

Csomók p -színezhetősége

Egyéni kutatómunka 1.

Györffi Ádám György

Témavezető: Földvári Viktória

2024. szeptember-december

Kivonat

A p -színezhetőség egy egyszerűen leírható csomóinvariáns. Vesszünk egy p prímszámot és azt nézzük, hogy a csomó diagramját kiszínezhetjük-e p színnel bizonyos (p -től függő) feltételek mellett. Azonban a színezéshez jellemzően nem kell mind a p színt felhasználnunk a csomó alkalmas diagramját tekintve. A használt színek minimális számára ismert alsó korlát $p = 19$ -ig minden prímszámra megvalósítható, azonban előlött csak gyenge felső becsléseink vannak erre az értékre. A kutatás célja, hogy számítógépes program segítségével további prímszámokra találjunk minél jobb felső korlátokat.

1. Csomók, csomódiagramok

1.1. Definíció (Csomó). Az \mathbb{R}^3 tér egy $K \subset \mathbb{R}^3$ S^1 körvonallal homeomorf részét csomónak nevezzük. A $K \subset \mathbb{R}^3$ csomót szelédnek nevezzük, ha minden $x \in K$ pontnak létezik olyan U_x \mathbb{R}^3 -beli környezete, hogy az $(U_x, K \cap U_x)$ pár homeomorf a (D_3, D_1) párral, ahol D^1 a D^3 átmérője. Ellenkező esetben K -t vad csomónak nevezzük.

Mi csak szeléd csomókkal fogunk foglalkozni a továbbiakban.

1.2. Definíció (Csomók izotópiája). A K_1 és K_2 csomók izotópak egymással, ha létezik olyan $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ homeomorfizmus, amely szerint K_1 képe K_2 és h izotóp \mathbb{R}^3 identitásával.

A csomók izotópiacsztályait különböző invariánsokkal igyekszünk klasszifikálni. Eddig nem ismert olyan jól számolható invariáns, amely egy az egyben megfeleltetésben van az izotópiacsztályokkal.

1.3. Definíció (Lánc). Egymást nem metsző csomók egy véges családját láncnak nevezzük.

A láncok izotópiáját a csomókéhoz hasonlóan definiálhatjuk. A csomók tekinthetők egykomponensű láncoknak.

A csomók és láncok ábrázolásához segítségünkre vannak a csomódiagrammok.

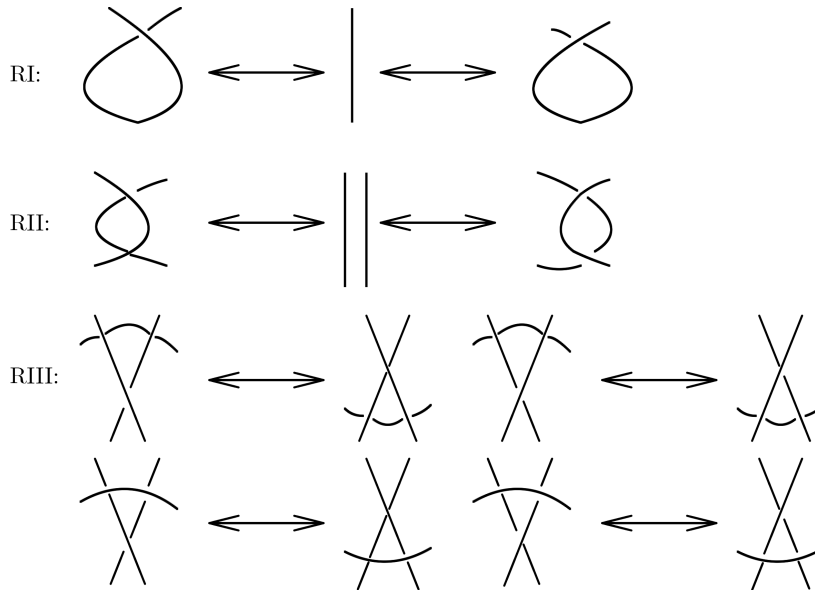
1.4. Definíció (Csomódiagram). Adott egy K csomó. Vetítsük le K -t egy olyan $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ síkra, melyre teljesül, hogy minden pont őse legfeljebb kételemű halmaz és \mathbb{R}^2 minden pontjának van olyan környezete, amelynek ősen a vetítés legfeljebb egy ponttól eltekintve injektív. A kapott $S^1 \looparrowright \mathbb{R}^2$ képen jelöljük, hogy a kettős pontoknál melyik szál van távolabb a síktól, amire vetítettük. Az így kapott ábrát a csomó diagramjának nevezzük.

