Az Erdős-Turán-tétel továbbgondolása homogén kétváltozós polinomokra

2024. december

Füredi Erik

Egyéni kutatómunka

Témavezető: Gyarmati Katalin

1. Bevezetés

Az Erdős-Turán-tételről először témavezetőmtől hallottam. Alapszakos szakdolgozatomat ebben a témában írtam ”Erdős-Turán-tétel és általánosításai” címmel. A téma kutatását folytattam ezen féléves egyéni kutatómunkám során. Az elért eredményeimről TDK dolgozatatot írtam ”Homogén polinomok prímosztóinak számáról” címmel.

Kutatásom témakörében alapvető Erdős és Turán következő tétele:

1. Tétel. *(Erdős-Turán [1]) Ha pozitív egész számok H halmazára $|H| = 3 \cdot 2^{k-1}$, ahol $k \in \mathbb{Z}^+$, akkor $\omega(\prod_{a,b \in H, a \neq b}(a+b)) \geq k+1$.*

A kutatásom célja ehhez hasonló állítások bizonyítása volt homogén kétváltozós egész együtthatós $f(a,b)$ polinomokra, vagyis pozitív egész számok véges H halmazára az $\omega(\prod_{a,b \in H, a \neq b} f(a,b))$ szám $|H|$-tól és f-től függő alsó becslése. Ebben az Erdős-Turán-tétel elemi kombinatorikai és számelméleti ötleteket alkalmazó bizonyítását fejlesztettem tovább. Ezen belül egy fontos lemma a következő:

1. Lemma. *(Erdős-Turán) Ha adott egy p páratlan prímszám és n különböző pozitív egész szám ($n \in \mathbb{Z}^+$), utóbbiak közül kiválasztható $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ úgy, hogy közülük bármely $a \neq b$ párra $v_p(a+b) = \min(v_p(a), v_p(b))$.*

Erdős és Turán eredménye nyomán már több hasonló kérdést vizsgáltak ahol általában egy helyett két halmazra képeztek kétváltozós egész együtthatós polinomba a különböző halmazokból vett számpárokat behelyettesítve új számokat (míg Erdős és Turán egy halmazra a belőle vett különböző elemekből álló párokra képeztek új számokat) és ezek különböző prímosztói számának minimumát vizsgálták. Ezen eredmények bizonyításai általában nem elemiek. A következő alsó becslések diofantikus számelméleti segédeszközökkel lettek belátva:

2. Tétel. *(Győry-Stewart-Tijdeman [4]) Létezik olyan hatékonyan kiszámítható $c_1 > 0$ konstans, amelyre ha A és B pozitív egész számok véges halmazai, $|A| \geq |B| \geq 2$ feltétellel, akkor*

$$\omega\Big(\prod_{a\in A, b\in B}(a+b)\Big) > c_1 \log |A|.$$

3. Tétel. *(Győry-Sárközy-Stewart [3]) Ha A és B pozitív egész számok véges halmazai, továbbá $|A| \geq |B| \geq 2$, akkor*

$$\omega\Big(\prod_{a\in A, b\in B}(ab+1)\Big) > c_2 \log |A|$$

egy hatékonyan kiszámítható $c_2 > 0$ konstansra.

A 3. tétel alapján

Következmény. *(Győry-Sárközy-Stewart [3]) Van olyan hatékonyan kiszámítható $c_3 > 0$ konstans, amelyre ha A pozitív egész számok véges halmaza és $|A| \geq 2$, akkor*

$$\omega\Big(\prod_{a,b\in A, a\neq b}(ab+1)\Big) > c_3 \log |A|.$$

2. Saját eredmények

Elsőként az $f(a,b) = a^2+ab+b^2$ polinommal foglalkoztam. A következő állítást bizonyítottam be:

4. Tétel. *(Füredi E. [2]) Ha H pozitív egész számokból álló halmaz, amelyre $|H| = 3^k+1$, ahol k pozitív egész szám, akkor $\omega(\prod_{a,b\in H, a\neq b}(a^2+ab+b^2)) \geq k+2$.*

Emiatt

Következmény. *Pozitív egész számok véges H halmazára $|H| \geq 4$ esetén*

$$\omega\Big(\prod_{a,b\in H, a\neq b}(a^2+ab+b^2)\Big) \geq \lceil \log_3 |H| \rceil + 1.$$

