ALKALMAZOTT MATEMATIKA DOKTORI PROGRAM

SZIGORLATI TÉTELEK

Tartalomjegyzék

1. Sztochasztika

A tárgyak három témakörbe vannak csoportosítva: Valószínűségszámítás, Statisztika, Sztochasztikus folyamatok. Mindegyik témakör egy főtárgyat és néhány melléktárgyat tartalmaz az alábbiak szerint:

1. Valószínűségszámítás
   - Valószínűségi mértékek, valószínűségi változók
   - Független valószínűségi változók összegei
   - Martingálelmélet
   - Információelmélet
2. Statisztika
   - Nemparaméteres módszerek
   - Idősorok statisztikai elemzése
   - Többdimenziós statisztikai módszerek
   - Élettartam-adatok elemzése
3. Sztochasztikus folyamatok
   - Markov-láncok, Markov-folyamatok
   - Stacionárius folyamatok
   - Független növekményű folyamatok

A főtárgyak tematikája számozott szakaszokra bomlik. Ezek közül az egyik a jelölt választása szerint elhagyható.
A melléktárgyak nem választhatók a főtárgy témaköréből.

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

(Főtárgy)

1. Valószínűségi mértékek, valószínűségi változók.
Valószínűségi változók és vektorváltozók általános, ill. speciális esetben. Eloszlásuk, marginálisok. Kolmogorov-alaptétel. Eloszlásfüggvény és tulajdonságai. Abszolút folytonos eloszlás, sűrűségfüggvény és tulajdonságai. Valószínűségi változók függvényei.
Függetlenség. Borel–Cantelli lemma, Kolmogorov-féle 0 vagy 1 törvény és alkalmazásai.
Várható érték, szórás, kovarianciamátrix. Limesz és várható érték felcserélhetősége.
A valószínűségszámításban használatos konvergenciafajták és kapcsolatuk. Sztochasztikus, 1 valószínűségű, L_p-konvergencia. Egyenletes integrálhatóság. Gyenge konvergencia, relatív kompaktság és feszesség, Prohorov-tétel. Karakterisztikus függvény és tulajdonságai, inverziós formulák, folytonossági tétel.

2. Független valószínűségi változók összegei.
A nagy számok gyenge törvényei, Hincsin, Bernstein tételei. Feller tétele. Szükséges és elegendő feltétel a független esetben.
A nagy számok erős törvényei, a Kolmogorov-kritérium a független, azonos eloszlású esetben. Az iterált logaritmus-tétel.
Független tagú sorok. Két sor, illetve három sor tétel. A különböző konvergenciafajták ekvivalenciája (Lévy tétele).
Centrális határeloszlás-tétel. Független szériák sorozata, Lindeberg–Feller tétel. Ljapunov tétele. A konvergenciasebesség becslése, Esséen-egyenlőtlenség, Berry–Esséen-típusú tételek.

3. Feltételes várható érték, martingálok.
A feltételes várható érték általános fogalma, tulajdonságai és kiszámítási módjai. Reguláris feltételes valószínűség, feltételes eloszlás. Feltételes sűrűségfüggvény.
Martingál, szub- és szupermartingál. Definíció, alaptulajdonságok, példák. Megállási idő, megállított martingál. Doob alapegyenlőtlensége, maximálegyenlőtlenségek. Szubmartingálok Doob–Meyer felbontása, Krickeberg-felbontás.
Martingálok és szubmartingálok 1 valószínűségű konvergenciája. Átmetszési lemma. Egyenletes integrálhatóság, martingálok L_p-ben való konvergenciája.
Korlátos differenciájú martingálok konvergenciahalmazának jellemzése. A Borel–Cantelli lemma Lévy-féle általánosítása.
Reguláris megállási idők, Wald azonosság.

4. Információelmélet.
Az információmennyiség mértékszámai. Entrópia, I-divergencia és formális tulajdonságaik. Típusok és tipikus sorozatok. Forráskódolás változó hosszúságú és blokk-kódokkal.
A zajos csatorna fogalma, csatornakódolási tételek. Rate-distortion elmélet. Csatornakapacitás és kiszámítási módjai. Forrás- és csatornakódolás lineáris kódokkal. Több felhasználós hírközlő rendszerek: korrelált források egyedi kódolása, több bemenetelű csatornák.
Tömörítési modellek. A veszteségmentes tömörítés korlátai (Kraft–Fano egyenlőtlenség, entrópia). Gyakorlati veszteségmentes adattömörítő eljárások és a hatékonyságuk becslése (Shannon-, Gilbert–Moore-, Huffman-kód, blokk kódok, aritmetikai kód). Az írott szöveg tömörítésének korlátai. Markov forrás tömöríthetősége. A veszteséges tömörítések módszerei.