1.5. Példa (Trefoil diagram). *Itt látható a háromlevelű csomó (trefoil) diagramja:*



Hasonlóan definiálhatjuk a láncok diagramjait is.

1.6. Definíció (Reidemeister-mozgások). *Egy csomó- vagy láncdiagramon az alábbi változtatásokat Reidemeister-mozgásoknak nevezzük:*



1.7. Tétel (Reidemeister). [8] *Két csomódiagram pontosam akkor reprezentál egymással izotóp csomókat, ha Reidemeister-mozgásokkal és a sík izotópiáival egymásba vihetőek.*

2. p -színezhetőség, ismert eredmények

2.1. Definíció (p -színezhetőség). *Legyen p egy prímszám. Ekkor egy csomó diagramjának p -színezésének nevezzük, ha az íveit megszámozzuk a $\{0, 1, \dots, p - 1\}$ halmaz elemeivel úgy, hogy minden kereszteződésnél teljesül a $2x \equiv y + z \pmod p$ kongruencia, ahol x a felül, y és z pedig az alul haladó ívek számai, továbbá nem minden ívnek ugyanaz a száma. Ha egy diagramnak létezik p -színezése, akkor p -színezhetőnek nevezzük.*

2.2. Állítás. *A p -színezések száma csomóinvariáns, azaz nem függ attól, hogy a csomónak melyik diagramját tekintjük.*

2.3. Példa (3-színezés). *A háromlevelű csomó 3-színezhető. A 3-színezhetőség valójában azt jelenti, hogy a diagramot kiszínezhetjük-e három színnel úgy, hogy minden kereszteződésnél három egyforma*

vagy három különböző színt használunk. Így a háromlevelű csomónak összesen 6-féle 3-színezése van.

2.4. Definíció (Csomó determinánsa). *Egy csomó diagramját tekintve rendeljük minden ívhez egy változót. Ezekre a kereszteződésekénél kapunk egy-egy $2x - y - z = 0$ egyenletet, ahol x a felül, y és z pedig az alul haladó ívekhez tartozó változók. Az így kapott egyenletrendszer mátrixának determinánsát a csomó determinánsának nevezzük.*

2.5. Állítás. *Egy csomó determinánsa csomóinvariáns, azaz nem függ attól, hogy a csomónak melyik diagramját tekintjük.*

2.6. Állítás. *Egy csomó pontosan akkor p -színezhető, ha p osztja a determinánsát.*

A kutatás fő témája az volt, hogy mi az a minimális színszám (pontosabban mi a maradékosztályok minimális száma), ami biztosan elég egy p -színezhető csomó p -színezéséhez a csomó alkalmas diagramját tekintve.

