó:  $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  beágyazás.
- ▶ Csomók izotópiája:  $K_1$  és  $K_2$  izotópok, ha létezik olyan  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  homeomorfizmus, ami egymásba viszi őket.
- ▶ Csomódiagram: a csomó vetítése  $\mathbb{R}^2$ -re, keresztezésekénél jelöljük, hogy melyik szál megy felül.
- ▶ Lánc: egymást nem metsző csomók véges családja.
  - ▶ Izotópia, diagram hasonlóan.



# Reidemeister-mozgások

- ▶ Reidemeister-tétel: két diagram pontosan akkor reprezentál izotóp csomókat, ha azok Reidemeister-mozgásokkal egymásba vihetőek.
- ▶ Reidemeister-mozgások:



# $p$ -színezhetőség

- ▶  $p$ -színezés: a csomódiagram íveinek számozása  $\{0; \dots; p - 1\}$ -gyel úgy, hogy a keresztezésekénél  $2x \equiv x + y \pmod{p}$ . Triviális, ha minden ív ugyanolyan színű.
- ▶ Csomóinvariáns
- ▶ A csomó determinánsa meghatározza a csomóról, hogy  $p$ -színezhető-e.
- ▶ Speciális eset: háromszínezhetőség
- ▶ A felhasznált színek minimális száma (alkalmas diagramot nézve):  $C_p(K)$

# Ismert becslések $C_p(K)$ -ra

- ▶ Alsó becslés:  $C_p(K) \geq \lfloor \log_2 p \rfloor + 2$
- ▶ Ez  $p = 19$ -ig éles:

$p$	3	5	7	11	13	17	19
$C_p(K)$	3	4	4	5	5	6	6

- ▶ Felső becslés:  $C_p(K) \leq p - 3$
- ▶ Sejtés: Ha egy  $\text{mod } p$  maradékrendszerben minden maradékosztály előáll két másik összegeként, akkor ezen színekkel  $p$ -színezhető tetszőleges  $p$ -színezhető csomó alkalmas diagramja.
  - ▶ Az eddig ismertekre  $p = 17$  kivételével biztosan igaz.
  - ▶ Erős felső becsléseket adna.

# A felső becslések bizonyításainak módszere

- Részlet a 7-színezésre vonatkozó bizonyításból:

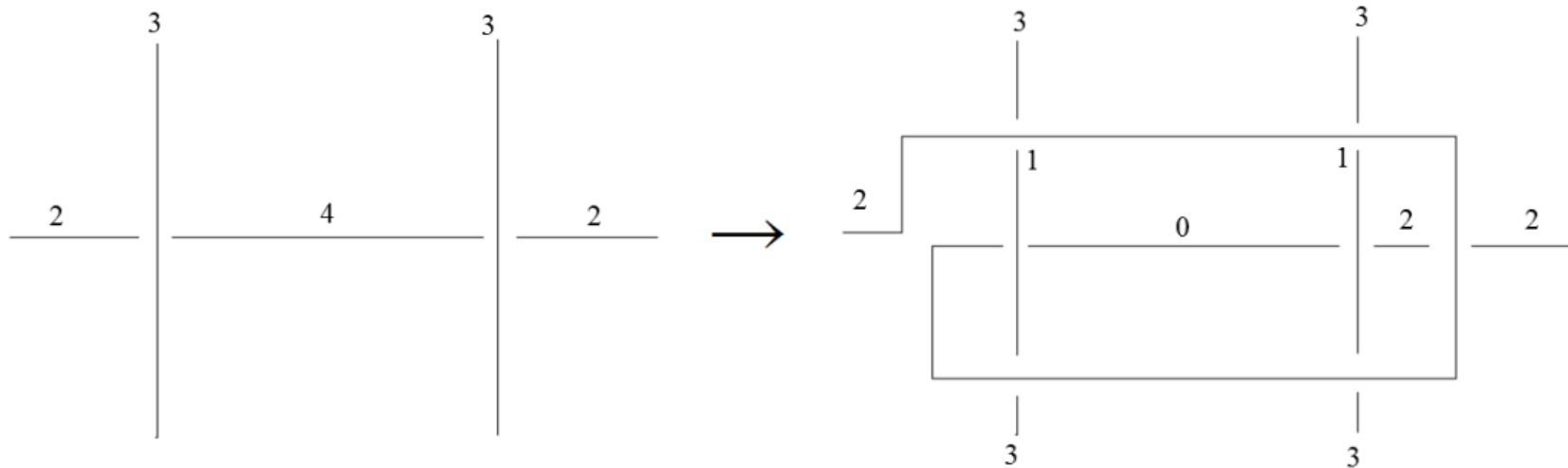


FIGURE 16.