Irodalom

Mogyoródi J., Somogyi Á.: *Valószínűségszámítás I-II*. Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

Y. S. Chow, H. Teicher: *Probability Theory.* Springer, New York, 1978.

V. V. Petrov: *Sums of Independent Random Variables.* Springer, Berlin, 1972.

P. Hall, C. C. Heyde: *Martingale Limit Theory and its Applications.* Academic Press, New York, 1980.

Móri T.: *Diszkrét paraméterű martingálok.* Egyetemi jegyzet, ELTE, Budapest, 1999. [online `http://www.cs.elte.hu/~mori/erdekes.html`]

Csiszár I., Körner J.: *Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems.* Akadémiai Kiadó, Budapest és Academic Press, New York, 1981.

Győrfi L., Győri S., Vajda I.: *Információ és kódelmélet.* Typotex, Budapest, 2005.

VALÓSZÍNŰSÉGI MÉRTÉKEK, VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK

(Melléktárgy)

Valószínűségi változók és vektorváltozók általános, ill. speciális esetben. Eloszlásuk, marginálisok. Kolmogorov-alaptétel. Eloszlásfüggvény és tulajdonságai. Abszolút folytonos eloszlás, sűrűségfüggvény és tulajdonságai. Valószínűségi változók függvényei.

Események, eseményosztályok és valószínűségi változók függetlensége. Független kísérletek. Borel–Cantelli lemma, Kolmogorov-féle 0 vagy 1 törvény és alkalmazásai.

Várható érték, szórás, kovarianciamátrix. Limesz és várható érték felcserélhetősége.

A valószínűségszámításban használatos konvergenciafajták és kapcsolatuk. Sztochasztikus, 1 valószínűségű, L_p-konvergencia. A konvergenciafajták metrizálhatósága. Egyenletes integrálhatóság. Gyenge konvergencia, relatív kompaktság és feszesség, Helly–Bray-tétel, Prohorov-tétel. Karakterisztikus függvény és tulajdonságai, inverziós formulák, folytonossági tétel.

Irodalom

Mogyoródi J., Somogyi Á.: *Valószínűségszámítás I-II*. Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

Y. S. Chow, H. Teicher: *Probability Theory.* Springer, New York, 1978.

FÜGGETLEN VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK ÖSSZEGEI

(Melléktárgy)

A nagy számok gyenge törvényei, Hincsin, Bernstein tételei. Feller tétele. Szükséges és elegendő feltétel a független esetben.

A nagy számok erős törvényei, a Kolmogorov-kritérium a független, azonos eloszlású esetben. Marcinkiewicz–Zygmund-tétel. Az iterált logaritmus-tétel, Erdős–Feller–Kolmogorov–Petrovszkij-tétel.

Független tagú sorok. Két sor, illetve három sor tétel. A különböző konvergenciafajták ekvivalenciája (Lévy tétele). Chung–Fuchs-tétel.

Centrális határeloszlás-tétel. Független szériák sorozata, Lindeberg–Feller tétel. Ljapunov tétele. A konvergenciasebesség becslése, Esséen-egyenlőtlenség, Berry–Esséen-típusú tételek.

Irodalom

Mogyoródi J., Somogyi Á.: *Valószínűségszámítás I-II*. Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

Y. S. Chow, H. Teicher: *Probability Theory.* Springer, New York, 1978.

V. V. Petrov: *Sums of Independent Random Variables.* Springer, Berlin, 1972.

MARTINGÁLELMÉLET

(Melléktárgy)

A feltételes várható érték általános fogalma, tulajdonságai és kiszámítási módjai. Reguláris feltételes valószínűség, feltételes eloszlás. Feltételes sűrűségfüggvény.

Martingál, szub- és szupermartingál. Definíció, alaptulajdonságok, példák. Megállási idő, megállított martingál. Doob alapegyenlőtlensége, maximálegyenlőtlenségek. Szubmartingálok Doob–Meyer felbontása, Krickeberg-felbontás.