2.7. Definíció. *Legyen p egy prímszám, K pedig egy p -színezhető csomó. Ekkor $C_p(K)$ jelölje a K diagramjainak p -színezéseiben használt színek számának minimumát.*

Erre ad alsó becslést a következő eredmény:

2.8. Állítás. *[5] Tetszőleges p -színezhető K csomóra $C_p(K) \geq \lfloor \log_2 p \rfloor + 2$.*

2.9. Állítás. *$p \leq 19$ esetén ezek a felső becslések élesek, azaz:*

- $C_3(K) = 3$
- $C_5(K) = 4$ ([9], 2009)
- $C_7(K) = 4$ ([7], 2010)
- $C_{11}(K) = 5$ ([6], 2015)
- $C_{13}(K) = 5$ ([2], 2015)
- $C_{17}(K) = 6$ ([3], 2020)
- $C_{19}(K) = 6$ ([10], 2022)

Illetve létezik egy gyenge felső becslés is:

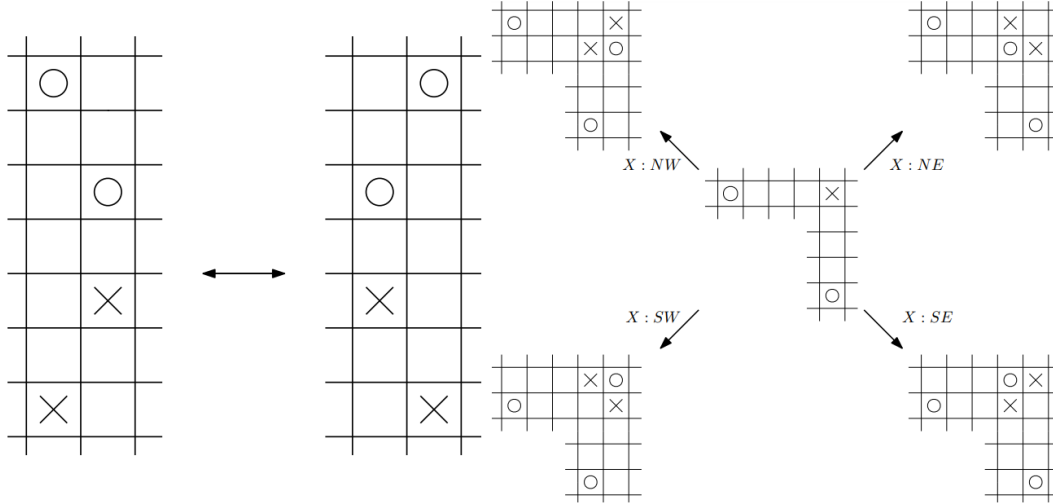
2.10. Állítás. *Legyen $p = 2k + 1 > 7$ egy prímszám, L pedig p -színezhető lánc. Ekkor létezik L -nek olyan diagramja, amely színezéséhez nincs szükség a $2k, 2k - 1$, illetve k színekre. [4]*

2.11. Következmény. *Legyen $p > 7$ prímszám. Ekkor tetszőleges K p -színezhető csomóra $C_p(K) \leq p - 3$.*

A fenti éles példák tanulmányozása közben a következő sejtés fogalmazódott meg bennem:

2.12. Sejtés. *Legyen p prímszám, K p -színezhető csomó, $S = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ pedig olyan maradékrendszer mod p , amelyre teljesül, hogy minden $c_i \in S$ -hez léteznek olyan tőle különböző $c_j, c_k \in S$ számok, hogy $2c_i = c_j + c_k \pmod p$. Ekkor K -nak alkalmas diagramja p -színezhető S elemeivel.*

Ezt a sejtést az alapozza meg, hogy a fenti cikkek végeredményeiben kapott maradékrendszerek a $p = 17$ eset kivételével mind teljesítették ezt a tulajdonságot. A kutatás egyik célja az volt, hogy kiderüljön létezik-e olyan 6 elemű maradékrendszer, ami teljesíti ezt a tulajdonságot és minden 17-színezhető csomó alkalmas diagramja színezhető vele. Sajnos ez egyelőre nem derült ki számomra.

