Geometriai értékelések

Dorogi Imre László

Témavezető:
Dr. Csikós Balázs

1. Bevezetés

Ennek a kutatásnak a célja a geometriai értékelések megértése. Az értékelések bizonyos értelemben a felszín és a térfogat általánosításai. Ezzel kicsit továbbgondolom a BSC-s szakdolgozatomban szerepelteket[1]. Az eredmények nagy része Tóth László Márton szakdolgozatából[2], illetve az abban megjelölt forrásokból származik.

1.1. Definíció (Értékelés)**.** Legyen $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n) \subseteq P(\mathbb{R}^n)$ a kompakt, konvex halmazok tere. $f\colon \mathscr{C}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ értékelés, ha $\forall A, B \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$-re igaz, hogy, amennyiben $A \cup B \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$, akkor $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$.

Értékelés például a konstans függvény, a felszín, a térfogat, az átlagos szélesség és a többi ún. belső térfogat. Tudjuk, hogy, ha $\mathscr{K}$ a kompakt halmazok tere, akkor $(\mathscr{K}(\mathbb{R}^n), d_H)$ egy teljes metrikus tér, ahol d_H a Hausdorff-metrika. A további tételekben elsősorban a $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$-en folytonos értékelésekkel fogunk foglalkozni, de ezek többsége nem terjed ki folytonosan $\mathscr{K}(\mathbb{R}^n)$-re. Ezért definiáljuk az értékeléseket csak a kompakt, konvex halmazokon.

1.2. Lemma. A térfogat, azaz, az n-dimenziós Lebesgue-mérték nem folytonos a $(\mathscr{K}(\mathbb{R}^n), d_H)$-n

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy folytonos. Ekkor minden K kompakt halmazhoz, minden d_H-szerint hozzá tartó K_i kompakt halmazokból álló sorozatra teljesül, hogy $V(K_i) \to V(K)$. Legyen $K = [0, 1]^n$ az egységkocka. Ehhez tudunk véges ponthalmazokkal tartani. pl az i. lépésben 2^{in} kis kockára osztjuk és ezeknek a csúcsait vesszük. Ez a sorozat a Hausdorff-metrika szerint tart az egységnégyzethez, viszont a térfogata mindnek 0, mert véges sok pont, tehát a térfogat nem tart az 1-hez. $\square$

2. Vegyes térfogatok

[3] [4]Ahhoz, hogy megértsük az értékeléseket konvex halmazokon, először általánosítsuk a felszínt és a térfogatot. Ehhez először vezessük be a vegyes térfogatokat.

2.1. Tétel. *Legyenek $P_1, \ldots, P_m \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex politópok. Ekkor a*

$$P = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l P_l \qquad (\lambda_l \geq 0)$$

konvex politóp $(n-1)$-dimenziós lapjainak a külső normális egységvektorai egy olyan véges vektorhalmazból valók, mely nem függ a λ_i együtthatóktól (a politópok összege alatt a Minkowski-összeget értjük).

2.2. Tétel (Minkowski)**.** *Adott $K_q, \ldots, K_m \subseteq \mathbb{R}^n$ nem-üres, kompakt, konvex halmazok $\sum_{l=1}^{m} \lambda_l K_l$, $(\lambda_l \geq 0)$ lineáris kombinációja. Ekkor ezek térfogata*

$$V\left(\sum_{l=1}^{m} \lambda_l K_l\right) = \sum_{l_1=1}^{m} \cdots \sum_{l_n=1}^{m} \gamma_{l_1 \ldots l_n} \lambda_{l_1} \cdots \lambda_{l_n}$$

homogén polinom, ahol az együthatók az indexekben szimmetrikusak.

Ennek a bizonyításához van szükség az előbbi tételre. A bizonyításokat a hosszuk miatt nem részletezem.

2.3. Definíció (Vegyes térfogat)**.** Adott $K_1, \ldots, K_m \subseteq \mathbb{R}^n$ nem-üres, kompakt, konvex halmazok $\sum_{l=1}^{m} \lambda_l K_l$, $(\lambda_l \geq 0)$, lineáris kombinációja. Ekkor a

$$V\left(\sum_{l=1}^{m} \lambda_l K_l\right) = \sum_{l_1=1}^{m} \cdots \sum_{l_n=1}^{m} \gamma_{l_1 \ldots l_n} \lambda_{l_1} \cdots \lambda_{l_n}$$

összefüggésben szereplő, indexeiben szimmetrikus $\gamma_{l_1, \ldots, l_n}$ együtthatót a $K_{l_1}, \ldots, K_{l_n}$ halmazok $V(K_{l_1}, \ldots, K_{l_n})$ vegyes térfogatának nevezzük, ahol $(1 \leq l_1, \ldots, l_n \leq m)$.

