

MATEMATIKA DOKTORI ISKOLA

ELMÉLETI MATEMATIKA DOKTORI PROGRAM

DOKTORI SZIGORLATI TEMATIKA

TARTALOMJEGYZÉK

| | |
|--|----|
| 1. Analízis (Valós függvénytan) | 2 |
| 2. Analízis (Komplex függvénytan) | 4 |
| 3. Analízis (Differenciálegyenletek) | 7 |
| 4. Analízis (Funkcionálanalízis) | 9 |
| 5. Geometria (Differenciálgeometria) | 12 |
| 6. Geometria (Topológia) | 15 |
| 7. Geometria (diszkrét, kombinatorikus, véges és konvex geometria) | 16 |
| 8. Sztochasztika (Valószínűségszámítás) | 19 |
| 9. Sztochasztika (Sztochasztikus folyamatok) | 25 |
| 10. Sztochasztika (Statisztika) | 31 |
| 11. Algebra | 37 |
| 12. Számelmélet | 39 |
| 13. Diszkrét matematika | 41 |
| 14. Halmazelmélet és matematikai logika | 43 |

1. ANALÍZIS (VALÓS FÜGGVÉNYTAN)

Szigorlati főtárgy számára a 19 blokkból 12-t kell kiválasztani.

1. Klasszikus mérték- és integrálmélet. Mértékterek. Integrál mértékterekben. Abszolút folytonosság és szingularitás. Szorzatterek. L_p -terek. Haar-mérték. Általánosított integrálok.

2. Többváltozós differenciálás. Implicit- és inverzfüggvény-tétel. Integrálformulák: Gauss-Green és Stokes tételei. Differenciálformák integrálása. Sard tétele. Whitney kiterjesztési tétele. Lipschitz-függvények. Kirszbraun kiterjesztési tétele. Rademacher tétele.

3. Deriváltak. A deriváltak tulajdonságai. Monotonitási tételek. A sűrűségtopológia. Approximatív folytonosság. A kontingencia-tétel. A Denjoy-Young-Saks tétel.

4. Geometriai mértékelmélet I. Lefedési tételek. Hausdorff-mérték és -dimenzió. További dimenziófogalmak. Izoperimetrikus és izodiametrális egyenlőtlenség. Fraktálok és dimenzióformulák. Mértékek és integrálok differenciálása. A maximális operátor és alkalmazásai.

5. Geometriai mértékelmélet II. Reguláris és irreguláris s -halmazok. Vetítési tételek. Szorzattételek. Frostman-lemma, energia-kapacitás. Besicovitch-halmazok. Fraktálok alkalmazásai más területeken (pl. számelmélet, dinamikus rendszerek, véletlen fraktálok, fizikai alkalmazások).

6. A kategória-tétel. Teljes metrikus terek. Lengyel-terek. Baire-tulajdonságú halmazok. A kategória-tétel. Folytonos függvények tipikus tulajdonságai. A Banach-Mazur játék. Az Erdős-Sierpiński-féle dualitási tétel.

7. A leíró halmazelmélet elemei. Borel halmazok. (A)-operáció, analitikus halmazok. Univerzális halmazok. A szeparációs tétel és a grafikon-tétel. A Baire-féle függvényosztályok. Szuszlin- és Luzin-terek.

8. Dinamikai rendszerek. Mértéktartó leképezések egyparaméteres félcsoportjai, illetve csoportjai. Konkrét rendszerek: az egységkör homomorfizmusai, a lineáris leképezés és a pék leképezése, Gauss leképezés, az intervallum endomorfizmusai, a tórusz algebrai automorfizmusai. Invariáns mértékek. Krylov-Bogoljubov tétel. Szimbolikus dinamika.

9. Ergodelmélet. Poincaré rekurrencia-tétele. Ergodtételek. Ergodikus, keverő leképezések és ezek spektrális jellemzése. Entrópia és topologikus entrópia. Dinamikai rendszerek izomorfijája. Bernoulli-sorozatok ergodicitása.

10. Komplex függvénytan. Komplex differenciálás. Hatvány- és Laurent-sorok. Általános integráltételek. Izolált szingularitások, reziduum. Konform leképezések alaptétele, kiterjesztés a határra. Harmonikus függvények, Dirichlet-feladat körre. Kapacitás: Csebisevkonstans, Green-függvény, kapcsolat a Hausdorff-mértékkel.

11. Fourier-sorok. Dirichlet- és Fejér-mag, szummáció. L_2 -elmélet, Carleson-tétel, Riesz-Fischer-tétel. Bochner-tétel. Pontonkénti konvergencia. Multiplikátorok. Sidon-halmazok. Hézagossorok. Szinguláris integrálok.

12. A Fourier-integrál. Konvolúció. Inverziós képlet. Wiener approximációs tétele. Komplex mérték Fourier-transzformáltja. Parseval-formula. Poisson összegzési formula. Fourierintegrál a komplex síkon, a Paley-Wiener tétel. A Laplace-integrál, inverziós képletek, alkalmazások.

13. Harmonikus és reguláris függvények osztályai. L_p -beli függvények Poissonintegrálja. Hardy-osztályok. Konjugált harmonikus függvények, Riesz Marcell tétele. L_p -beli operátorok interpolációja. A Riesz-fivérek tétele.

14. Approximációelmélet. Weierstrass tételei. Bernstein-polinomok. Jackson és Timan tételei. Legjobban közelítő polinomok, Csebisev-polinom. Polinomok deriváltjának becslése. Inverz tételek. Lagrange-interpoláció, vetítőoperátorok. Stone-Weierstrass-tétele, Daniell-Stone-tétel.

15. Topologikus vektorterek. Lokálisan konvex topologikus vektorterek származtatása félnormacsaldal segítségével. Metrizálhatóság. Duális tér, Banach-Alaoglu tétel. A Baire-féle kategóriatétel. Banach-Steinhaus és Banach nyíltleképezés és zárt gráf-tételei. Hahn-Banach tétel. Konvex halmazok szétválasztása. Krein-Milman tétel.

16. Operátorok és Banach-algebrák. Adjungált operátorok. Kompakt operátorok Riesz-Schauder-elmélete. Fredholm-alternatíva. Riesz reprezentációs tételei. Konvolúció és mérték-algebra. Unitér ábrázolás és reprezentáció. Gelfand-Raikov tétel. Irreducibilis komponensekre bontás.

17. Közöséges differenciálegyenletek. Egzisztencia, unicitás, folytathatóság. Mérhető és analitikus jobb oldal. A karakterisztikus függvény folytonossága és differenciálhatósága. Paramétertől függő egyenletek. A kiegyenesítési tétel. Lineáris rendszerek. Lineáris állandó együtthatós rendszerek stacionárius pontjainak osztályozása. Stabilitáseméleti alapfogalmak. Linearizálás, Ljapunov-féle függvények.

18. Parciális differenciálegyenletek. Kezdeti-, peremérték és vegyes feladatok, fizikai példák. A főrészükből lineáris parciális differenciálegyenletek osztályozása és kanonikus alakja állandó együtthatós esetben. Klasszikus és általánosított Cauchy-feladat állandó együtthatós hiperbolikus és parabolikus egyenletekre.

19. Disztribúciók és Szoboljev-függvényterek. Algebrai műveletek, a disztribúciók deriváltja. Disztribúciók direkt szorzata és konvolúciója. Fourier-transzformáció az \mathcal{S} térben és a temperált disztribúciók körében, L_1 -ben és L_2 -ben. Állandó együtthatós lineáris parciális differenciálegyenletek alapmegoldása; példák. $H^1(\Omega)$ -függvények kiterjesztése. Ekvivalens normák a $H_0^1(\Omega)$ térben. $H_0^1(\Omega)$ és $H^1(\Omega)$ beágyazása az $L_2(\Omega)$ térbe. $H^1(\Omega)$ -függvények nyoma.

2. ANALÍZIS (KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN)

Szigorlati főtárgy számára a 21 blokkból 12-t kell kiválasztani.

1. A komplex függvénytan elemei. Komplex differenciálhatóság. Hatvány- és Laurentsorok. Izolált szingularitások. Integráltételek. Nyeregpontmódszer. Argumentum-, maximum- és tükrözési elv. Konform leképezések. Picard tétele. Reguláris függvények sorozatai. Harmonikus függvények.

Parciálisan holomorf többváltozós függvények. Többváltozós integráltételek, hatványsorok, Reinhardt-tartományok. Izolált szingularitások nem-létezése. Gömb és policilinder inekviválenciája.

2. Geometriai függvénytan. Phragmén-Lindelöf típusú tételek. Kapacitás, Green-függvény, kapcsolat a Hausdorff-mértékkel. Konform sugár. Egyrétű függvények, területelv, Koebe torzítási tételei, együtthetők. Extremális hossz, négyyszög és gyűrű modulusa. Kvázikonform leképezések, kváziszimmetrikus függvények, kvázikonform görbék.

3. Függvényosztályok. L_p -beli függvények Poisson-integrálja. Hardy-osztályok. Konjugált harmonikus függvények, Riesz Marcell tétele. L_p -beli operátorok interpolációja. A Riesz-fivérek tétele. Hardy-osztályok jellemzése a maximális operátorral. Végesrendű egész-függvények kanonikus előállítása, Borel tétele. Meromorf függvények a síkon, Nevanlinna 1. és 2. főtétele.

4. Komplex dinamikus rendszerek. Julia- és Fatou-halmazok. Sima Julia-halmazok. Vonzó, szupervonzó, parabolikus fixpontok, Cremer-pontok és Siegel-körök. Holomorf fixpontformula. Nevezetes sűrű részhalmazok a Julia halmazban. Herman-gyűrűk. Vándorló tartományok. Polinomok iterációja. A Mandelbrot-halmaz. A Newton-iteráció. Hiperbolikus leképezések.

5. Moduláris formák. A hiperbolikus sík Poincaré-féle modellje. Az $SL_2(\mathbb{R})$ csoport és diszkrét részcsoportjai. Klasszikus holomorf moduláris formák és Maass-formák, számelméleti alkalmazás. Maass-formák és a Laplace-Beltrami-operátor spektruma. Diszkrét spektrum kompakt hányados esetén. Spektrálfelbontás $SL_2(\mathbb{Z})$ -re.

6. Riemann-felületek. Absztrakt definíció. Fedések, univerzális fedés. Differenciálok. Dirichletfeladat, Perron módszere. Egyszeresen összefüggő felületek konform leképezése. Uniformizáció. Fundamentális tartomány. Függvényelemek, -csírák. Kibővítés elágazási pontokkal.

7. Komplex sokaságok (folytatás). Elliptikus függvények és görbék. Zárt Riemann-felületek, algebrai függvények és görbék. Ricci-áram Riemann-felületeken. Uniformizáció Ricci-áram segítségével.

Projektív algebrai sokaságok, Chow tétele, Kodaira beágyazási tétele.

8. Kévék. Cousin I., II. problémája, kévék, kévékohomológiák, Dolbeault és de Rham izomorfizmustételei. A holomorf függvénycsírák gyűrűjének algebrai tulajdonságai: Weierstrass-tételek, divizorok, Chern-osztályok, Oka-Serre-tétel, koherens analitikus kévék, Oka koherenctétele, Cartan-féle A és B tétel C^m -beli tartományokra.

9. Komplex konvexitás. Kompakt szingularitások megszüntethetősége. Holomorf konvexitás, egzisztenciartományok, pszeudokonvexitás, Levi-konvexitás, Levi-probléma, polinomiális konvexitás. Oka-Weil-tétel. Inhomogén Cauchy-Riemann-egyenletek egy és többváltozóban, Dolbeault-féle kohomológiasoportok. Hörmander L_2 -es módszere a $\bar{\partial}$ -egyenlet megoldására pszeudokonvex tartományokon.

10. Klasszikus mérték- és integrálelmélet. Mértékterek. Integrál mértékterekben. Abszolút folytonosság és szingularitás. Szorzatterek. L_p -terek. Haar-mérték. Általánosított integrálok.

11. Geometriai mértékelmélet. Lefedési tételek. Hausdorff-mérték és -dimenzió. További dimenziófogalmak. Izoperimetrikus és izodiametrális egyenlőtlenség. Fraktálok és dimenzióformulák. Mértékek és integrálok differenciálása. A maximális operátor és alkalmazásai.

12. Fourier-sorok. Dirichlet- és Fejér-mag, szummáció. L_2 -elmélet, Carleson-tétel, Riesz-Fischer-tétel. Bochner-tétel. Pontonkénti konvergencia. Multiplikátorok. Sidon-halmazok. Hézagos sorok. Szinguláris integrálok.