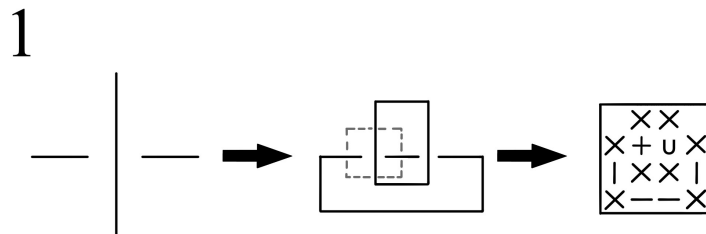


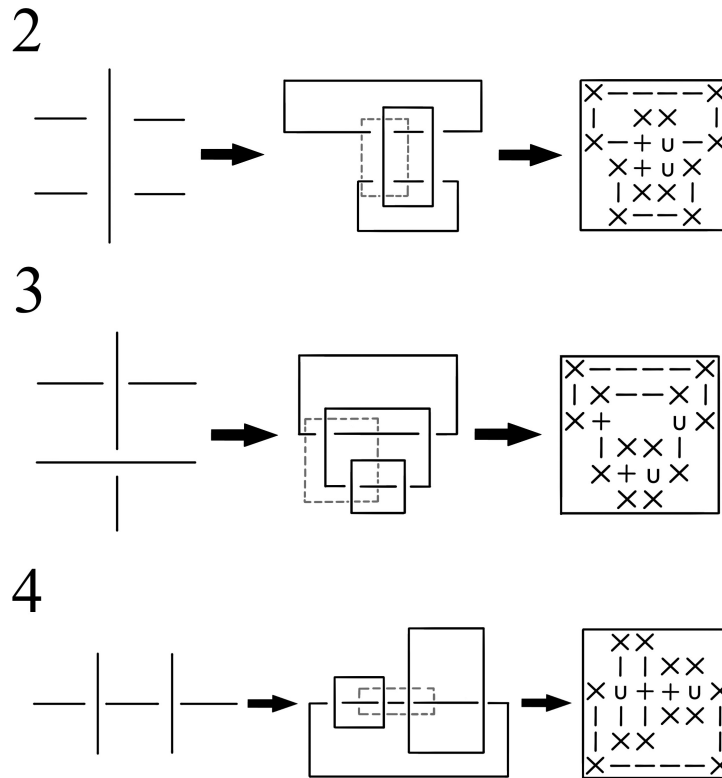
3.5. Tétel (Cromwell). [1] Két grid-diagram pontosan akkor reprezentál izotóp láncokat, ha a fenti grid-mozgásokkal egymásba vihetőek.

4. Bizonyítások segítése számítógépes programmal

A fenti bizonyítások jellemzően ugyanazt a módszert használják $C_p(K)$ felső becslésére: egyes diagramrészleteken Reidemeister-mozgásokat végeznek, így eliminálva bizonyos színeket a diagramról. Ezek nagyobb prímekekre már nagyon nagy méretű és összetett ábrákat eredményeznek, ezek megtalálását igyekeztem egy C# programmal elősegíteni, ami a bizonyításokban használt diagramrészletekből készít egy egyszerűsített grid-diagramot, majd ezen végez véletlenszerű grid-mozgásokat.

Az alábbiakban csomódiagram-részleteket láthatunk, amiket a bizonyításokban manipulálunk. Ezeket először kiegészítjük egy-egy láncdiagrammá, majd készítünk belőle egy-egy grid-diagramot, hogy a számítógép kezelni tudja. Mivel fontos, hogy melyik kereszteződésekből indulunk ki, így ezeket "+" jellel, a kiegészítéskor létrejövő keresztezéseket pedig "u" jellel jelöljük. Mivel a csomó irányítása a színezésnél nem lényeges, így a könnyebb kezelhetőség érdekében az "X" és "O" jeleket egyaránt "X"-szel jelöljük.