Erre a polinomra Python nyelvű programmal adott, 3 és 8 közé eső méretű, adott mérettől függően eltérő korlátnál nem nagyobb pozitív egész számokból álló halmazokat végignézve az $\omega(\prod_{a,b\in H, a\neq b}(a^2+ab+b^2))$ mennyiség minimális előforduló értékét, és az ezekhez tartozó H halmazokat kerestem. Utóbbi halmazokból elég azokat tekinteni, ahol az elemek legnagyobb közös osztója 1. Erről szól a következő táblázat [2].

a H halmazok mérete és maximális megengedett elemük	a legkisebb előforduló $\omega(\prod_{a,b\in H, a\neq b}(a^2+ab+b^2))$	ilyen halmazok száma 1 LNKO-jú elemekkel és néhány H ilyen halmaz
3 (400)	3	28668, pl. $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{388,395,399\}$
4 (400)	4	5: $\{1,2,4,8\}$, $\{1,3,9,18\}$, $\{1,3,9,27\}$, $\{1,4,16,22\}$, $\{1,9,15,18\}$
5 (200)	5	2: $\{1,2,4,8,16\}$, $\{1,3,9,27,81\}$
6 (200)	6	1: $\{1,2,4,8,16,32\}$
7 (150)	7	1: $\{1,2,4,8,16,32,64\}$
8 (100)	9	3, pl. $\{1,2,3,4,6,9,12,18\}$

A $|H|=3$ esetben könnyen látható, hogy $\omega(\prod_{a,b\in H, a\neq b}(a^2+ab+b^2))\geq 2$, mert ha H elemei $a<b<c$, akkor $a^2+ac+c^2<b^2+bc+c^2<3(a^2+ac+c^2)$, így ugyanazon prím hatványaiként csak a 2-nek lehetnének hatványai az A^2+AB+B^2 alakú számok ($A,B\in H$, $A\neq B$) de egyikük sem lehet 2-hatvány.

A 4. tételnél általánosabb tételeket láttam be $xa^2+yab+xb^2$ alakú polinomokra, ahol $x>0$ és $2x+y>0$ feltevések miatt

$$xa^2+yab+xb^2=x(a-b)^2+(2x+y)ab$$

bármely a, b pozitív egész számokra pozitív egész szám.

5. Tétel. *(Füredi E. [2]) Tegyük fel, hogy x és $2x+y$ pozitív egész számok, továbbá $2x+y$ minden p prímosztójára $2\nmid v_p(2x+y)$ és $lnko(x,y)=1$. Ha H pozitív egész számokból álló halmaz, amelyre $|H|=3^k+1$ (ahol $0\leq k\in\mathbb{Z}$), akkor $\omega(\prod_{a,b\in H, a\neq b}(xa^2+yab+xb^2))\geq k+1$.*

6. Tétel. *(Füredi E. [2]) Tegyük fel, hogy x és $2x+y$ pozitív egész számok. Ha H pozitív egész számokból álló halmaz, amelyre $|H|=3^k(2x+y)+1$ (ahol $0\leq k\in\mathbb{Z}$), akkor $\omega(\prod_{a,b\in H, a\neq b}(xa^2+yab+xb^2))\geq k+1$.*

A 4.-6. tételek egyre általánosabb polinomra picivel gyengébb eredményeket adnak.

Végül azzal az esettel is foglalkoztam, ahol a homogén polinom foka $n>2$. Itt a következőt sikerült bizonyítanom:

7. Tétel. *(Füredi E. [2]) Tegyük fel, hogy $n>2$ pozitív egész szám, x_1, x_2, $\ldots$, x_{n-1} nemnegatív egész számok, és $M=2+x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}$. Ekkor ha H pozitív egész számokat tartalmazó halmaz, amelyre $|H|=M^2(n+1)^k+1$, ahol $0\leq k\in\mathbb{Z}$, akkor*

$$\omega\Big(\prod_{a,b\in H, a\neq b}(a^n+x_{n-1}a^{n-1}b+x_{n-2}a^{n-2}b^2+\cdots+x_1ab^{n-1}+b^n)\Big)\geq k+1.$$

Pozitív egész számok adott t méretű H halmaza esetén $\omega(\prod_{a,b\in H, a\neq b} f(a,b))$ minimumára, ahol f homogén kétváltozós egész együtthatós polinom, az $\{1,2,2^2,\dots,2^{t-1}\}$ halmazból $c_f t^2(\deg f)$ felső becslés adódik könnyen, ahol c_f az együtthatóktól függ, ez $\deg f > 2$ esetén jobb annál, mint ami az $\{1,2,\dots,t\}$-ből kapható.