13. A Fourier-integrál. Konvolúció. Inverziós képlet. Wiener approximációs tétele. Komplex mérték Fourier-transzformáltja. Parseval-formula. Poisson-féle összegzési formula. Fourierintegrál a komplex síkon, a Paley-Wiener-tétel. Laplace-integrál, inverziós képletek, alkalmazások.

14. Approximációelmélet. Weierstrass tételei, Stone-Weierstrass-tétel. Bernstein-polinomok, pozitív operátorok. Jackson és Timan tételei. Legjobban közelítő polinomok, Csebisev-polinom. Polinomok deriváltjának becslése. Inverz tételek. Lagrange-interpoláció, vetítőoperátorok.

15. Közönséges differenciálegyenletek klasszikus elmélete. Megoldások létezése és egyértelműsége, Gronwall-lemma. Lineáris rendszerek. Másodrendű lineáris differenciálegyenletre vonatkozó pereemértékproblémák. Stabilitási fogalmak. Lineáris differenciálegyenlet-rendszer stabilitásvizsgálata: stabil, instabil, centrális altér, egyensúlyi pont stabilitásvizsgálata linearizálással. Ljapunov módszere. Aszimptotikus viselkedés, határhalmazok, vonzó halmaz, Poincaré- Bendixson-elmélet. Periodikus megoldás stabilitása, Poincaré-leképezés.

16. Disztribúcióelméleti alapfogalmak. Fourier-transzformáció temperált disztribúciók körében, L_1 -ben és L_2 -ben. Alkalmazás az alapgazdálások előállítására. Szoboljev-terek. Kiterjesztés, ekvivalens normák a $H_0^1(\Omega)$ térben. Nyomoperátor. Kompakt beágyazási tételek. A $H^k(\mathbb{R}^n)$ és a $H^k(\mathbb{R}_+^n)$ tér jellemzése Fourier-transzformációval, A Szoboljev-tér függvényeinek a simasága. Anizotróp Szoboljev-terek.

17. Lineáris parciális differenciálegyenletekre vonatkozó kezdeti- és peremértékfeladatok. Klasszikus és általánosított peremérték- és sajátértékfeladatok. Variációs értelmezésük. Alternatívátétel általános alakú elliptikus peremértékproblémákra. A megoldás egyértelműsége. A megoldások létezése és előállítása a Fourier- és a Galjorkin-módszerrel.

18. A funkcionálanalízis alapjai. Banach-tér és duálisa. Operátorok Banach-terek között. Hahn-Banach-tétel. Baire-kategoriatétel. Banach-Steinhaus-tétel. Banach nyílt leképezéstétele és a zártgráftétel. Kompakt operátorok Riesz-Schauder-elmélete. Fredholm-alternatíva.

19. Topologikus vektorterek elemi elmélete. Topologikus vektorterek előállításai. Félnormacsatlak és lokálisan konvex terek. Induktívan előállított lokálisan konvex terek. Szigorú induktív limeszek. A Hahn-Banach-tétel geometriai formája. Hahn-Banach szétválasztási tételei.

20. Banach-algebrák. Spektrum és rezolvens tulajdonságai. Banach-algebra karaktertere és Gelfand-reprezentációja. Bochner-tétel. Holomorf függvényszámítás egységelemes komplex Banach-algebrában. Reguláris Banach-algebrák. Fedő C^* -algebrák és absztrakt Stone-tétel.

21. Topologikus csoportok. Csoporttopológiák jellemzése, projektív előállításai. Topologikus csoportok féligmetrizálhatósága. Topologikus csoportok közötti egyenletesen folytonos függvények. Topologikus csoportok tranzitív folytonos ábrázolásai. Wigner-Neumann-tétel. Topologikus csoport duálisa. Invariáns Radon-mértékek és folytonos unitér ábrázolások konstrukciója. Haar-mérték létezése és egyértelműsége.

3. ANALÍZIS (DIFFERENCIÁLEGYENLETEK)

Főtárgy: 6 blokk választható

Melléktárgy: 3 blokk választható a 3–10. blokkok közül.

1. A funkcionálanalízis alapjai. Banach-tér és duálisa. Operátorok Banach-terek között. Hahn-Banach tétel. Baire kategóriatétel. Banach-Steinhaus tétel. Banach nyílt leképezés tétele és zárt gráf tétel. Kompakt operátorok Riesz-Schauder elmélete. Fredholm alternatíva.

2. Hilbert-terek geometriája és operátorok Hilbert-terek között. Riesz-féle felbontási tétel és reprezentációs tétel. Hilbert-Schmidt tétel kompakt normális (önadjungált) operátorokra. Dunford klasszikus spektráltétele folytonos normális (önadjungált) operátorokra.

3. Közönséges differenciálegyenletek klasszikus elmélete. Megoldások létezése és egyértelmősége, Gronwall lemma. Lineáris rendszerek. Másodrendű lineáris differenciálegyenletre vonatkozó peremértékproblémák. Stabilitási fogalmak; lineáris differenciálegyenlet-rendszer stabilitás vizsgálata: stabil, instabil, centrális altér, egyensúlyi pont stabilitás vizsgálata lineárizálással. Stabilitásvizsgálat Ljapunov módszerével. Aszimptotikus viselkedés, határhalmazok, vonzó halmaz, a Poincaré-Bendixson elmélet. Periodikus megoldás stabilitás vizsgálata, Poincaré leképezés.

4. Dinamikai rendszerek. Dinamikai rendszerek topologikus osztályozása. Kiegyenesítési tétel, lineáris rendszerek topologikus osztályozása, Hartman-Grobman tétel, nemlineáris rendszerek osztályozása a Poincaré-féle normálforma segítségével. Stabilis, instabilis, centrális sokaság. Lokális vizsgálat periodikus megoldások körül, periodikus megoldás stabilis, instabilis, centrális sokasága.

5. Bifurkáció elmélet, káosz. Dinamikai rendszerek bifurkációi. Nyereg-csomó és Andronov-Hopf bifurkáció. Két-kodimenziós bifurkációk. Strukturális stabilitás. Morse-Smale rendszerek. Diszkrét dinamikai rendszerek. Periodikus pályák stabilitása. Kaotikus pálya fogalma, szimbolikus dinamika, példák. Káosz a Lorenz-féle differenciálegyenletben. Attraktorok típusai, kaotikus attraktor.

6. Operátor félcsoportok és alkalmazásaik differenciálegyenletekre. Végtelen dimenziós fázisterű dinamikai rendszerek. Operátor félcsoportok, generátorok. Absztrakt Cauchyfeladatok, egzisztencia tételek. Stabilitás, operátor félcsoportok aszimptotikus tulajdonságai. Késleltetett argumentumú differenciálegyenletek, alkalmazások. Reakció-diffúzió egyenletek, utazó hullámok létezése és stabilitása.

7. Disztribúcióelméleti alapfogalmak. Fourier-transzformáció temperált disztribúciók körében, az L^1 és L^2 térben. Alkalmazás alapmegoldások előállítására. Szoboljev-terek. Kiterjesztés, ekvivalens normák a $H_0^1(\Omega)$ térben. Nyom operátor. Kompakt beágyazási tételek. A $H^k(\mathbb{R}^n)$ és $H^k(\mathbb{R}_+^n)$ tér jellemzése a Fourier-transzformációval, a Szoboljev-térbeli függvények simasága. Anizotróp Szoboljev-terek.

8. Lineáris elliptikus egyenletekre vonatkozó peremérték feladatok. Szimmetrikus egyenletekre vonatkozó általánosított peremérték feladatok és sajátérték feladatok. A peremérték feladatok és sajátérték feladatok variációs értelmezése. Alternatíva tétel általános alakú elliptikus peremérték problémákra.

9. Kezdeti-peremérték feladatok lineáris hiperbolikus és parabolikus egyenletekre. A klasszikus és általánosított feladatok értelmezése. A megoldás egyértelműsége. A megoldások létezésének bizonyítása és előállítása a Fourier-módszerrel és a Galjorkin-módszerrel.

10. Nemlineáris egyenletek. A monoton típusú operátorok elméletének alapjai. Monoton és pszeudomonoton operátorokra vonatkozó egzisztencia tételek, alkalmazás nemlineáris elliptikus egyenletekre. Absztrakt evolúciós egyenletek vizsgálata a monoton típusú operátorok elméletével. Monoton és pszeudomonoton operátorokkal tekintett kezdeti érték feladatok, alkalmazás nemlineáris parabolikus egyenletekre vonatkozó kezdeti-peremérték feladatokra.

4. ANALÍZIS (FUNKCIONÁLANALÍZIS)

A funkcionálanalízis alapjai. Banach-tér és duálisa. Operátorok Banach-terek között. Hahn-Banach tétel. Baire kategóriatétel. Banach-Steinhaus tétel. Banach nyíltleképezés-tétele és zártgráf-tétel. Kompakt operátorok Riesz-Schauder elmélete. Fredholm alternatíva.

Függvényterek. Approximáció és intergrálreprezentáció. Urison-tétel és Dieudonné-féle felbontási tétel lokálisan kompakt terekre. Stone-Weierstrass tétel. Daniel-Stone tétel. Riesz tételei. Szoboljev-terek. Ekvivalens normák. Beágyazási tételek. H^1 -függvények nyoma.

Hilbert-terek geometriája és operátorok Hilbert-terek között. Riesz-féle felbontási és reprezentációs tétel. Hilbert-Schmidt tétel kompakt normális (önadjungált) operátorokra. Dunford klasszikus spektráltétele folytonos normális (önadjungált) operátorokra.

Operátorok kiterjesztései. Félig korlátos önadjungált operátorok. Neumann, Friedrichs és Krein kiterjesztési tételei. Integrálás projektormérték szerint. Operátorkalkulus. A klasszikus Stone-tétel.

Topologikus vektorterek elemi elmélete. Topologikus vektorterek előállításai. Félnormacsaldok és lokálisan konvex terek. Induktívan előállított lokálisan konvex terek. Induktívan előállított lokálisan konvex terek. Szigorú induktív limeszek. A Hahn-Banach tétel geometriai formája. Hahn-Banach szétválasztási tételek.

Metrizálható topologikus vektorterek. A metrizálhatóság kritériuma. Banach nyíltleképezés tételének általánosítása teljes metrizálható topologikus vektorterekre. Zártgráf-tétel teljes metrizálható topologikus vektorterekre. A nyíltleképezés tétel általánosításai.

Folytonos lineáris operátorok terei. Korlátosság topologikus vektortereken és a félnormálhatóság jellemzése. Korlátos halmazok szigorú induktív limeszben. \mathfrak{S} -topológiák operátortereken. Ascoli-tételek. Az Alaoglu-Bourbaki és a Banach-Alaoglu tétel. Banach ekvifolytonosság tétele. A Banach-Steinhaus tétel általános formája. Operátortopológiák Hilbert-tér feletti folytonos lineáris operátorok terén. Neumann-algebrák.

Dualitás-elmélet topologikus vektorterekre. Duális párok. Poláris halmazok és poláris topológiák. Dualitással kompatibilis topológiák és azok jellemzése (Mackey-Arens tétel). Mackey-terek. Hordós, infrahordós, bornologikus és ultrabornologikus terek. Félreflexív és reflexív terek. Montel-terek.

Kompakt konvex halmazok. Carathéodory-Minkowski tétel. Krein-Milman tétel. Valószínűségi Radon-mértékek kompakt terek felett és a koncentráció értelmezése. Kompakt konvex halmaz feletti valószínűségi Radon-mérték baricentruma. Metrizálható kompakt konvex halmaz pontjának baricentrális felbontása (absztrakt Choquet-tétel). Choquet-rendezés. Baricentrális felbontás nem metrizálható kompakt konvex halmazra.

Absztrakt integrálemélet. Vektorhálók és elemi integrálok. Felső integrálok és integrálok. Integrál szerinti \mathcal{L}^p és \mathcal{F}^p terek. Riesz-Fischer tétel. Beppo-Levi tétel. Lebesgue tétele. Felső integrálok szorzata. Lebesgue-Fubini tétel. Vektorfüggvények integrálása. Vektormértékek és

integrálás vektormérték szerint. Gelfand-Dunford tétel. Halmazgyűrűs és topologikus integrálmélet.

Banach-algebrák. Spektrum és rezolvens tulajdonságai. Banach-algebra karaktertere és Gelfand-reprezentációja. Bochner-tétel. Holomorf függvényszámítás egységelemes komplex Banach-algebrában. Reguláris Banach-algebrák. Fedő C^* -algebrák és absztrakt Stone-tétel.

C^* -algebrák. A C^* -norma egyértelműsége. Kommutatív C^* -algebrák jellemzése (első Gelfand-Najmark tétel). Spektráltétel C^* -algebra normális elemeire és a folytonos függvényszámítás. Baer- C^* -algebrák és a topologikus Schur-lemma. Projektorhálók (Hilbert-hálók és Neumann-hálók) és a nemklasszikus valószínűségszámítás alapjai. MSC-algebrák és absztrakt polárfelbontás. Ultraspektrális C^* -algebrák és absztrakt spektráltétel.