# A felső becslések bizonyításainak módszere

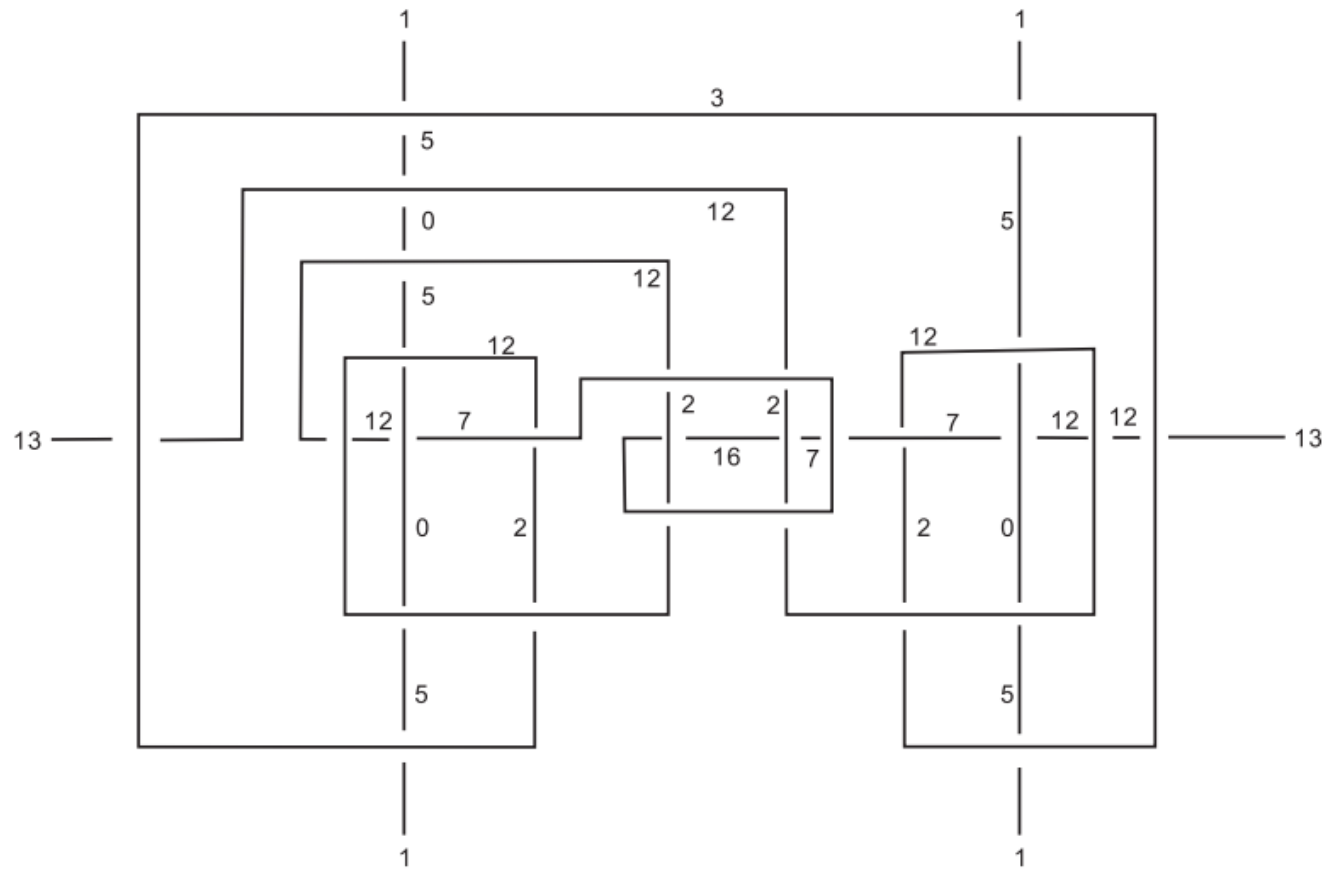
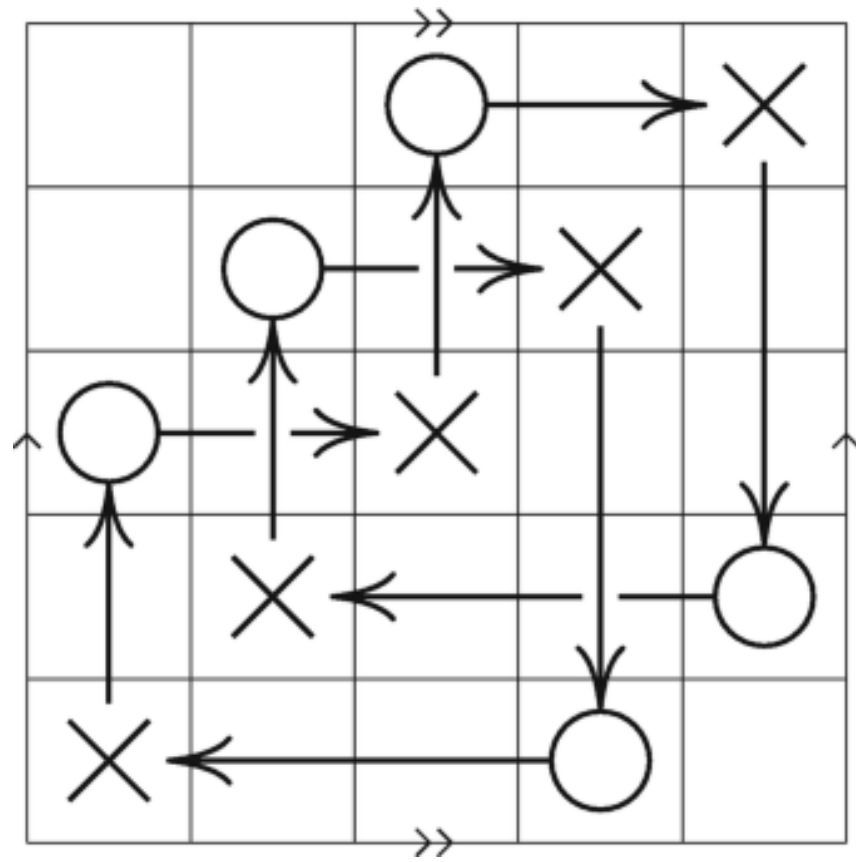