2.4. Tétel. *A $V(K_{l_1}, \ldots, K_{l_n})$ vegyes térfogatok az argumentumaik (azaz a benne levő K_{l_i}-k) által egyértelműen meghatározottak.*

A vegyes térfogatok legfontosabb tulajdonságai:

1. Minden $K \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ esetén $V(K, \dots, K) = V(K)$ tehát K n-dimenziós térfogata.
2. $V(K_1, \dots, K_n)$ minden argumentumában pozitív lineáris.
3. $V(K_1, \dots, K_n) = V(\sigma(K_1), \dots, \sigma(K_n))$, minden $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometria esetén.

2.5. Tétel. *Legyenek $(K_1)_i, \dots, (K_m)_i \subseteq \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ konvergens sorozatok (a Hausdorff-metrika szerint), $K_1, \dots, K_m$ határértékekkel. Ekkor*

$$V((K_{l_1})_i, \dots, (K_{l_n})_i) \to V(K_{l_1}, \dots, K_{l_n})$$

minden $1 \leq l_1 \leq m, \dots, 1 \leq l_n \leq m$ esetén. Tehát a vegyes térfogatokra teljesül az átviteli elv, azaz folytonosak $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$-n.

3. Quermass-integrálok és belső térfogatok

A vegyes térfogatok egy speciális, fontos esete, amikor csak két különböző halmaznak vesszük az n argumentumú vegyes térfogatát és ezek közül egyik az egységgömb.

3.1. Definíció (Quermass-integrál)**.** Adott $K \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ és $B_1(\mathbf{0})$ az n-dimenziós egységgömb. Ekkor a

$$W_m(K) = V(\underbrace{K, \dots, K}_{n-m}, \underbrace{B_1(\mathbf{0}), \dots, B_1(\mathbf{0})}_{m})$$

vegyes térfogatot K-nak az m-edik quermass-integráljának nevezzük. (Az angol szakirodalom is ezt a német eredetű elnevezést használja [5]. A német Quermaß szót metszetek és vetületek térfogatának elnevezésére használják, a Quermass-integrál elnevezés pedig arra utal, hogy a $W_m(K)$ invariáns megkapható a K $(n-m)$-dimenziós alterekre vett vetületei $(n-m)$-dimenziós Lebesgue-mértékeinek integrálásával [2]. Van, ahol így definiálják a quermass-integrálokat)

3.2. Tétel (Steiner-formula)**.** *Adott $K \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$. Legyen $K_r = \{p \in \mathbb{R}^n \,|\, d(p; K) \leq r\}$ K r sugarú paralleltartománya. Ekkor $V_n(K_r)$ az r-nek egy n-edfokú polinomja, ahol az együtthatók K-tól függő konstansok, azaz*

$$V(K_r) = \sum_{i=0}^{n} c_i r^i$$

Mivel $K_r = K + rB_1(\mathbf{0})$, így az együtthatók kifejezhetőek a quermass-integrálokkal, a Minkowski-tétel segítségével. Mégpedig

$$V(K + rB_1(\mathbf{0})) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} W_i(K) r^i$$

Korábban a szakdolgozatomban bizonyítottam, hogy az itt szereplő együtthatók közül a kontans tag K térfogata, a főegyüttható az az n-dimenziós egységgömb térfogata, az elsőfokú tag meg K felszíne. Ezek a fenti képletből kijönnek és most már a többi együthatót is meg tudjuk határozni.
Kérdés, hogy a quermass-integrálok miként függenek K körüli tér dimenziójától. A Steiner-formulában szereplő paralleltartományok függenek a tér dimenziójától, például egy szakasznak $\mathbb{R}$-ben egy hosszabb, szakasz, $\mathbb{R}^3$-ban egy kapszula forma a paralleltartománya.

3.3. Tétel. *Adott $K \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$, nem üres, kompakt, konvex halmaz. Ekkor $W_0(K) = 0$ és*

$$W_m(K) = \frac{m}{n} \cdot \frac{\omega_m}{\omega_{m-1}} W_{m-1}^{(n-1)}(K)$$

ahol ω_m az m-dimenziós egységgömb térfogata és $W_{m-1}^{(n-1)}(K)$ az $(n-1)$ dimentziós térben vett quermassintegrál.

A quermass-integrálok legfontosabb tulajdonságai:

1. $W_m(K)$ értékelés,
2. $W_m(\sigma(K)) = W_m(K)$ minden $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometria esetén,
3. $W_m(\lambda K) = \lambda^{n-m} W_m(K)$ minden $\lambda > 0$ esetén,
4. $W_m(K)$ folytonos függvény $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$-en,
5. $W_m(K_1) \leq W_m(K_2)$, ha $K_1 \subseteq K_2$,
6. $W_m(K) \geq 0$, és $W_m(K) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\dim K < n - m$,

minden $1 \leq m \leq n$ esetén.