Banach $*$ -algebrák ábrázolásai. $*$ -algebra nemelfajult $*$ -ábrázolásának felbontása ciklikusakra. Ábrázolható pozitív funkcionálok $*$ -algebra felett. A GNS-konstrukció és az ábrázolhatóság Sebestyén-tétele. Absztrakt Gelfand-Rajkov tétel. Banach- $*$ -algebra ciklikus $*$ -ábrázolásának felbontása irreducibilisakra (absztrakt Choquet-tétel). C^* -algebrák Kadison-reprezentációja. C^* -algebra hű $*$ -ábrázolásának létezése (második Gelfand-Najmark tétel).

Topologikus csoportok. Csoport-topológiák jellemzése. Csoport-topológiák projektív előállításai. Topologikus csoportok félmétrizálhatósága. Topologikus csoportok közötti egyenletes folytonos függvények. Topologikus csoportok tranzitív folytonos ábrázolásai. Wigner-Neumann tétel. Topologikus csoport duálisa. Invariáns Radon-mértékek és folytonos unitér ábrázolások konstrukciója. Haar-mérték egzisztenciája és unicitása.

Lokálisan kompakt csoportok folytonos unitér ábrázolása. Konvolúció és lokálisan kompakt csoport mértékalgebrája. A mértékalgebra egységelemességének és kommutativitásának jellemzése. Az összekötő operátorok tétele. A harmonikus analízis alaptétele. Gelfand-Rajkov tétel. A harmonikus analízis Choquet-tétele.

Kompakt csoportok folytonos unitér ábrázolásai. Ortogonalitás-relációk és irreducibilis folytonos unitér ábrázolások véges dimenzióssága. Trigonometrikus polinomok kompakt csoport felett. A trigonometrikus polinomok sűrűségi-tétele (első Peter-Weyl tétel). Ábrázoláskarakterek. Kompakt csoport folytonos unitér ábrázolásainak felbontása irreducibilisek Hilbert-összegére (második Peter-Weyl tétel).

Kommutatív lokálisan kompakt csoportok folytonos unitér ábrázolásai. Kommutatív lokálisan kompakt csoport duálisa. Absztrakt Fourier-transzformáció. Kommutatív lokálisan kompakt csoport folytonos unitér ábrázolásainak felbontása irreducibilisekre (Stone-tétel). Folytonos unitér ábrázolás spektruma.

Indukált unitér ábrázolások. Radon-mértékek faktorizációja lokális kompakt csoport felett. Bruhat-féle keresztmetszet-függvény. A Mackey-féle skalárszorzás értelmezése és tulajdonságai. Indukált unitér ábrázolások és imprimitivás-rendszerek. Az indukálhatóság Mackey-féle kritériuma (imprimitivás-tétel). Glimm-feltétel és Mackey-féle reprezentációs tétel.

Nemlineáris funkcionálanalízis. Szigorú differenciálhatóság és az inverzfüggvény-tétel. Topologikus algebrai komplementerek. Immerziók és Banach-részsokaságok. Szubimmerziók és normálegyenletek. Szubimmerziók és függvények linearizálhatósága. Az állandó rang tétele.

Felületi mértékek. Riemann-részsokaságok véges dimenziós valós euklidészi terekben. A kollektív paraméterezés tétele. A helyettesítéses integrálás általános tétele és a felületi mértékek. A Gauss-Osztrogradszkij tétel elemi formája. Green-tételek és alkalmazások a parciális differenciálegyenletek elméletében. A Gauss-Osztrogradszkij tétel nem elemi formái.

5. GEOMETRIA (DIFFERENCIÁLGEOMETRIA)

Főtárgyi vizsga esetén az alábbi öt témakörből négyet kell kiválasztani. Az öt témakör bármelyike önállóan választható melléktárgyi vizsgának.

5.1. Klasszikus differenciálgeometria. Görbék differenciálgeometriája az n -dimenziós euklideszi térben. Görbék ívhossza, Crofton-formula, Cauchy-formula, Barbier tétele, természetes paraméterezés. Simuló alterek, a kitüntetett Frenet-féle bázismező, görbületi függvények, Frenet-formulák, a görbeelmélet alaptétele. Simulókör és a simulógömbök. Síkgörbék evolútája, evolvensai és parallel görbéi.

A görbék globális differenciálgeometriája. Teljes görbület, a körülfordulási szám tétele, Fenchel tétele, a Fáry–Milnor-tétel, konvex síkgörbék jellemzése, a négy csúcspont tétele.

Hiperfelületek \mathbb{R}^n -ben. Regulárisan paraméterezett hiperfelület érintőtere, felületi görbe görbülete, normálmetszet, normálgörbület, Meusnier tétele. Weingarten leképezés, főirányok és főgörbületek, Euler tétele, Rodrigues tétele felületekre. Gauss- és a Minkowski-görbület, a Gauss- és a Codazzi–Mainardi-egyenletek. Felületek belső geometriája, Theorema Egregium. A hiperfelületelmélet alaptétele (Bonnet tétele). Kovariáns deriválás egy hiperfelületen. Integrálás hiperfelületen.

Görbületi vonalak. Forgásfelületek görbületi vonalai. Dupin tétele, másodrendű felületek görbületi vonalai. Vonalfelületek, torokvonal, lefejthető felületek, a lefejthető felületek struktúrája. Aszimptotikus vonalak negatív görbületű felületeken, Beltrami–Enneper-tétel. Állandó negatív görbületű felületek, Csebisev-hálók, Hilbert tétele. Konvex felületek jellemzése, merevségi tételek konvex felületekre. A Gauss–Bonnet-tétel (lokális és globális alak). Minimálfelületek.

Irodalom:

- [1] M.P. do Carmo: Differential geometry of curves and surfaces
- [2] J.J. Stoker: Differential geometry
- [3] Csikós B.: Differential geometry (jegyzet az interneten)

5.2. A differenciálható sokaságok elmélete. A differenciálható sokaság fogalma. A differenciálható sokaság érintőterei. Differenciálható leképezések. Az érintőleképezés. Immerziók, beágyazások, szubmerziók. Részsokaságok. Vektormezők, Lie-zárójel. Lie-csoport és annak Lie-algebrája. Vektormezők integrálása és teljessége. Disztribúciók és azok integrálhatósága, a Frobenius-tétel. Tenzormezők. Lie-deriválás. A differenciálformák $\Omega^*(M)$ gyűrűje. Az $\Omega^*(M)$ gyűrű deriválásai és antideriválásai, belső szorzás egy vektormezővel, a külső differenciál. Cartan formulája differenciálformák Lie-deriváltjára. Differenciálformák integrálása sima szinguláris láncokon és reguláris tartományokon. A Riemann-sokaság térfogati formája. Az általános Stokes-tétel és klasszikus speciális esetei. A de Rham-féle kohomológiagyűrű és a sima leképezések által indukált homomorfizmus, homotopikus invariancia. Poincaré-lemma. Kovariáns deriválás, annak torziótenzora és görbületi tenzora. Az érintővektor párhuzamos eltolása egy görbe mentén. A kovariáns deriválás kiterjesztése tenzormezőkre. Bianchi-azonosságok.

Irodalom:

- [1] F. Warner: Foundations of differentiable manifolds and Lie groups

[2] L. Auslander, R.E. MacKenzie: Introduction to differentiable manifolds

5.3. Szemi-Riemann-geometria. A szemi-Riemann-sokaság fogalma. A Levi-Civita-féle kovariáns deriválás és a párhuzamos eltolás. A görbületi tenzor azonosságai, metszetgörbület. Az állandó görbületű sokaságok, Schur tétele. A Ricci-tenzor és az Einstein-sokaságok, a Schouten–Struik-tétel és a Singer–Thorpe-tétel. Algebrai görbületi tenzorok, a Kulkarni–Nomizu-szorzás és a görbületi tenzor felbontása, a Weyl-tenzor. A Weyl-tenzor konform invarianciája. Geodetikusok. Exponenciális leképezés. Normális környezetek. Geodetikus teljesség. Riemann-sokaságok teljessége, a Hopf–Rinow-tétel. Lorentz-sokaságok teljessége.

Az ívhossz első és második variációja. Jacobi-mezők egy geodetikus mentén. Konjugált pontok. A geodetikus szegmenshez rendelt index forma, a Morse-féle index tétel. A Rauch-féle összehasonlítási tétel. A Cartan–Hadamard-tétel.

Részsokaság geometriája. A második alaptenzor. A normálvektorhoz tartozó alak-operátor. A normális konnexió. A görbületi tenzorokra vonatkozó Gauss-, Codazzi- és Ricci-egyenletek. A részsokaság fokális pontjai. Totálgeodetikus részsokaságok.

Az általános relativitáselmélet alapjai. Lorentz-sokaságok geodetikusai, teljesség. Időorientáció, észlelőmező, sztatikus téridők. Az Einstein-egyenlet, a Schwarzschild-féle megoldás és a Kruskal-féle kiterjesztés. Az időorientált Lorentz-sokaságok kauzális struktúrája. A Hawking-féle szingularitási tétel.

Irodalom:

- [1] Szenthe J.: A Riemann geometria elemei
- [2] M.P. do Carmo: Riemannian geometry
- [3] B. O'Neill: Semi-Riemannian geometry.
- [4] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis: The large scale structure of space-time

5.4. Homogén és szimmetrikus Riemann-terek. Izometriák egy Riemann-sokaságon, a Steenrod–Myers-tétel. Sima csoportosíthatóság egy differenciálható sokaságon, az orbitok osztályozása. A Lie-csoportokból nyert G/H hányados tér, mint differenciálható sokaság. A G/H homogén térenél az invariáns Riemann-metrika létezésének kritériuma. Reduktív homogén terek. A lokálisan szimmetrikus Riemann-terek jellemzése.

A biinvariáns Riemann-metrikával ellátott kompakt Lie-csoport, mint szimmetrikus tér. A szimmetrikus Riemann-terek általános konstrukciója. Szimmetrikus téren a Levi–Civita-féle kovariáns deriválás és a görbületi tenzor leírása az izometriacsoporthoz tartozó Lie-algebrájának alkalmazásával. Totálgeodetikus részsokaságok, a tér rangja. Az egyszeresen összefüggő szimmetrikus Riemann-tér dekompozíciója. Kompakt típusú és nem kompakt típusú szimmetrikus terek, a metszetgörbületek előjele, dualitás. Az irreducibilis szimmetrikus terek osztályozása.

Riemann-sokaságok holonómia csoportjai, a Berger–Simons-féle tétel és annak kapcsolata a szimmetrikus terekkel.

Irodalom:

- [1] M. Berger: A panoramic view of Riemannian geometry
- [2] J. Cheeger, D.G. Ebin: Comparison theorems in Riemannian geometry

- [3] S. Helgason: Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces
- [4] F.W. Warner: Foundations of differentiable manifolds and Lie groups

5.5. Lie-csoportok. Lie-csoportok, lokális Lie-csoportok és Lie-algebrák kapcsolata. Lie-funktorok. Egyparaméteres részcsoporthok és az exponenciális leképezés. Az univerzális burkolóalgebra, a Poincaré–Birkhoff–Witt-tétel, Hopf-algebrák. A Hausdorff–Campbell-sor és a Dynkin-féle alakja. Egy lokális Lie-csoport rekonstrukciója a Lie-algebrájából, a lokális Lie-csoportok globalizálhatósága. Cartan-tétele.

Lie-algebrák és reprezentációik. Nilpotens és feloldható Lie-algebrák, Engel tétele, féligegyszerű és redukzív Lie algebrák. Reprezentáció nyomformája, Killing-forma, a feloldhatóság és féligegyszerűség Cartan-féle kritériumai. Casimir-operátorok. Lie-algebrák kohomológiái, Whitehead-lemmák és alkalmazásaik, Levi–Mal’cev-tétel.

Féligegyszerű Lie-algebrák. Cartan-féle részalgebra, súlyfelbontás, gyökfelbontás. Komplex féligegyszerű Lie-algebrák és azok irreducibilis reprezentációi. A kompakt Lie-algebrák és kapcsolatuk a komplex féligegyszerű Lie-algebrákkal.

Irodalom:

- [1] M.M. Postnikov: Lie groups and Lie algebras; Lectures in geometry V.
- [2] M. Goto, F.D. Grosshans: Semisimple Lie algebras
- [3] Csikós B.: Lie-csoportok és Lie-algebrák (jegyzet az interneten)

6. GEOMETRIA (TOPOLÓGIA)

Főtárgyi vizsga esetén a lenti tematika egészét tudni kell. A Topológia melléktárgyi vizsga tematikája: 6.1.1, 6.1.2, 6.2.1, 6.2.2 (6.2.1-ben Gromov-tétel nélkül).