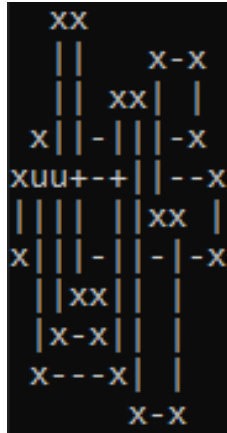


A program egy `Grid` nevű osztállyal dolgozik. Ebben tárolja az egyszerűsített grid-diagram méretét, az "X" szimbólumok helyeit sorok és oszlopok szerint egyaránt, illetve a "+" és "u" szimbólumok pozícióit (ezeket "startcross" és "incross" néven). Tárol továbbá egy p prímszámot, illetve a függőleges szakaszok színeit. Elegendő ezeket tárolni, hiszen a többi szál színe ezekből egyértelműen kikövetkeztethető.

A "Preset1", "Preset2", "Preset3" és "Preset4" függvények a fenti ábrákból kapott diagramokat hozzák létre az argumentumban megadott színezéssel. A "Commutation", "Stabilization" és "Destabilization" függvények a grid-mozgásokat valósítják meg. Végül a "DeletingColor" függvény egy megadott diagramrészleten véletlenszerű mozgásokat végez, egészen addig, amíg a színekészletét egy kívánt színekészlet részhalmazává nem teszi.

A kódban megadott függvényhívások a [9] forrás 4-es számú ábráján látható módosításokat igyekeznek reprodukálni. A 2., 3. és 4. diagramot valóban meg is tudja valósítani, az elsőt azonban hosszú futás után sem találta meg. Ennek oka elsősorban az lehet, hogy a program véletlenszerűen keres megoldást és ezzel a "bruteforce" módszerrel ilyen összetettséű ábrákat már nem tudunk az elvárt futási időben produkálni vele. Így a program ugyan használható grid-diagramok kezelésére, ebben a formában viszont még nem elég hatékony új eliminációk generálására.

Az alábbi ábrán a fenti forrás 4-es számú ábráján a harmadik diagramnak megfelelő manipuláció eredményét láthatjuk:



Az egyszerűbb esetekre láthatóan tud megoldásokat produkálni a program, így érdemes lehet a további fejlesztésével foglalkozni. A hatékonyságát még több módon is lehetne növelni. A színeket jelenleg csak a függőleges szakaszokon tárolja és minden lépésben végignézi a többi szakasz színét, ha ezeket külön tárolná, akkor valamivel kisebb lenne a futási ideje. Másrészt jelenleg a különböző grid-mozgatásokat fix valószínűségekkel végzi, ezeket lehetne optimalizálni, illetve függővé tenni a grid aktuális méretétől (például kisebb gridnél lehetne nagyobb a stabilizáció valószínűsége, nagyobbánál pedig a destabilizációé).

Hivatkozások

- [1] Peter R Cromwell. Embedding knots and links in an open book i: Basic properties. *Topology and its Applications*, 64(1):37–58, 1995.
- [2] P. Lopes F. Bento. The minimum number of fox colors modulo 13 is 5. 2015.
- [3] S. Lamsifer H. Abchir, M. Elhamadadi. On the minimum number of fox colorings of knots. 2020.
- [4] P. Lopes. Removing colors $2k$, $2k-1$, and k . 2013.
- [5] T. Nakamura, Y. Nakanishi, and S. Satoh. The pallet graph of a fox coloring. *Yokohama Mathematical Journal*, 59:91–97, 2013.
- [6] T. Nakamura, Y. Nakanishi, and S. Satoh. 11-colored knot diagram with five colors. 2015.
- [7] K. Oshiro. Any 7-colorable knot can be colored by four colors. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 62(3):963–973, 2010.
- [8] Kurt Reidemeister. Elementare Begründung der Knotentheorie. In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, volume 5, pages 24–32. Springer, 1927.
- [9] S. Satoh. 5-colored knot diagram with four colors. *Osaka Journal of Mathematics*, 46:939–948, 2009.
- [10] B. Zhou Y. Han. The minimum number of coloring of knots. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 31(2), 2022.