Az Erdős-Turán-tétel továbbgondolása homogén kétváltozós polinomokra

Füredi Erik

Témavezető: Gyarmati Katalin

Egyéni kutatómunka 1 beszámoló, 2025. január 10.

A téma

- H pozitív egész számok véges halmaza
- f homogén kétváltozós, egész együtthatós polinom

- cél: $\omega(\prod_{a,b \in H, a \neq b} f(a,b))$ becslése
- $|H|$ és f függvényében

Korábbi eredmények - Az Erdős-Turán-tétel

Tétel (Erdős, Turán)

Ha pozitív egész számok H halmazára $|H| = 3 \cdot 2^{k-1}$ (k pozitív egész szám), akkor $\omega(\prod_{a,b \in H, a \neq b}(a+b)) \geq k+1$.

- $|H| = 2^k + 1$-re is fennáll

Korábbi eredmények

Tétel (Győry, Sárközy, Stewart)

Létezik olyan $c > 0$ hatékonyan kiszámítható konstans, amelyre pozitív egész számok véges H halmazára $|H| \geq 2$ esetén $\omega(\prod_{a,b \in H, a \neq b}(ab+1)) > c \log |H|$.

Az $a^2 + ab + b^2$ polinom esete

Tétel (Füredi E.)

Ha egy H pozitív egész számokból álló halmazra és egy k pozitív egész számra $|H| = 3^k + 1$, akkor
$\omega(\prod_{a,b \in H, a \neq b}(a^2 + ab + b^2)) \geq k + 2$.

Gépi becslések

A $3 \le |H| \le 8$ esetben $\omega(\prod_{a,b\in H, a\neq b}(a^2+ab+b^2))$ programmal talált kis lehetséges értékei: ($H \subset [400]$-tól $H \subset [100]$-ig)

- $|H| = 3$: 3
- $|H| = 4$: 4
- $|H| = 5$: 5
- $|H| = 6$: 6
- $|H| = 7$: 7
- $|H| = 8$: 9

- $3 \le |H| \le 7$ esetén egy példa: $\{1, 2, 2^2, \ldots, 2^{|H|-1}\}$

Másodfokú eset I.

Tétel (Füredi E.)

Legyenek $x, y \in \mathbb{Z}$, amelyekre teljesül, hogy

- $x > 0$,
- $2x + y > 0$,
- $\mathrm{lnko}(x, y) = 1$,
- minden p prímszámra, melyre $p \mid 2x + y$ teljesül, $v_p(2x + y)$ páratlan.

Ekkor bármely H pozitív egész számokból álló halmazra, amelyre $|H| = 3^k + 1$ egy k nemnegatív egész számra, $\omega(\prod_{a,b \in H, a \neq b}(xa^2 + yab + xb^2)) \geq k + 1$.

Másodfokú eset II.

Tétel (Füredi E.)

Legyen $x, y \in \mathbb{Z}$, amelyre

- $x > 0$,
- $2x + y > 0$.

Ekkor bármely H pozitív egész számokból álló halmazra, amelyre $|H| = 3^k(2x + y) + 1$ egy k nemnegatív egész számra, teljesül, hogy $\omega(\prod_{a,b \in H, a \neq b}(xa^2 + yab + xb^2)) \geq k + 1$.

Magasabbfokú eset

Tétel (Füredi E.)

Legyen $n > 2$ pozitív egész szám, x_{n-1}, x_{n-2}, $\dots$, x_1 nemnegatív egész számok és $2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i = M$. Ha a H halmaz pozitív egész számokat tartalmaz és $|H| = M^2(n+1)^k + 1$ egy k nemnegatív egész számra, akkor

$$\omega\Big(\prod_{a,b\in H, a\neq b} (a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \cdots + x_1 ab^{n-1} + b^n) \Big) \geq k+1.$$

Felhasznált irodalom

- P. Erdős és J. Surányi: Válogatott fejezetek a számelméletből, Polygon kiadó, 3. kiadás (2004)
- P. Erdős és P. Turán: On a problem in the elementary theory of numbers,
  Amer. Math. Monthly 41, 608-611 (1934)
- K. Győry, A. Sárközy és C. L. Stewart: On the number of prime factors of integers of the form $ab+1$,
  Acta Arithmetica 59 (4), 365-385 (1996)

- Köszönöm a figyelmet!