6.1. Algebrai topológia.

6.1.1. Homotópieelmélet. Homotopikus csoportok. Egzakt sorozatok térpárra, térhármasra és fibrálásokra. Freudenthal-tétel. Homotopikus Whitehead-tétel. Homotopikus kivágás. Általánosított Freudenthal-tétel. Pontrjagin-konstrukció. A gömbök nulladik, első és második stabil homotopikus csoportjai. Vektornyalábok és G -nyalábok osztályozása.

6.1.2. Homológiaelmélet. Szimpliciális, szinguláris és CW homológiák definíciója, ezek megegyezése. Homologikus Whitehead-tétel. Lefschetz-tétel. Poincaré-dualitás. Poincaré–Hopf-tétel. Kohomologikus szorzás. Künneth-formula. Szorzás duálisa a metszet. De Rham kohomológiák. Gradiens, rotáció és divergencia \mathbb{R}^3 -ban. Univerzális együttható formula.

6.1.3. Leray–Hirsch-féle spektrális sorozat. Serre gyilkos terek módszere. Mod C tételek.

6.1.4. Karakterisztikus osztályok definíciói. Alkalmazások: Immerziók és beágyazások. Egzotikus gömbök. Kobordizmusok és karakterisztikus számok.

6.2. Differenciáltopológia.

6.2.1. Beágyazások és immerziók: Whitney tételei. Whitney–Graustein-tétel. Smale, Hirsch és Gromov tételei. Kiegyenesítési tétel. Felületek immerziói.

6.2.2. Morse-elmélet. Poincaré-dualitás Morse-elméleti bizonyítása.

6.2.3. h -kobordizmus tétel. Általánosított Poincaré-hipotézis.

6.3. Kobordizmusok . Thom-konstrukció. Pontrjagin–Thom-tétel a karakterisztikus számokról. Buoncristiano bizonyítása. $\Omega_* \otimes \mathbb{Q}$ kiszámítása. Dold- és Wall-sokaságok. Rohlin, Wall és Atiyah egzakt sorozatai. Az Ω_* 2-torziója. Nincs páratlan torzió.

Irodalom:

Melléktárgyi vizsgához [1-2], főtárgyi vizsgához [1-8]

- [1] Hatcher: Algebraic topology
- [2] Hirsch: Differential topology
- [3] Milnor: Characteristic classes
- [4] Milnor: Morse theory
- [5] Milnor: h -cobordism theorem
- [6] Husemoller: Vector bundles
- [7] Switzer: Algebraic topology
- [8] Juhász András jegyzetei Szűcs András honlapján.

7. GEOMETRIA (DISZKRÉT, KOMBINATORIKUS, VÉGES ÉS KONVEX GEOMETRIA)

Főtárgyi vizsga esetén az alábbi öt témakörből négyet kell kiválasztani. Az első kivételével bármelyik témakör önállóan választható melléktárgyi vizsgának.

7.1. Euklideszi és affin geometria.

Az euklideszi tér szintetikus geometriája. Az euklideszi geometria axiomatikus megalapozása és felépítése.

Az affin geometria elemei. Egy kommutatív test feletti affin tér fogalma. Affin alterek. Affin függetlenség, affin bázis, affin koordináta-rendszerek. Az alterek egyenletei. Affin leképezések. Az alterekhez tartozó projekciók és szimmetriák. Az affin geometria alaptétele. Pontrendszer súlypontja, osztóviszony, baricentrikus koordináták.

Az euklideszi vektorterek geometriája. Irányítás. A Gram–Schmidt-féle ortogonalizálás. A Grassmann-algebrák alkalmazása az alterek geometriájában. Alterek szöge és az alterek közti fűszögek. Alterek távolsága. Térfogatszámítás. Gram-determinánsok, a Cayley-Menger determináns.

A gömbök geometriája. Pont gömbre vonatkozó hatványa, inverzió, gömbsorok. Gömbi trigonometria.

Az ortogonális csoportok és struktúrájuk különböző dimenziók esetén. Az izometriák és az infinitezimális izometriák kanonikus alakja. A sík és a tér egybevágósági transzformációinak osztályozása. Az ortogonális csoport generálása tükrözésekkel, Cartan tétele. Az n -dimenziós szabályos poliéderek osztályozása, ezek szimmetriacsoportjai. $Iso(\mathbb{R}^2)$ diszkrét részcsoporthoz tartozó és $Iso(\mathbb{R}^3)$ véges részcsoporthoz tartozó osztályozása. Hasonlósági transzformációk.

Irodalom:

- [1] Hajós Gy.: Bevezetés a geometriába
- [2] M. Berger: Geometry I, II

7.2. Nemeuklideszi geometriák.

A projektív geometria elemei. Egy affin tér projektív bővítése. Egy kommutatív test feletti vektortérből képezett projektív tér. A duális tér. Projektív koordináták. Projektív alterek. Az affin tér projektív bővítése. Kettősviszony, harmonikus négyesek. A Papposz- és a Desargues-tétel. Kollineációk, a projektív geometria alaptétele. Projektív korrelációk.

A kvadratikus formák geometriája. Artin-terek. Ortogonalitás. A kvadratikus forma csoportja. Witt tétele. Projektív másodrendű alakzatok. Másodrendű alakzatok projektív és affin osztályozása. Polaritás egy nem-elfajuló másodrendű alakzatra nézve; a centrum. Kúpszeletek a projektív síkon. Az átmérő és az aszimptota. Kúpszelet, mint projektív képződmény. Pascal és Brianchon tétele. Kúpszeletsorok.

A hiperbolikus geometria elemei. A hiperbolikus geometria felépítése az Appendixben. Az abszolút párhuzamosság és a korrespondencia fogalma és a kapcsolatos tételek. A párhuzamossági szög, a ciklusok geometriája, a Hilbert-féle végkalkulus. A hiperbolikus geometria

Beltrami-Cayley-Klein és Poincaré-féle modelljei; a hiperboloid modell. A modellek közötti kapcsolat. Hiperbolikus trigonometria. Terület és térfogat, Schläfli-formula.

Irodalom:

- [1] Szenthe J., Juhász R.: A geometria alapjai
- [2] Strohmajer J.: A geometria alapjai
- [3] M. Berger: Geometry I, II

7.3. Diszkrét és kombinatorikus geometria.

Rácsok, kvadratikus formák. Blichfeld tétele, Pick tétele, Minkowski tétele, számelméleti alkalmazások. Szabályos és félig szabályos mozaikok állandó görbületű terekben.

Pakolások és fedések a síkon és térben. Sűrűség, tágasság, szorosság és a térigény fogalma. Telítettség, szoliditás és a szeparálhatóság. Dirichlet–Voronoi-cellák, L-felbontás. Rácsszerű pakolások, Fáry tétele, Minkowski–Hlawka-tétel, Rogers–Shephard-egyenlőtlenség. Dowker tételei. Momentum lemma.

Helly-típusú tételek. Színes Carathéodory-tétel, frakcionális Helly-tétel, Tverberg tétele, az Erdős–Szekeres-tételkör (Horton-halmaz). Túleszúrási problémák. Borsuk-probléma, Hadwiger-probléma, megvilágítási problémák.

Egységtávolságok síkon és térben, geometriai gráfok, Koebe tétele.

Geometriai transzverzálisok, a Vapnik–Červonenkis-féle dimenzió, az ε -háló létezése.

Irodalom:

- [1] J. Matoušek: Lectures on discrete geometry
- [2] Fejes Tóth L.: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum
- [3] Fejes Tóth L.: Regular figures
- [4] J. Pach: Combinatorial geometry

7.4. Konvex geometria.

A valós affin tér konvex részhalmazai. Konvex burok. Konvex halmazok topológiája. Carathéodory tétele. Extremális pontok, Krein–Milman tétel. Exponált pontok, Straszewicz tétele. Elválasztási tételek.

Konvex poliéderek és politópok, ezek laphálója. Poláris politóp. Euler tétele. Dehn–Sommerville-egyenletek, a felső és alsó korlát tétele, Gale-transzformáció. Politópok néhány alkalmazása: gyenge perfekt gráf sejtés.

Mértékkoncentráció a gömbön, Dvoretzky tétele, Milman QS-tétele (alterek projekciójáról), Uryson-egyenlőtlenség, Inverz Blaschke–Santaló-egyenlőtlenség.

Távolságfüggvény, támaszfüggvény, vegyes térfogat, Steiner tétele, konvex test alapmértékei, Hadwiger alaptételei funkcionálokról, zonoidok, Minkowski-, Steiner- és Schwarz-szimmetrizáció, Brunn–Minkowski-egyenlőtlenség.

Irodalom:

- [1] B. Grünbaum: Convex polytopes
- [2] Szabó L.: Konvex geometria
- [3] A.A. Giannopolus, V.D. Milman: Euclidean structure in finite-dimensional normed spaces, in W.B. Jonson and J. Lindenstrauss ed., Handbook of the geometry of Banach spaces
- [4] G. Pisier: The volume of convex bodies and Banach space geometry
- [5] R. Schneider: Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory

7.5. Véges geometria.

A véges síkok létezésének problémája, a Bruck-Ryser tétel. Projektív síkok koordinátázása, konfigurációs tételek (Desargues, Papposz) kapcsolata a koordinátastruktúra algebrai tulajdonságaival. Ívek, oválisok, Segre tétele, hiperoválisok. Lefogó pontthalmazok, a Rédei-polinom alkalmazásai. Magasabb dimenziós projektív terek. Kollineációk és polarítások leírása. Kvadratikák, Hermite-varietások, körgeometriák, általánosított négyszögek. A véges geometriák néhány alkalmazása (gráfelmélet, kódelmélet).

Irodalom:

- [1] Kiss Gy., Szőnyi T.: Véges geometriák
- [2] D.R. Hughes, F.C. Piper: Projective planes
- [3] J.W.P. Hirschfeld: Projective geometries over finite fields
- [4] J.W.P. Hirschfeld, J.A. Thas: General Galois geometries

8. SZTOCHASZTIKA (VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS)

(Főtárgy)

A főtárgy tematikája számozott szakaszokra bomlik. Ezek közül az egyik a jelölt választása szerint elhagyható.

A melléktárgyak nem választhatók a főtárgy témaköréből.

1. Valószínűségi mértékek, valószínűségi változók.

Valószínűségi változók és vektorváltozók általános, ill. speciális esetben. Eloszlásuk, marginálisok. Kolmogorov-alaptétel. Eloszlásfüggvény és tulajdonságai. Abszolút folytonos eloszlás, sűrűségfüggvény és tulajdonságai. Valószínűségi változók függvényei.

Függetlenség. Borel–Cantelli lemma, Kolmogorov-féle 0 vagy 1 törvény és alkalmazásai.

Várható érték, szórás, kovarianciamátrix. Limesz és várható érték felcserélhetősége.

A valószínűségszámításban használatos konvergenciafajták és kapcsolatuk. Sztochasztikus, 1 valószínűségű, L_p -konvergencia. Egyenletes integrálhatóság. Gyenge konvergencia, relatív kompaktság és feszesség, Prohorov-tétel. Karakterisztikus függvény és tulajdonságai, inverziós formulák, folytonossági tétel.

2. Független valószínűségi változók összegei.

A nagy számok gyenge törvényei, Hincsin, Bernstein tételei. Feller tétele. Szükséges és elegendő feltétel a független esetben.

A nagy számok erős törvényei, a Kolmogorov-kritérium a független, azonos eloszlású esetben. Az iterált logaritmus-tétel.

Független tagú sorok. Két sor, illetve három sor tétel. A különböző konvergenciafajták ekvivalenciája (Lévy tétele).

Centrális határeloszlás-tétel. Független szériák sorozata, Lindeberg–Feller tétel. Ljapunov tétele. A konvergenciasebesség becslése, Esséen-egyenlőtlenség, Berry–Esséen-típusú tételek.

3. Feltételes várható érték, martingálok.

A feltételes várható érték általános fogalma, tulajdonságai és kiszámítási módjai. Reguláris feltételes valószínűség, feltételes eloszlás. Feltételes sűrűségfüggvény.

Martingál, szub- és szupermartingál. Definíció, alaptulajdonságok, példák. Megállási idő, megállított martingál. Doob alapegyenlőtlensége, maximálegyenlőtlenségek. Szubmartingálok Doob–Meyer felbontása, Krickeberg-felbontás.

Martingálok és szubmartingálok 1 valószínűségű konvergenciája. Átmetszési lemma. Egyenletes integrálhatóság, martingálok L_p -ben való konvergenciája.

Korlátos differenciájú martingálok konvergenciahalmazának jellemzése. A Borel–Cantelli lemma Lévy-féle általánosítása.