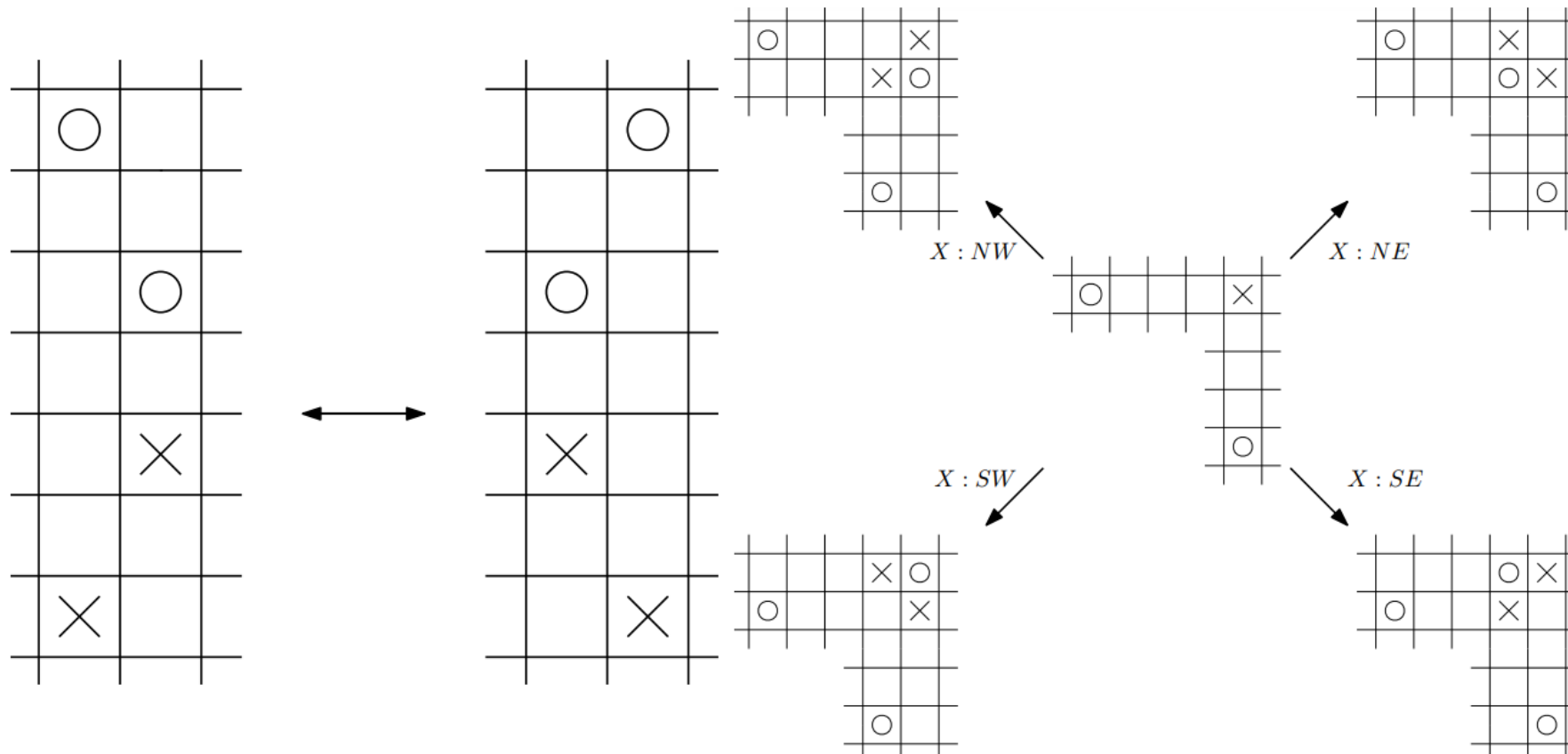
Fig. 28. Transformation 3.2.11.