Martingálok és szubmartingálok 1 valószínűségű konvergenciája. Átmetszési lemma. Egyenletes integrálhatóság, martingálok L_p-ben való konvergenciája.

Korlátos differenciájú martingálok konvergenciahalmazának jellemzése. A Borel–Cantelli lemma Lévy-féle általánosítása.

Reguláris megállási idők, Wald azonosság.

Kvadratikus varáció. Differenciában való majorálás. Martingáltranszformált.

Martingáldifferenciák szériáira vonatkozó centrális határeloszlás-tételek. A konvergenciasebesség becslése.

Fordított martingál, tulajdonságok, konvergenciatétel. Felcserélhetőség, de Finetti tétele, a Hewitt–Savage 0 vagy 1 törvény. U-statisztikák.

Irodalom

Móri T.: *Diszkrét paraméterű martingálok.* Egyetemi jegyzet, ELTE, Budapest, 1999. [online `http://www.cs.elte.hu/~mori/erdekes.html`]

J. Neveu: *Discrete-Parameter Martingales.* North-Holland, Amsterdam, 1975.

Y. S. Chow, H. Teicher: *Probability Theory.* Springer, New York, 1978.

INFORMÁCIÓELMÉLET (Melléktárgy)

Az információmennyiség mértékszámai. Entrópia, I-divergencia és formális tulajdonságaik. Típusok és tipikus sorozatok. Forráskódolás változó hosszúságú és blokk-kódokkal.

A zajos csatorna fogalma, csatornakódolási tételek. Rate-distortion elmélet. Csatornakapacitás és kiszámítási módjai. Forrás- és csatornakódolás lineáris kódokkal. Több felhasználós hírközlő rendszerek: korrelált források egyedi kódolása, több bemenetelű csatornák.

Tömörítési modellek. A veszteségmentes tömörítés korlátai (Kraft–Fano egyenlőtlenség, entrópia). Gyakorlati veszteségmentes adattömörítő eljárások és a hatékonyságuk becslése (Shannon-, Gilbert–Moore-, Huffman-kód, blokk kódok, aritmetikai kód). Az írott szöveg tömörítésének korlátai. Markov forrás tömöríthetősége. A veszteséges tömörítések módszerei.

Irodalom

Csiszár I., Körner J.: *Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems.* Akadémiai Kiadó, Budapest és Academic Press, New York, 1981.
Győrfi L., Győri S., Vajda I.: *Információ és kódelmélet.* Typotex, Budapest, 2005.
D. Salomon: *Data Compression. The Complete Reference.* 3rd ed., Springer, New York, 2004.

STATISZTIKA

(Főtárgy)

1. Statisztikai mező.
Minta. Tapasztalati eloszlás és eloszlásfüggvény. Glivenko–Cantelli tétel. Tapasztalati sűrűségfüggvény (Parzen–Rosenblatt), hisztogram.
Dominált mértékosztályok. Halmos–Savage tétel. Elégségesség. Neyman-féle faktorizációs tétel. Minimális elégségesség.
Teljesség, korlátos teljesség. Basu tétele. Exponenciális eloszláscsalád. Lehmann tétele. Az exponenciális eloszláscsalád teljessége.
Fisher-információ, tulajdonságai. Kapcsolat az elégségességgel.

2. Becsléselmélet.
Veszteségfüggvény, rizikófüggvény. Torzítatlanság, megengedhetőség, minimaxitás. Optimális becslés. Blackwell–Rao tétel.
Jackknife, bootstrap. Cramér–Rao típusú egyenlőtlenségek.
Becslések aszimptotikus tulajdonságai. Konzisztens becslések, aszimptotikusan normális becslések. Bahadur tétele, szuperefficiens becslések.
Maximum-likelihood becslés. A ML-becslés konzisztenciája és aszimptotikus optimalitása.
Nemparaméteres ML-becslések. Kaplan–Meyer becslés cenzorált mintából. A Bayes-féle becslések és kiszámításuk. Formális Bayes-becslés, Jeffrey-féle nem-informatív a priori eloszlás.