Reguláris megállási idők, Wald azonosság.

4. Információelmélet.

Az információmennyiség mértékszámai. Entrópia, I -divergencia és formális tulajdonságaik. Típusok és tipikus sorozatok. Forráskódolás változó hosszúságú és blokk-kódokkal.

A zajos csatorna fogalma, csatornakódolási tételek. Rate-distortion elmélet. Csatornkapacitás és kiszámítási módjai. Forrás- és csatornakódolás lineáris kódokkal. Több felhasználós hírközlő rendszerek: korrelált források egyedi kódolása, több bemenetelű csatornák.

Tömörítési modellek. A veszteségmentes tömörítés korlátai (Kraft–Fano egyenlőtlenség, entrópia). Gyakorlati veszteségmentes adattömörítő eljárások és a hatékonyságuk becslése (Shannon-, Gilbert–Moore-, Huffman-kód, blokk kódok, aritmetikai kód). Az írott szöveg tömörítésének korlátai. Markov forrás tömöríthetősége. A veszteséges tömörítések módszerei.

IRODALOM

Mogyoródi J., Somogyi Á.: *Valószínűségi számítás I-II*. Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

Y. S. Chow, H. Teicher: *Probability Theory*. Springer, New York, 1978.

V. V. Petrov: *Sums of Independent Random Variables*. Springer, Berlin, 1972.

P. Hall, C. C. Heyde: *Martingale Limit Theory and its Applications*. Academic Press, New York, 1980.

Móri T.: *Diszkrét paraméterű martingálok*. Egyetemi jegyzet, ELTE, Budapest, 1999. [online <http://www.cs.elte.hu/~mori/erdekes.html>]

Csiszár I., Körner J.: *Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems*. Akadémiai Kiadó, Budapest és Academic Press, New York, 1981.

Gyórfi L., Györi S., Vajda I.: *Információ és kódelmélet*. Typotex, Budapest, 2005.

VALÓSZÍNŰSÉGI MÉRTÉKEK, VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK

(Melléktárgy)

Valószínűségi változók és vektorváltozók általános, ill. speciális esetben. Eloszlásuk, marginálisok. Kolmogorov-alaptétel. Eloszlásfüggvény és tulajdonságai. Abszolút folytonos eloszlás, sűrűségfüggvény és tulajdonságai. Valószínűségi változók függvényei.

Események, eseményosztályok és valószínűségi változók függetlensége. Független kísérletek. Borel–Cantelli lemma, Kolmogorov-féle 0 vagy 1 törvény és alkalmazásai.

Várható érték, szórás, kovarianciamátrix. Limesz és várható érték felcserélhetősége.

A valószínűségszámításban használatos konvergenciafajták és kapcsolatuk. Sztochasztikus, 1 valószínűségű, L_p -konvergencia. A konvergenciafajták metrizálhatósága. Egyenletes integrálhatóság. Gyenge konvergencia, relatív kompaktság és feszesség, Helly–Bray-tétel, Prohorov-tétel. Karakterisztikus függvény és tulajdonságai, inverziós formulák, folytonossági tétel.

IRODALOM

Mogyoródi J., Somogyi Á.: *Valószínűségszámítás I-II*. Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

Y. S. Chow, H. Teicher: *Probability Theory*. Springer, New York, 1978.

FÜGGETLEN VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK ÖSSZEGEI

(Melléklet)

A nagy számok gyenge törvényei, Hincsin, Bernstein tételei. Feller tétele. Szükséges és elegendő feltétel a független esetben.

A nagy számok erős törvényei, a Kolmogorov-kritérium a független, azonos eloszlású esetben. Marcinkiewicz–Zygmund-tétel. Az iterált logaritmus-tétel, Erdős–Feller–Kolmogorov–Petrovskij-tétel.

Független tagú sorok. Két sor, illetve három sor tétel. A különböző konvergenciafajták ekvivalenciája (Lévy tétele). Chung–Fuchs-tétel.

Centrális határeloszlás-tétel. Független szériák sorozata, Lindeberg–Feller tétel. Ljapunov tétele. A konvergenciasebesség becslése, Esséen-egyenlőtlenség, Berry–Esséen-típusú tételek.

IRODALOM

Mogyoródi J., Somogyi Á.: *Valószínűségszámítás I-II*. Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

Y. S. Chow, H. Teicher: *Probability Theory*. Springer, New York, 1978.

V. V. Petrov: *Sums of Independent Random Variables*. Springer, Berlin, 1972.

MARTINGÁLELMÉLET

(Melléktárgy)

A feltételes várható érték általános fogalma, tulajdonságai és kiszámítási módjai. Reguláris feltételes valószínűség, feltételes eloszlás. Feltételes sűrűségfüggvény.

Martingál, szub- és szupermartingál. Definíció, alaptulajdonságok, példák. Megállási idő, megállított martingál. Doob alapegyenlőtlensége, maximálegyenlőtlenségek. Szubmartingálok Doob–Meyer felbontása, Krickeberg-felbontás.

Martingálok és szubmartingálok 1 valószínűségű konvergenciája. Átmetszési lemma. Egyenletes integrálhatóság, martingálok L_p -ben való konvergenciája.

Korlátos differenciájú martingálok konvergenciahalmazának jellemzése. A Borel–Cantelli lemma Lévy-féle általánosítása.

Reguláris megállási idők, Wald azonosság.

Kvadratikus varáció. Differenciában való majorálás. Martingáltranszformált.

Martingáldifferenciák szériáira vonatkozó centrális határeloszlás-tételek. A konvergenciasebesség becslése.

Fordított martingál, tulajdonságok, konvergenciatétel. Felcserélhetőség, de Finetti tétele, a Hewitt–Savage 0 vagy 1 törvény. U -statisztikák.

IRODALOM

Móri T.: *Diszkrét paraméterű martingálok*. Egyetemi jegyzet, ELTE, Budapest, 1999. [online <http://www.cs.elte.hu/~mori/erdekes.html>]

J. Neveu: *Discrete-Parameter Martingales*. North-Holland, Amsterdam, 1975.

Y. S. Chow, H. Teicher: *Probability Theory*. Springer, New York, 1978.

INFORMÁCIÓELMÉLET

(Mellék tárgy)

Az információmennyiség mértékszámai. Entrópia, I -divergencia és formális tulajdonságaik. Típusok és tipikus sorozatok. Forráskódolás változó hosszúságú és blokk-kódokkal.

A zajos csatorna fogalma, csatornakódolási tételek. Rate-distortion elmélet. Csatornakapacitás és kiszámítási módjai. Forrás- és csatornakódolás lineáris kódokkal. Több felhasználós hírközlő rendszerek: korrelált források egyedi kódolása, több bemenetelű csatornák.

Tömörítési modellek. A veszteségmentes tömörítés korlátai (Kraft–Fano egyenlőtlenség, entrópia). Gyakorlati veszteségmentes adattömörítő eljárások és a hatékonyságuk becslése (Shannon-, Gilbert–Moore-, Huffman-kód, blokk kódok, aritmetikai kód). Az írott szöveg tömörítésének korlátai. Markov forrás tömöríthetősége. A veszteséges tömörítések módszerei.

IRODALOM

Csiszár I., Körner J.: *Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems*. Akadémiai Kiadó, Budapest és Academic Press, New York, 1981.

Györfi L., Györi S., Vajda I.: *Információ és kódelmélet*. Typotex, Budapest, 2005.

D. Salomon: *Data Compression. The Complete Reference*. 3rd ed., Springer, New York, 2004.

9. SZTOCHASZTIKA (SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK)

(Főtárgy)

A főtárgy tematikája számozott szakaszokra bomlik. Ezek közül az egyik a jelölt választása szerint elhagyható.

A melléktárgyak nem választhatók a főtárgy témaköréből.

1. Markov-láncok és -folyamatok.

A Markov-tulajdonság. Átmenetvalószínűségek. Chapman–Kolmogorov-féle egyenletek diszkrét és folytonos paraméterű esetben. Az állapotok osztályozása. Visszatérőség. Pozitív állapotok. Ergodtételek (az átmenetvalószínűségekre, függvényátlagra vonatkozóan). Stacionárius eloszlás.

Véges állapotterű Markov-láncok leírása pozitív mátrixokkal. Frobenius–Perron-tételek.

Születési és halálzási folyamatok.

Folytonos trajektóriájú Markov-folyamatok infinitezimális generátora. Az átmenetvalószínűség-függvény tulajdonságai, folytonosság, differenciálhatóság, Chapman–Kolmogorov-egyenlet. Feller-folyamatok.

Potenciálok. Erdős–Kac-tétel.

2. Stacionárius folyamatok.

Erős és gyenge stacionárius folyamatok. A Gauss-folyamatok esete.

Véletlen ortogonális sztochasztikus mérték. Bochner–Hincsin tétel, Herglotz-tétel. Stacionárius folyamatok spektrálelőállításai. A spektrálmérték. A Gauss-féle eset.

Az L_2 -izomorfia következményei. A mintavételezés sűrűségére vonatkozó Kotelnikov–Shannon tétel. Ergodicitás.

A gyengén stacionárius folyamatok osztályozása a lineáris filtráció szerint. Wold-felbontás. Teljesen reguláris folyamatok spektrálsűrűség-függvénye.

Erősen stacionárius folyamatok, Kevertés. A Birkhoff-féle ergodtétel erősen stacionárius folyamatokra.

A korrelogram és a periodogram. A spektrálfüggvény konzisztens becslése.

3. Mértékek konvergenciája függvényterekben.

Folytonos trajektóriájú folyamatok, folytonossági modulusok. Másodfajú szakadás nélküli függvények. A $C[0, 1]$ és a $D[0, 1]$ tér, feszeség ezekben a terekben.

A Wiener-mérték. A Wiener-folyamat különböző konstrukciói, tulajdonságai. A trajektóriák viselkedése.

A szummációs folyamatra vonatkozó gyenge invariancia-elv (Donsker-tétel). A tapasztalati eloszlásfüggvény, mint sztochasztikus folyamat konvergenciája a Brown-hídhöz.

Véletlen ortogonális mérték. Wiener-integrál és alkalmazásai.

4. Független növekményű folyamatok.

A független és stacionárius növekményű folyamatok karakterisztikus függvényének jellemzése, a Lévy–Hincsin tétel.

Független növekményű pontfolyamatok leírása véletlen pontmérték szerinti integrál alakjában. Független növekményű folyamatok trajektóriális felbontása folytonos és ugró folyamat összegére. Független növekményű Gauss-folyamatok.

Független növekményű folyamatok funkcionáljainak várható értékére vonatkozó differenciálegyenlet.

IRODALOM

- S. Karlin, H. M. Taylor: *Sztochasztikus folyamatok*. Gondolat Kiadó, Budapest, 1985.
M. H. A. Davis: *Linear Estimation and Stochastic Control*. Chapman and Hall, London, 1977.
M. B. Priestley: *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press, New York, 1981.
Yu. Rozanov: *Stationary time series*. Holden Day, San Francisco, 1967.
K. L. Chung, K.L.: *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*. Springer, Berlin, 1967.
D. L. Isaacson, R. W. Madsen: *Markov Chains: Theory and Applications*, Wiley, New York, 1976.

MARKOV-LÁNCOK, MARKOV-FOLYAMATOK

(Melléktárgy)

Sztochasztikus folyamatok: Markov-tulajdonság, erős Markov-tulajdonság, homogenitás. Diszkrét paraméterű Markov-láncok: definíció, átmenetvalószínűség-mátrix, Chapman–Kolmogorov-egyenletek. Az állapotok osztályozása. Periódus, visszatérőség. Az átmenetvalószínűségek konvergenciája. Stacionárius eloszlás. Nagy számok törvénye és centrális határeloszlás-tétel irreducibilis, pozitív rekurrens Markov-lánc funkcionáljára.

Átmenetvalószínűségek tabu állapotokkal. Reguláris mérték, Doeblin hányados-tétele. Megfordított Markov-lánc. Elnyelődési valószínűségek. Perron–Frobenius-tételek.

Születési és halálozási folyamatok.

Folytonos trajektóriájú Markov-folyamatok infinitezimális generátora. Az átmenetvalószínűség-függvény tulajdonságai, folytonosság, differenciálhatóság, Chapman–Kolmogorov-egyenlet. Feller-folyamatok.

Potenciálok. Erdős–Kac-tétel.

IRODALOM

- S. Karlin, H. M. Taylor: *Sztochasztikus folyamatok*. Gondolat Kiadó, Budapest, 1985.
K. L. Chung, K.L.: *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*. Springer, Berlin, 1967.
D. L. Isaacson, R. W. Madsen: *Markov Chains: Theory and Applications*, Wiley, New York, 1976.
G. Kemeny, J. L. Snell: *Finite Markov Chains*. Van Nostrand, Princeton, 1960.