3.4. Definíció (Belső térfogatok)**.** Adott $K \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$, ekkor K-nak a j. belső térfogata

$$V_j(K) = \binom{n}{j} \frac{W_{n-j}(K)}{\omega_{n-j}}$$

tehát lenormáljuk az $n - j$-edik quermassintegrált.

3.5. Lemma. A belső térfogatok nem függenek a K-t tartalmazó tér dimenziójától.

Megjegyzés: a V_j belső térfogatok értékelések $\mathscr{C}(R)^n$-en és j rendben pozití homogének, azaz $V_j(\lambda K) = \lambda^j V_j(K)$ minden $\lambda > 0$-ra.

4. Hadwiger-tétele

[6]A kutatásom talán legfontosabb tétele a Hadwiger-tétel. Ennek segítségével könnyen be lehet azonosítani az értékeléseket és sok ismert tételt ki lehet belőle hozni.

4.1. Tétel (Hadwiger-tétel)**.**

Adott $f : \mathscr{C}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ függvény, melyre $f(\emptyset) = 0$, és teljesíti az alábbiakat

1. f értékelés, azaz, ha $A, B, A \cup B \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$, akkor

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B);$$

2. f folytonos a Hausdorff-metrika szerint;

3. f egybevágóság invariáns;

Ekkor f előáll belső térfogatok lineáris kombinációjaként, tehát léteznek olyan $\gamma_0, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ valós számok, hogy

$$f(K) = \sum_{i}^{n} \gamma_i V_i(K).$$

5. Alkalmazások

A Hadwiger-tétel azért hasznos, mert sok konvex halmazokkal kapcsolatos tétel könnyen bebizonyítható a segítségével.

5.1. Tétel (Gömbök belső térfogatai)**.** *Adott $B_r(\mathbf{0}) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ r sugarú gömb. Ekkor*

$$V_j(B_r(\mathbf{0})) = r^j V_j(B_1(\mathbf{0})) = r^j \binom{n}{j} \frac{\omega_n}{\omega_{n-j}}$$

Bizonyítás. Abból kijön, hogy V_j j rendben homogén és $W_{n-j}(B_1(\mathbf{0})) = V(\underbrace{B_1(\mathbf{0}), \ldots, B_1(\mathbf{0})}_{n}) = \omega_n$ □

Egyéb alakzatok belső térfogatai kiolvashatóak a Steiner-formulából (pl. $r = 1$ esetben),

5.2. Tétel (Cauchy-formula konvex alakzatok felszínére)**.** *Adott $K \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$. Legyen $\pi_\mathbf{u}$ az $\mathbf{u}$ normálvektorú hipersíkra való merőleges vetítés. Ekkor a K felszínére a következő teljesül:*

$$\int_{S_{n-1}} V(\pi_\mathbf{u}(K))\, d\mathbf{u} = V(B_{n-1}) \cdot A(K),$$

tehát a felszín kifejezhető az „árnyékok” $n-1$ dimenziós térfogatának integráljával.

Itt látható, hogy mindkét oldal egy értékelés (mert a felszín és a térfogat is az) és teljesítik a többi feltételt is. Az is látszik, hogy mindkettő $n-1$-rendben homogén. Így a Hadwiger-tétel miatt mindkettő a V_{n-1} belső térfogat konstans szorosa (mert a többi belső térfogat más rendben homogén).
Ennek egy következménye hogy egy $K \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^2)$ esetén K átlagos szélességének π szerese egyenlő K kerületével.
A Cauchy-formulának az egy általánosítása, hogy ha egy $K \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ k-dimenziós alterekre vett vetületeinek k-dimenziós Lebesgue-mértéket vesszük, akkor ezek integrálja a Grassman-sokaságon $V_k(K)$ belső térfogatot adja vissza egy dimenziótól függő konstans erejéig. Ez is abból jön ki, hogy a k-dimenziós Lebesgue mérték és V_k is értékelés, folytonos, izometria-invariáns és k rendben homogén, tehát a Hadwiger-tétel miatt csak konstans szorzóban térhetnek el.

Hivatkozások

[1] I. Dorogi, „A térfogat és a felszín kiszámítási módszerei,” 2023. https://www.math.elte.hu/thesisupload/thesisfiles/2023bsc_alkmat3y-a7zjpa.pdf.

[2] L. M. Tóth, „Integrálgeometriai formulák,” 2013. https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/msc_mat/2013/toth_laszlo_marton.pdf.

[3] L. Szabó, „Bevezetés a konvex geometriába,” 2018. https://people.inf.elte.hu/szabolaszlo/bkg.pdf.

[4] Wikipedia, „Volume of an n-ball.” https://en.wikipedia.org/wiki/Mixed$_volume$.

[5] G. Bonnet, „Origin of the term ‘quermassintegral,” 2014. https://math.stackexchange.com/questions/1007357/origin-of-the-term-quermassintegral.

[6] D. A. Klein, *A short proof of Hadwiger's characterization theorem*. 1995.