3. Vázlatosan a bizonyításokról

A tételek bizonyításában a prímeket külön vizsgáltam aszerint, hogy osztják-e (valamelyik) főegyütthatót, osztják-e az együtthatók összegét, ami az $(1,1)$-beli helyettesítési érték, vagy ezek egyike sem áll fenn. Az Erdős-Turán-tétel bizonyításához hasonlóan úgy láttam be, hogy nem lehet a prímosztók száma kevesebb, hogy alkalmaztam a következő állítást:

2. Lemma. *Pozitív egész $c \neq d$ számokra létezik p prím, amelyre $v_p(c+d) > \max(v_p(c), v_p(d))$.*

Elég olyan prímet találni, amelyre $v_p(c+d) > v_p(c)$.

Ezt úgy használtam ki, hogy p prímenként szűkítettem a H halmazt úgy, hogy a megmaradt halmaz bármely $a \neq b$ elemére a polinomot f-fel jelölve $f(a,b)$-re p ne lehessen olyan prímosztó, amilyennek valamilyen módon, valamely tulajdonság miatt a lemmából léteznie kell bármely (H-beli) pozitív egész számpárra. Az állítás nem teljesülésére a kevesebb prímen végigmenve mindre szűkítve a halmazt, a végén maradna két elem a halmazból, amelyekre minden prímet kizártunk, ami a tulajdonságot teljesíthetné, de kell lennie ilyen prímnek.
A 4. tételben ilyen tulajdonság a

$$v_p(a^2+ab+b^2) > \min(v_p(a^2), v_p(b^2)),$$

az 5. és 6. tételben ilyen tulajdonság, hogy

$$v_p(xa^2+yab+xb^2) > v_p((2x+y)ab),$$

míg a 7. tételben

$$v_p(a^n + x_{n-1}a^{n-1}b + x_{n-2}a^{n-2}b^2 + \cdots + x_1ab^{n-1} + b^n) > v_p(M) + \min(v_p(a^n), v_p(b^n)),$$

mindegyik esetben tetszőleges $a \neq b$ pozitív egész számokra [2].
A halmaz prímenkénti "nem túl nagy mértékű" szűkítésében, ami egyes esetekben hasonlít Erdős és Turán 1. lemmájára, segít a

8. Tétel. *(Fokszámtétel) Bármely n-edfokú egész együtthatós polinomnak bármely p prímszámra modulo p legfeljebb n gyöke van, ha nem 0 minden együtthatója modulo p.*

A 6. és 7. tételek bizonyításában a $(\deg f + 1)^k$ típusú tag szorzója úgy jön be, hogy bizonyos nehezebben kezelhető prímek miatt összesen nem több mint ennyi, ezen prímektől függő részre osztva a halmazt a legnagyobb részt tartjuk meg, így az $u(\deg f + 1)^k + 1$ méretű H-ból, ahol $u \in \mathbb{Z}^+$ a tételek alapján, $(\deg f + 1)^k + 1$ méretű részhalmazt megtartva kezeljük ezen esetet.

Hivatkozások

[1] P. Erdős és P. Turán: On a problem in the elementary theory of numbers, *American Mathematical Monthly* 41, 608-611, 1934

[2] E. Füredi: Homogén polinomok prímosztóinak számáról, TDK dolgozat, 2024

[3] K. Győry, A. Sárközy és C. L. Stewart: On the number of prime factors of integers of the form $ab + 1$, *Acta Arithmetica* 79, 365-385, 1996

[4] K. Győry, C. Stewart és R. Tijdeman: On prime factors of sums of integers I, *Compositio Mathematica* 59, 81-88, 1986