STACIONÁRIUS FOLYAMATOK

(Melléktárgy)

Erős és gyenge stacionárius folyamatok. A Gauss-folyamatok esete.

Véletlen ortogonális sztochasztikus mérték. Bochner–Hincsin-tétel, Herglotz-tétel. Stacionárius folyamatok spektrárelőállításai. A spektrálmérték.

Az L_2 -izomorfia következményei. A mintavételezés alaptétele. Ergodicitás.

A gyengén stacionárius folyamatok osztályozása a lineáris filtráció szerint. Wold-felbontás és kapcsolata a spektrálmérték Lebesgue-felbontásával. Teljesen reguláris folyamatok spektrálsűrűségfüggvénye.

ARMA folyamatok. Racionális spektrálsűrűségfüggvénnyel rendelkező gyengén stacionárius folyamatok. Az ARMA folyamatok állapotegyenletes előállítása.

Erősen stacionárius folyamatok. A Birkhoff-féle ergodtétel.

A keverés különböző mérőszámai.

IRODALOM

- S. Karlin, H. M. Taylor: *Sztochasztikus folyamatok*. Gondolat Kiadó, Budapest, 1985.
T. W. Anderson: *The Statistical Analysis of Time Series*. Wiley, New York, 1971.
M. B. Priestley: *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press, New York, 1981.
Yu. Rozanov: *Stationary Time Series*. Holden Day, San Francisco, 1967.

FÜGGETLEN NÖVEKMÉNYŰ FOLYAMATOK

(Melléklet)

A független és stacionárius növekményű folyamatok karakterisztikus függvényének jellemzése. Korlátlanul osztható eloszlások karakterisztikus függvénye, Lévy–Hincsin formula. Poisson pontfolyamat és integrál. Az eloszlás tulajdonságainak (nemnegativitás, véges szórás) jellemzése a karakterisztikus függvény segítségével. Stabilis eloszlások karakterisztikus függvénye. Stabilis eloszlású változó generálása. Stabilis eloszlások farok-valószínűségének nagyságrendje.

Független növekményű pontfolyamatok leírása véletlen pontmérték szerinti integrál alakjában.

Független növekményű folyamatok trajektóriális felbontása folytonos és ugró folyamat összegére. Független növekményű Gauss-folyamatok.

Független növekményű folyamatok funkcionáljai. A várható értékére vonatkozó differenciálegyenlet.

IRODALOM

I. I. Gihman, A. V. Szkorohod: *Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.

O. Kallenberg: *Random Measures*. Academic Verlag, Berlin, 1976.

V. V. Petrov: *Sums of Independent Random Variables*. Springer, Berlin, 1972.

SZTOCHASZTIKUS ANALÍZIS

(Mellék tárgy)

Lokális martingál, szemimartingál. Integrál szemimartingál szerint. Az integrál tulajdonságai. Kvadratikus variáció, BDG-egyenlőtlenség, izometria-tétel. Itô-formula, Lévy-karakterizáció, Girsanov-tétel, Kazamaki- és Novikov-feltétel. Itô-integrál.

Sztochasztikus differenciálegyenletek, erős és gyenge megoldás, eloszlásbeli és trajektóriánkén-
ti unicitás, ezek kapcsolata. Gyenge megoldás mértékcserevel, tempóváltással. Fubini-tétel,
lokális idő. Eltöltött idő formula. Hölder-folytonos együttthatók esete egy dimenzióban. Tsir-
elson példája. Rendezési tétel.

IRODALOM

D. Revuz, M. Yor: *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3rd ed. Springer, Berlin, 1999.

P. E. Protter: *Stochastic Integration and Differential Equations*, 2nd ed. Springer, Berlin, 1990.

10. SZTOCHASZTIKA (STATISZTIKA)

(Főtárgy)

A főtárgy tematikája számozott szakaszokra bomlik. Ezek közül az egyik a jelölt választása szerint elhagyható.

A melléktárgyak nem választhatók a főtárgy témaköréből.

1. Statisztikai mező.

Minta. Tapasztalati eloszlás és eloszlásfüggvény. Glivenko–Cantelli tétel. Tapasztalati sűrűségfüggvény (Parzen–Rosenblatt), hisztogram.

Dominált mértékosztályok. Halmos–Savage tétel. Elégségesség. Neyman-féle faktorizációs tétel. Minimális elégségesség.

Teljesség, korlátos teljesség. Basu tétele. Exponenciális eloszláscsalád. Lehmann tétele. Az exponenciális eloszláscsalád teljessége.

Fisher-információ, tulajdonságai. Kapcsolat az elégségességgel.

2. Becsléelmélet.

Veszteségfüggvény, rizikófüggvény. Torzítatlanság, megengedhetőség, minimaxitás. Optimális becslés. Blackwell–Rao tétel.

Jackknife, bootstrap. Cramér–Rao típusú egyenlőtlenségek.

Becslések aszimptotikus tulajdonságai. Konzisztens becslések, aszimptotikusan normális becslések. Bahadur tétele, szuperefficiens becslések.

Maximum-likelihood becslés. A ML-becslés konzisztenciája és aszimptotikus optimalitása. Nemparaméteres ML-becslések. Kaplan–Meyer becslés cenzorált mintából. A Bayes-féle becslések és kiszámításuk. Formális Bayes-becslés, Jeffrey-féle nem-informatív a priori eloszlás.

3. Speciális becslések.

Invariancia, ekvivariáns becslések. Az eltolásparaméter Pitman-becslése, a becslés minimax tulajdonsága.

L -statisztikák, aszimptotikus normalitásuk. Az eltolás- és skálaparaméter optimális és aszimptotikusan optimális L -becslése.

M -becslések. Robusztusság. A Huber-féle becslés és minimax tulajdonsága.

Rangstatisztikák, R -becslések (pl. Hodges–Lehmann becslés).

Véges sokaságból való mintavétel. A Horvitz–Thompson becslés. Állandó együtthatós lineáris becslések megengedhetősége.

4. Hipotézisvizsgálat.

Statisztikai hipotézisek, próbák, véletlenített próbák. Egyenletesen legerősebb próbák. Torzítatlan próbák.

Neyman–Pearson lemma. Az erő aszimptotikája. Nagy eltérés-tételek (Cramér-, Chernoff-, Sanov-tétel) alkalmazása a statisztikában.

Monoton likelihood-hányadosú osztály, egyoldali ellenhipotézis. Kétoldali ellenhipotézis exponenciális családban. Hasonlóság, Neyman-struktúra. Hipotézisvizsgálat zavaró paraméterek jelenlétében. A normális eloszlás paramétereire vonatkozó klasszikus próbák optimalitása.

Általánosított likelihood-hányados próba, χ^2 -próbák.

A tapasztalati eloszlásfüggvény Brown-hídhöz való konvergenciája. Gauss-folyamatok Karhunen–Loève sorfejtése. A klasszikus nemparaméteres próbák, Kolmogorov-, Szmirnov-, von Mises-próba. Blum–Kiefer–Rosenblatt próba.

Konfidenciahalmazok, -intervallumok. Kapcsolat a hipotézisvizsgálattal. A ML-becslésen és a likelihood-függvényen alapuló aszimptotikus konfidenciahalmazok.

Szekvenciális döntési módszerek. A Wald-féle szekvenciális eljárás.

5. Többdimenziós analízis

A többdimenziós normális eloszlás. Fisher–Bartlett tétel és megfordítása. A többdimenziós normális eloszlás paramétereinek becslése. A Wishart-eloszlás tulajdonságai. Hipotézisvizsgálat a várható értékkel, a korrelációs és a regressziós mátrixszal kapcsolatban.

Lineáris modell, lineáris becslések. Becsülhetőség, Gauss–Markov tétel. Lineáris hipotézis tesztelése normális lineáris modellben. Változószelekció, lépésenkénti regresszió. Robusztus regresszió.

Szórásanalízis. Fisher–Cochran tétel. Kovarianciaanalízis.

Főkomponens-analízis. Faktoranalízis. Kanonikus korreláció. A paraméterek becslése maximum likelihood módszerrel, a becslések tulajdonságai.

Osztályozás, legközelebbi társ módszer, klaszteranalízis.

Többdimenziós skálázás.

Kontingenciatablázatok elemzése. A loglineáris modell. Maximum likelihood becslés a loglineáris modellben. A minimális diszkrimináló információ módszere. A maximális entrópia és minimális divergencia módszere. Iteratív arányos illesztés és EM algoritmus.

IRODALOM

Móri F. Tamás, Székely J. Gábor (szerk.): *Többváltozós statisztikai módszerek*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.

Mogyoródi J., Michaletzky Gy. (szerk.): *Matematikai statisztika*. Egyetemi jegyzet. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1995.

Bolla M., Krámlí A.: *Statisztikai következtetések elmélete*. Typotex Kiadó, Budapest, 2005.

A. A. Borovkov: *Matematikai statisztika*. Typotex Kiadó, Budapest, 1999.

E. L. Lehmann, *Theory of Point Estimation*, Wiley, New York, 1983.

E. L. Lehmann, *Testing Statistical Hypotheses*, 2nd ed. Wiley, New York, 1986.

O. J. Dunn, V. A. Clark: *Applied Statistics: Analysis of Variance and Regression*, 2nd ed. Wiley, New York, 1987.

S. Zacks: *Parametric Statistical Inference*. Pergamon Press, Oxford, 1981.

P. K. Andersen, O. Borgan, R. D. Gill, N. Keiding N.: *Statistical Models Based on Counting Processes*. Springer, New York, 1993.

J. D. Jobson: *Applied Multivariate Data Analysis*, Vol. I. and II. Springer, New York, 1992.

NEMPARAMÉTERES MÓDSZEREK

(Melléktárgy)

Nominális, ordinális skálájú megfigyelések. Kategorikus változók.

Permutációteszt. A binomiális és polinomiális próba. Kapcsolatuk a χ^2 -próbával.

A változók közötti kapcsolat mérése. Fisher-féle egzakt teszt a függetlenségre. χ^2 -próba. Spearman-féle rangkorreláció és teszt.

Homogenitásvizsgálat. Kolmogorov–Szmirnov-próba. Medián próba. Mann–Whitney-féle U -teszt. Wald–Wolfowitz-féle teszt. Wilcoxon-féle előjeles rangpróba. Wilcoxon-féle előjel-próba. Kruskal–Wallis-próba. Ansari–Bradley-próba.

Nemparaméteres szórásanalízis. Friedman-próba. Nemparaméteres t -próba (Tukey-teszt). Páronkénti összehasonlítás, Scheffé-féle nemparaméteres konfidenciaintervallum.

Nemparaméteres becslélmélet. A Hodges–Lehmann statisztika. U -statisztikák. Nemparaméteres maximum-likelihood becslés. A Kaplan–Meier-féle szorzatbecslés. Monoton regresszió.

IRODALOM

Vincze I., Varbanova M.: *Nemparaméteres matematikai statisztika. Elmélet és alkalmazások.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1993.

R. E. Barlow, D. J. Bartholomew, J. M. Bremner, H. D. Brunk: *Statistical Inference Under Order Restrictions.* Wiley, New York, 1972.

M. Hollander, D. A. Wolfe: *Nonparametric Statistical Methods.* Wiley, New York, 1973.

J. D. Gibbons: *Nonparametric Statistical Inference.* Marcel Dekker, Basel, 1971.

M. L. Puri, P. K. Sen, *Nonparametric Methods in Multivariate Analysis.* Wiley, New York, 1971.

IDŐSOROK STATISZTIKAI ELEMZÉSE

(Mellék tárgy)

Az idősorok additív felbontása. A trend és a szezonális becslése.

Stacionárius idősorok modellezése. A várható érték és a kovariancia-, illetve korrelációfüggvény becslése. A korrelogram. A becslések aszimptotikus tulajdonságai. A becslések konzisztenciája négyzetesen integrálható spektrálsűrűségfüggvény esetén. Aszimptotikus normalitás lineáris folyamatok esetén.

A diszkrét spektrum becslése ismert és ismeretlen frekvenciák esetén. A periodogram. Várható értéke és kovarianciafüggvénye. Fisher-féle teszt, Grenander–Rosenblatt-féle teszt.

A spektrálsűrűség-függvény becslése. Konzisztens becslés konstruálása a periodogram simítása, illetve a tapasztalati kovarianciafüggvény súlyozásával. A simított periodogram aszimptotikus tulajdonságai.

A $P(\lambda)$ -teszt.

Autoregresszív-mozgóátlag folyamatok. Folyamatok transzformációja. A transzformált folyamat tulajdonságai, korrelogramja, spektrálsűrűség-függvénye.

ARIMA modellek becslései, a becslések tulajdonságai.

A periodogram kiszámításának gyakorlati kérdései. A gyors Fourier-transzformáció.