# Grid-diagramok



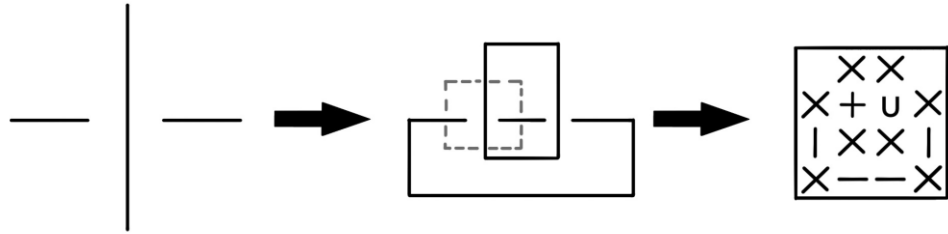
# Cromwell-tétel

- ▶ Cromwell-tétel: Két grid-diagram pontosan akkor reprezentál izotóp láncokat, ha a grid-mozgásokkal egymásba vihetők.

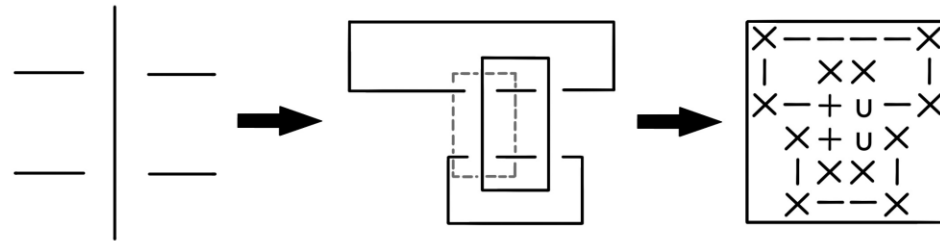


# Bizonyítások segítése programmal

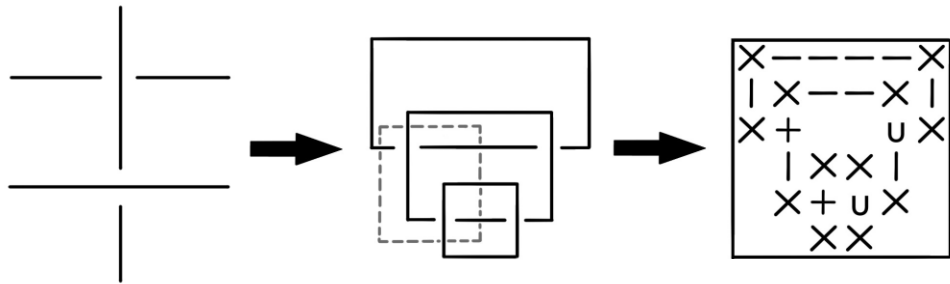
1



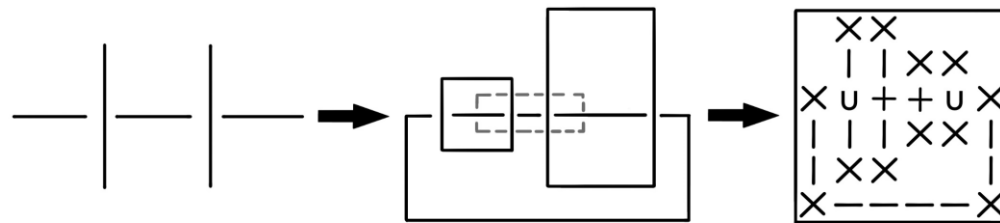
2



3

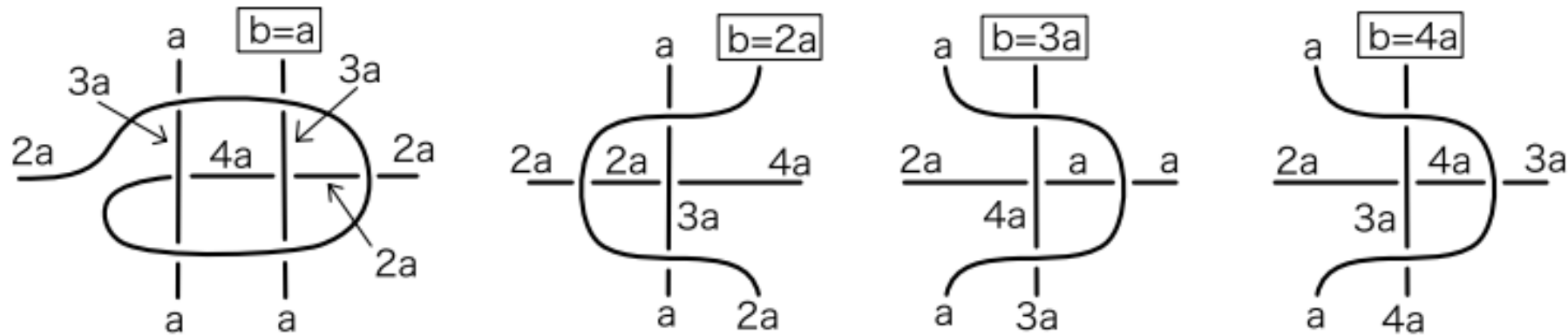


4

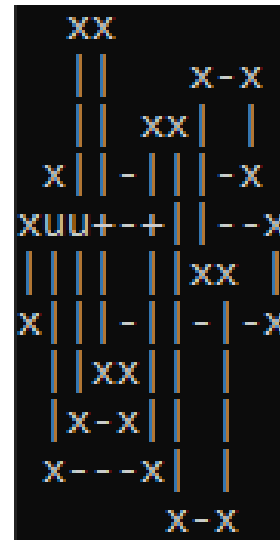


# Eredmények

- ▶ A programom sajnos már  $p = 5$  esetben sem tudott minden esetet kezelni.



- ▶ A harmadik esetre kapott megoldás:



Köszönöm a figyelmet!