IRODALOM

- Tusnády G., Ziermann M. (szerk.): *Idősorok analízise*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.
T. W. Anderson: *The Statistical Analysis of Time Series*. Wiley, New York, 1971.
D. R. Brillinger: *Time Series: Data Analysis and Theory*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1975.
M. B. Priestley: *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press, New York, 1981.

ÉLETTARTAM-ADATOK ELEMZÉSE

(Melléklet)

Alapfogalmak, meghibásodási idők, cenzorálás típusai, összműködési idő. Hazárfüggvény, meghibásodási tényező.

Nevezetes élettartam-eloszlások. Exponenciális minta elemzése. Paraméterbecslés a Cox-modellben.

Nemparaméteres maximum likelihood. Túlélésfüggvény becslése cenzorált mintából: Kaplan-Meier-féle szorzatbecslés. Greenwood-formula.

Aktuárius becslés.

Arányos hazárd-modell. Teljes, feltételes, ill. parciális likelihood.

Öregedő eloszlások osztályai: IFR, IFRA, NBU. Tartalmazási kapcsolatok. Az osztályok zárt-sága gyenge konvergenciára és konvolúcióra.

Monoton és koherens rendszerek, a rendszer megbízhatósága. Az IFRA és NBU osztály zárt-sága. Az IFR osztály lezárása.

Sokk-modellek. A víztároló-modell. Öregedő tulajdonságok megőrződése.

IFRA eloszlásfüggvény ML becslése, inkonzisztencia.

IFR eloszlásfüggvény ML becslése, legnagyobb konvex minoráns. Konzisztencia.

A bioassay-probléma.

Az EM-algoritmus.

IRODALOM

Móri T.: *Élettartam-adatok elemzése*. Jegyzet. Budapest, 2006.

[online <http://www.math.elte.hu/~mori/elettartam.pdf>]

R. E. Barlow, F. Proschan: *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1975.

D. R. Cox, D. Oakes, *Analysis of Survival Data*. Chapman and Hall, London, 1984.

TÖBBDIMENZIÓS STATISZTIKAI MÓDSZEREK

(Melléktárgy)

A többdimenziós normális eloszlás. Feltételes és marginális eloszlás. Korreláció és regresszió, parciális korreláció, többszörös korreláció és regresszió.

Fisher–Bartlett tétel és megfordítása. A többdimenziós normális eloszlás paramétereinek becslése. A Wishart-eloszlás tulajdonságai. Hipotézisvizsgálat a várható értékkel, a korrelációs és a regressziós mátrixszal kapcsolatban.

Lineáris modell, lineáris becslések. Becsülhetőség, Gauss–Markov tétel. Lineáris hipotézis tesztelése normális lineáris modellben. Változószelekció, lépésenkénti regresszió. Robusztus regresszió.

Szórásanalízis. Fisher–Cochran tétel. Kovarianciaanalízis.

Főkomponens-analízis. Faktoranalízis. Kanonikus korreláció. A paraméterek becslése maximum likelihood módszerrel, a becslések tulajdonságai.

Osztályozás, legközelebbi társ módszer, klaszteranalízis.

Többdimenziós skálázás.

Kontingenciatáblázatok elemzése. A loglineáris modell. Maximum likelihood becslés a loglineáris modellben. A minimális diszkrimináló információ módszere. A maximális entrópia és minimális divergencia módszere. Iteratív arányos illesztés és EM algoritmus.

IRODALOM

Móri F. Tamás, Székely J. Gábor (szerk.): *Többváltozós statisztikai módszerek*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.

K. V. Mardia, J. T. Kent, J. M. Bibby: *Multivariate Analysis*. Academic Press, New York, 1979.

J. D. Jobson: *Applied Multivariate Data Analysis*, Vol. I. and II. Springer, New York, 1992.

11. ALGEBRA

A tematika elején szereplő CSOPORTELMÉLET és GYŰRŰELMÉLET blokk mindenkinek kötelező. Akinek az algebra *melléktárgya*, annak ez a vizsga teljes anyaga. Akinek az algebra a *főtárgya*, annak **emellett még** az alábbi kilenc VÁLASZTHATÓ BLOKK közül *háromból* kell fölkészülnie (ezeket tetszőlegesen választhatja).

11.1. Csoportelmélet.

- Szabad csoportok. Nielsen-Schreier-tétel. Csoportok megadása generátorokkal és definiáló relációkkal. Csoportvarietások, Birkhoff tétele.
- Csoportthatás. Permutációcsoportok, tranzitív, primitív, többszörösen tranzitív csoportok.
- Sylow-tételek. Nilpotens csoportok, centrális láncok. p -csoportok, Frattini-részecsoport, Burnside bázis-tétel.
- Feloldható csoportok, Hall-tételek.
- Abel-csoportok. A végesen generált Abel-csoportok alaptétele.
- Lineáris csoportok, $\text{PSL}(n, F)$ egyszerű.
- Véges csoportok lineáris reprezentációi a komplex számtest felett. Irreducibilis, teljesen reducibilis reprezentációk, Maschke-tétel, Schur-lemma. Karakterek. Reprezentációk ekvivalenciájának feltétele. Karaktertáblázat, ortogonalitási relációk.
- Burnside tétele: a p aqb rendű csoportok feloldhatók.
- Indukált reprezentációk, Frobenius-reciprocitás, Frobenius-csoportok.

11.2. Gyűrűelmélet.

- Asszociatív algebrák. Struktúraelmélet: radikál, féligegyszerűség. Láncföltételek; Hilbert bázistétele.
- Kategóriák, funktorok, természetes transzformációk. A Hom és a tenzor funktorok alaptulajdonságai (nem kommutatív gyűrűkre is). Funktorok egzaktsága, projektív és injektív modulusok.
- Lánckomplexusok, homológiacsoporthoz, homológiacsoporthoz hosszú egzakt sorozata.
- Kommutatív gyűrűk. Prím és primér ideálok. Ideálok fölbontásai. Hilbert-féle nullhelytétel.
- Alapfogalmak Lie-algebrákról. Feloldható és nilpotens Lie-algebrák. Gyökrendszerek, kvadratikus alakok. Dynkin-diagramok, a féligegyszerű komplex Lie-algebrák osztályozása.

11.3. Választható blokkok.

1. **Véges csoportok.** Bővítéselmélet. Szemidirekt szorzat, Schur-Zassenhaus-tétel. Transzfer és alkalmazásai, Burnside normál p -komplementum tétele. Véges p -csoportok: extraspeciális, reguláris, hatványteljes, maximális osztályú csoportok. Kommutátorkalkulus. Részecsoporthálók.

2. **Egyszerű csoportok.** A véges egyszerű csoportok osztályozása. A klasszikus egyszerű csoportok. Lie-típusú egyszerű csoportok. Sporadikus csoportok.

3. **Permutációcsoportok.** Többszörösen tranzitív csoportok leírása. Primitív permutációcsoportok, O’Nan-Scott-tétel. Koszorúszorzat. Prímfokú csoportok. Frobeniuscsoportok,

Zassenhaus-csoportok.

4. **Csoportreprezentációk.** Clifford-tételek. Karakterfokok. Karakterizációk az involúciók centralizátorával. Projektív reprezentációk, Schur-multiplikátor.

5. **Kommutatív algebra és algebrai geometria.** Lokalizálás. Diszkrét értékelésgyűrűk, egyéb nevezetes gyűrűosztályok. Krull főideál tétele. Az algebrai geometria elemei: affin és projektív algebrai sokaságok. Biracionális leképezések. Riemann-Roch-tétel.

6. **Nemkommutatív gyűrűk.** Artin- és Noether-gyűrűk. Noether-Skolem-tétel. Artinyűrűk általánosításai, egyéb speciális gyűrűosztályok. Goldie-elmélet. PI-algebrák. Centrálisan egyszerű algebrák, Brauer-csoport. Testelmélet, ferdetestek.

7. **Homologikus algebra.** Projektív és injektív modulusok szerkezete. Derivált funktorok, az Ext és a Tor funktor. Modulusok egzakt sorozatainak osztályai és az Ext funktor, Yoneda-szorzat. Homologikus dimenziók. Alkalmazások a reprezentációelméletben. Nevezetes sejtések és tételek.

8. **Univerzális algebra.** Varietások, szabad algebrák, Birkhoff tételei. Kongruenciaazonosságok, nevezetes Malcev típusú tételek. Klónok. Teljességi tételek, diszkriminátorvarietások. A kommutátorelmélet és a „szelíd kongruenciák” elméletének alapjai és néhány alkalmazása (például szabad spektrum, reziduálisan kicsi varietások, eldönthetőség, a követelménytéljesítési feladat algebrai vonatkozásai).

9. **Hálók.** Disztributív és moduláris hálók, Boole-algebák, dualitás disztributív hálók és poszetek között. Szabad hálók. Projektív geometriák és komplementumos moduláris hálók. Desargues-azonosság, koordinátázás. Hálók reprezentálása partícióhálókbán. Algebrai hálók.

12. SZÁMELMÉLET

Kombinatorikus számelmélet: A Brun szita és alkalmazásai. Schnirelmann addíciós tétel, a prímszámok bázist alkotnak. További addíciós tételek. Additív és multiplikatív Sidon sorozatok. Oszthatóság sorozatokban, primitív sorozatok. A "nagyobb szita". Hilbert-kocka sűrű sorozatokban, alkalmazása. Van der Waerden és Szemerédi számtani sorozatokra vonatkozó tétel, alkalmazás. Schur tétel.

Exponenciális összegek, Fourier analízis alkalmazásai a számelméletben: Additív és multiplikatív karakterek, kapcsolatuk, alkalmazások. Gauss-összegek. A Pólya-Vinogradov egyenlőtlenség. A legkisebb kvadratikus nem-maradék becslése. Kloosterman-összegek. A nagy szita analitikus, aritmetikai és karakter változata, alkalmazások. A számtani sorozatokban való eloszlás irregularitásai, karakterösszegek alsó becslése. Egyenletes eloszlás, Weyl-kritérium. Diszkrepancia, Erdős-Turán egyenlőtlenség, eloszlások irregularitásai. Van der Corput módszere, alkalmazások.

Additív számelmélet: Az Erdős-Fuchs tétel. Weyl összegek becslése. A Hardy-Littlewood módszer, a Waring probléma. A Goldbach probléma, Vinogradov tétel. 3 tagú számtani sorozatok sűrű sorozatokban. Összehalmazok és különbség-halmazok szerkezete és multiplikatív tulajdonságai. Partíciók.

Analitikus és multiplikatív számelmélet: A gamma függvény. A ζ -függvény (analitikus folytatás, függvényegyenlet, gyökmentes tartomány, nagyságrend, sűrűségi becslés). A prímszámtétel bizonyítása hibataggal. Prímek számtani sorozatokban, az L-függvények alkalmazása. A Siegel-Walfisz tétel. Prímek rövid intervallumokban, sűrűségi becslések alkalmazása. A Selberg szita. A Bombieri-Vinogradov tétel. A kis prímekből felépülő számok.

Számelméleti függvények, valószínűségszámítás a számelméletben: A Turán-Kubilius egyenlőtlenség. Az Erdős-Kac tétel. Multiplikatív függvények középértéke. Additív függvények határeloszlása. Additív és multiplikatív függvények karakterizációja, egyértelműségi halmazai. Valószínűségszámítási módszerek alkalmazása, összegsorozatok tanulmányozása. Algebrai számelmélet, diofantikus egyenletek: Algebrai számtestek és azok egészei. Kvadratikus és körosztási testek. Ideálok, alaptétel, Dedekind gyűrűk, következmények. Ideálosztályok, osztályszám, egységek, Dirichlet tétel. A Pell egyenlet, Mordell egyenlet, a Fermat sejtés speciális esetei, reguláris prímek. A diofantikus approximációelmélet elemei, lánctörtek, kapcsolatuk diofantikus egyenletekkel, a Thue-Siegel tétel. Baker effektív módszere. A geometriai számelmélet elemei.

Számítógépes számelmélet: Elemi műveletek és számelméleti alapeladatok időigénye. $n = pq$ esetén p, q meghatározása polinomiálisan ekvivalens $\varphi(n)$ -ével. Moduláris hatványozás. Faktorizáció algebrai azonosságokkal, Mersenne számok faktorizációja. A kriptográfia alapfogalmai, RSA, diszkrét logaritmus, a Diffie-Hellman kulcs csere rendszer. Prímtesztelés, pszeudoprímek. Faktorizáció, a faktorbázis algoritmus, a kvadratikus szita. Elliptikus görbék véges test felett, a Diffie-Hellman kulcs csere analogonja. Pseudo- véletlen bináris és $[0, 1)$ sorozatok, alkalmazásuk a kriptográfiában, illetve a Monte-Carlo módszer kapcsán. Számelméletből főtárgyként való vizsgázás esetén a fenti modulokból 4-et, melléktárgyként való vizsgázás esetén 2-t kell kiválasztani.

Irodalom:

- G. H. Hardy, E. M. Wright: An Introduction to the Theory of Numbers.
H. Halberstam, K. F. Roth: Sequences.
C. Pomerance, A. Sárközy: Combinatorial Number Theory (in: Handbook of Combinatorics).
S. W. Graham, G. Kolesnik: Van der Corput's Method of Exponential Sums, 1–44. oldal.
L. Kuipers, H. Niederreiter: Uniform Distribution of Sequences, 1-163 oldal.
R. C. Vaughan: The Hardy-Littlewood Method, 1–5., 7. és 10. fejezet.
H. Davenport: Multiplicative Number Theory.
P. D. T. A. Elliott: Probabilistic Number Theory, 3., 4., 5., 6., 9., 12. és 15. fejezet.
H. Pollard, H. G. Diamond: The Theory of Algebraic Numbers.
L. J. Mordell: Diophantine Equations.
T. N. Shorey, R. Tijdeman: Exponential Diophantine Equations.
N. Koblitz: A Course in Number Theory and Cryptography.

13. DISZKRÉT MATEMATIKA

A főtárgyként való vizsgáláshoz a 7 témakörből négyet kell kiválasztani. Melléktárgyként való vizsgáláshoz vagy egy a vizsgáztatóval megbeszélte monográfiából, vagy az alábbi témákból ket-
tőből lehet vizsgázni.

Gráfelmélet 1. Utak és körök, Euler vonal, Hamilton vonal. Ramsey típusú tételek a gráfelméletben, halmazelméletben, számelméletben és geometriában. Ramsey számok becslései. Turán típusú tételek. Nem-páros kizárt részgráfok, az extrém gráfok aszimptotikus struktúrája, adott részgráfok előfordulási száma. Erdős-Stone-Simonovits tétel. Páros kizárt részgráfok, utak és $K(p,q)$ Turán-száma. Véges geometriai és algebrai konstrukciók. Szemerédi regularitási lemma és alkalmazásai. Turán-Ramsey típusú tételek. Véletlen gráf modellek: Erdős-Rényi. Gráfparaméterek várható értéke és koncentrációja. Martingál-módszer. Küszöbfüggvény, evolúció $p = \log n/n$ környékén. Pszeudovéletlen gráfok.

Gráfelmélet 2. Párosítások páros és nem-páros gráfban, Tutte tétel. Stabil párosítások, Galvin tétel. Többszörös összefüggőség, Menger tétel és változatai. Minimax tételek. Pont- és élszínezések, Brooks és Vizing tétele. Kromatikus szám, kromatikus index, kritikus gráfok Sikba- és felületre rajzolhatóság, Kuratowski tétel, négyszíntétel. Minorok, Robertson-Seymour elmélet elemei. Kromatikus polinom és tulajdonságai. Perfekt gráfok. Nagy kromatikus számú, kis kört nem tartalmazó gráfok konstrukciója.

Halmazrendszerek. A klasszikusok: Sperner tétel, LYM egyenlőtlenség, Erdős-Ko-Rado, Erdős-Rado. Fisher egyenlőtlenség és De Bruijn-Erdős tétele. L-metsző extrémális halmazrendszerek, keresztben metsző halmazrendszerek. Metszet-tételek alterekre. Tiltott részstruktúrák. Árnyék, árnyék-metszet, a Kruskal-Katona tétel. Párosítások, lefogások és törtverziójuk hipergráfokra. Véletlen módszer: várható érték és második momentum. A lokális lemma és alkalmazásai. A tört- és egész optimum hányadosa. Vapnik-Chervonenkis dimenzió alaptétele. Színezések. Diszkrepancia, Beck-Fiala tétel, Spencer hatszoros szórás tétele.

Leszámláló kombinatorika. A generátorfüggvény-módszer. Közönséges és exponenciális generátorfüggvények. Szám- és halmazpartíciók, Bell-számok és Stirling-számok generátorfüggvénye, rekurziók ezekre. Módszerek azonosságok igazolására: WZ párok (Wilf és Zeilberger) módszere, Gosper algoritmus határozatlan összegzésre és a Gosper-Zeilberger algoritmus. Aszimptotikus leszámlálás, Lagrange inverzió, Cauchy módszer, nyeregpont módszer. Szita-módszerek. Részben rendezett halmaz Möbius-függvénye, inverziós formulák. A Pólya módszer.

Szimmetrikus struktúrák, algebrai módszerek. Blokkrendszerek létezése, szükséges feltételek, aszimptotikus eredmények. Steiner hármasrendszerek. t -rendszerek, Ray-Chaudhuri-Wilson egyenlőtlenség t -rendszerekre. Projektív síkok, Hadamard mátrixok, bisíkok. Konstrukciók, blokkrendszerek bővítése. Differencia-halmazok, multiplikátor-tétel. Gráfok és sajátértékeik. Kromatikus szám és sajátérték. Legnagyobb sajátérték. Expanderek. Erősen reguláris gráfok, barátság tétel. Távolság-reguláris gráfok, asszociációs sémák. Kódok, Hamming-kód. Példák. Perfekt kódok és blokkrendszerek. Golay kódok és Witt-féle blokkrendszerek.

Kombinatorikus optimalizálás, algoritmusok. Legrövidebb utat kereső algoritmusok. Gráfbejárások. Minimális költségű folyamatok. Poliéderek kombinatorika. Párosítások és poliéderek. Perfekt gráfok és poliéderek. Fülfelbontások, 2-összefüggő, erősen összefüggő és faktorkritikus gráfok. Adatrendezések. Közelítő algoritmusok. Leemelés és alkalmazásai. Fedés és pakolás fákkal és fenyőkkel, Matroidok, mohó algoritmus. Körmatroid, dualitás. Matroid metszet, összeg, alkalmazásai. A bonyolultságelmélet elemei. P és NP osztályok, NP teljesség.

Végtelen kombinatorika. Végtelen gráfok. Gráfok erdőkre bontása. Aharoni-Berger-Menger tétel. Kromatikus szám, a kiválasztási axióma szerepe. De Bruijn-Erdős tétel. Nagy-kromatikus, háromszög nélküli gráfok. Minden, megszámlálhatónál nagyobb kromatikus gráf tartalmaz négy hosszú kört. Halmazleképezések. Fodor Géza tétele. Majdnem diszjunkt halmazrendszerek, milyen számosságúak léteznek. Elekes-Hoffmann tétel. A Ramsey tétel általánosításai: Erdős-Rado tétel. Delta-rendszer lemma.

Irodalom:

- T. Beth, D. Jungnickel, J. Lenz, Design theory,
B. Bollobás, Random graphs
A. E. Brouwer, A. M. Cohen, Distance regular graphs,
Hajnal András, Hamburger Péter, Halmazelmélet,
R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, Konkrét matematika, Műszaki Kiadó
Frank András, Gráfelmélet, elektronikus jegyzet
Frank András, Matroidelmélet, elektronikus jegyzet
Hajnal Péter, Halmazrendszerek, Polygon Kiadó
Hajnal Péter, Gráfelmélet, Polygon Kiadó
Hajnal Péter, Összeszámlálási problémák, Polygon Kiadó
Lovász László, Kombinatorikai problémák és feladatok, Typotex Kiadó
J. H. van Lint, R. Wilson, A course in combinatorics, Oxford Univ. Press Handbook of Combinatorics
N. Alon, J. Spencer, The probabilistic method

14. HALMAZELMÉLET ÉS MATEMATIKAI LOGIKA

Vizsgázni lehet **A1-A6** vagy **B1-B6** közül 4 tétel választásával.

A1. Kombinatorikus halmazelmélet. Fák. Partíció relációk, halmazleképezések. A Todorčević-séta alkalmazásai. Stepping-up lemmák. Végtelen gráfok. Jónsson-algebrák.

A2. Forszolás. Láncfeltétel. Iterált forszolás. Klasszikus problémák. Martin axióma. Proper forszolás. Martin maximum.

A3. Nagy számosságok. Elérhetetlen, gyengén kompakt, Ramsey, mérhető számosságok. Leírhatatlanság. Elemi beágyazások. Extenderek. Belső modellek. Lefedési tételek. Woodin-, erősen kompakt, szuperkompakt, óriási számosságok. Nagyszámosság-forszolás. Szaturált ideálok.

A4. pcf-elmélet. A pcf-elmélet alapjai. Tranzitív generátorok. Becslések a hatványfüggvényre. Jónsson-algebrák.

A5. Halmazelméleti topológia. Alapvető számosságfüggvények (súly, sűrűség, cellularitás, π -súly, karakter, stb) közötti egyenlőtlenségek. Speciális térosztályok. Számosságfüggvények altereken, $\text{sup} = \text{max}$ problémák. Szorzatok. S - és L -terek.

A6. Leíró halmazelmélet. Borel és analitikus halmazok. Valódi és teljes analitikus halmazok. Uniformizációs, redukációs, szeparációs tételek. Borel halmazok eldöntöttsége. A determináltsági axióma.

B1. Modellelmélet. Teljességi, kompaktsági tétel. Típuselhagyási tétel. Interpolációs tételek. Szaturált, speciális, univerzális modellek. Kétszámosság tételek. Ultraszorzat. Ax-Kochen-Jersov elmélet. Véges modellek. Stabilitás, rang. Prím modellek. Morley kategoricitás tétele. Stabilitás spektrum tétel. Shelah main gap tétele. Definiálhatóságelmélet, Beth tétel, Chang-Makkai tétel. Beth tulajdonságok.

B2. Rekurzióelmélet. Rice tétele. Kreatív, szimpla halmazok. Post problémája. Szóproblémák. Degree-k. Jump-operáció. Turing gépek, Church tézis, kiszámíthatóság, eldönthetőség.

B3. Bizonyításelmélet és limitatív tételek. Gödel-féle nemteljességi tételek, Kalmár bizonyítása is. Tarski tétele az igazság definiálhatatlanságáról. Vágáselhagyás. Gentzen tétele. PA-ban bizonyíthatatlan tételek.

B4. Algebrai logika és operátoros Boole algebrák. Boole algebrák és univerzális algebrai alapismeretek (pl. diszkriminátor varietások, kongruencia disztributív varietások), relációk elméletei, reláció kalkulusok, többargumentmú relációk algebrai, reziduált Boole algebrák, operátoros Boole algebrák Tarski-Jonsson-Kripke típusú reprezentációja, nem normális eset reprezentálása parciális elérhetőségi relációkkal.

B5. Cilindrikus, poliadikus és relációalgebrák. Tetszőleges logika algebraizálása. Binér relációk algebrai, n -argumentumú relációk algebrai. Pozitív, negatív tételek. Daigneault-Monk- Keisler tétel (poliadikus algebra) és korlátai. Modellek, modellosztályok algebraizáltja, interpretációk. Cilindrikus relativizált halmazalgebrák eldönthetősége, $L_{\omega,\omega}$ korlátos szeletének véges modell tulajdonsága.

B6. Nem teljesen klasszikus logikák. Számítástudományi logikák, dinamikus logika, temporális logika, nyelvészeti logikai szemantika, intuicionista logika és Kripke-modellek, Lambek kalkulus és teljessége, multi-modális és nyíl logikák, kapcsolat a Jonsson-Tarski féle operátoros Boole algebrákkal. Eldönthetőségi kérdések.

Irodalom:

- P. Erdős, A. Hajnal, A. Máté, R. Rado: *Combinatorial Set Theory: Partition Relations for Cardinals*.
- S. Shelah: *Proper and Improper Forcing*.
- T. Jech: *Multiple forcing*.
- A. Kanamori: *The higher infinite*.
- M. Burke, M. Magidor: S.Shelah's pcf theory.
- I. Juhász: *Cardinal Functions, Ten Years Later*.
- Y. N. Moschovakis: *Descriptive set theory*.
- C. C. Chang, H. J. Keisler: *Model Theory*, North-Holland.
- S. Shelah: *Classification Theory*, North-Holland.
- H. Rogers: *Theory of Recursive Functions & Effective Computability*, McGraw-Hill, 1967.
- Handbook of Mathematical Logic*. North-Holland.
- J. D. Monk: Lectures on cylindric set algebras. In: *Algebraic Methods in logic and in computer science*, Banach Center Publications, Warsaw, 1993.
- L. Henkin, J. D. Monk, A. Tarski, H. Andréka, I. Németi: *Cylindric Set Algebras*, Lecture Notes in Mathematics 883, Springer, 1981
- Handbook of Philosophical Logic*, Kluwer. 1986, 1996.
- P. Hájek, P. Pudlák: *Metamathematics of first-order arithmetic*, Springer, 1993.