3. Speciális becslések.
Invariancia, ekvivariáns becslések. Az eltolásparaméter Pitman-becslése, a becslés minimax tulajdonsága.
L-statisztikák, aszimptotikus normalitásuk. Az eltolás- és skálaparaméter optimális és aszimptotikusan optimális L-becslése.
M-becslések. Robusztusság. A Huber-féle becslés és minimax tulajdonsága.
Rangstatisztikák, R-becslések (pl. Hodges–Lehmann becslés).
Véges sokaságból való mintavétel. A Horvitz–Thompson becslés. Állandó együtthatós lineáris becslések megengedhetősége.

4. Hipotézisvizsgálat.
Statisztikai hipotézisek, próbák, véletlenített próbák. Egyenletesen legerősebb próbák. Torzítatlan próbák.
Neyman–Pearson lemma. Az erő aszimptotikája. Nagy eltérés-tételek (Cramér-, Chernoff-, Sanov-tétel) alkalmazása a statisztikában.
Monoton likelihood-hányadosú osztály, egyoldali ellenhipotézis. Kétoldali ellenhipotézis exponenciális családban. Hasonlóság, Neyman-struktúra. Hipotézisvizsgálat zavaró paraméterek jelenlétében. A normális eloszlás paramétereire vonatkozó klasszikus próbák optimalitása.
Általánosított likelihood-hányados próba, khi-négyzet próbák.
A tapasztalati eloszlásfüggvény Brown-hídhoz való konvergenciája. Gauss-folyamatok Karhunen–Loève sorfejtése. A klasszikus nemparaméteres próbák, Kolmogorov-, Szmirnov-, von Mises-próba. Blum–Kiefer–Rosenblatt próba.
Konfidenciahalmazok, -intervallumok. Kapcsolat a hipotézisvizsgálattal. A ML-becslésen és a likelihood-függvényen alapuló aszimptotikus konfidenciahalmazok.

Szekvenciális döntési módszerek. A Wald-féle szekvenciális eljárás.

5. Többdimenziós analízis

A többdimenziós normális eloszlás. Fisher–Bartlett tétel és megfordítása. A többdimenziós normális eloszlás paramétereinek becslése. A Wishart-eloszlás tulajdonságai. Hipotézisvizsgálat a várható értékkel, a korrelációs és a regressziós mátrixszal kapcsolatban.
Lineáris modell, lineáris becslések. Becsülhetőség, Gauss–Markov tétel. Lineáris hipotézis tesztelése normális lineáris modellben. Változószelekció, lépésenkénti regresszió. Robusztus regresszió.
Szórásanalízis. Fisher–Cochran tétel. Kovarianciaanalízis.
Főkomponens-analizis. Faktoranalizis. Kanonikus korreláció. A paraméterek becslése maximum likelihood módszerrel, a becslések tulajdonságai.
Osztályozás, legközelebbi társ módszer, klaszteranalízis.
Többdimenziós skálázás.
Kontingenciatáblázatok elemzése. A loglineáris modell. Maximum likelihood becslés a loglineáris modellben. A minimális diszkrimináló információ módszere. A maximális entrópia és minimális divergencia módszere. Iteratív arányos illesztés és EM algoritmus.

Irodalom

Móri F. Tamás, Székely J. Gábor (szerk.): *Többváltozós statisztikai módszerek.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.
Mogyoródi J., Michaletzky Gy. (szerk.): *Matematikai statisztika.* Egyetemi jegyzet. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1995.
Bolla M., Krámli A.: *Statisztikai következtetések elmélete.* Typotex Kiadó, Budapest, 2005.
A. A. Borovkov: *Matematikai statisztika.* Typotex Kiadó, Budapest, 1999.
E. L. Lehmann, *Theory of Point Estimation*, Wiley, New York, 1983.
E. L. Lehmann, *Testing Statistical Hypotheses*, 2nd ed. Wiley, New York, 1986.
O. J. Dunn, V. A. Clark: *Applied Statistics: Analysis of Variance and Regression*, 2nd ed. Wiley, New York, 1987.
S. Zacks: *Parametric Statistical Inference.* Pergamon Press, Oxford, 1981.
P. K. Andersen, O. Borgan, R. D. Gill, N. Keilding N.: *Statistical Models Based on Counting Processes.* Springer, New York, 1993.
J. D. Jobson: *Applied Multivariate Data Analysis*, Vol. I. and II. Springer, New York, 1992.

NEMPARAMÉTERES MÓDSZEREK

(Melléktárgy)

Nominális, ordinális skálájú megfigyelések. Kategorikus változók.

Permutációteszt. A binomiális és polinomiális próba. Kapcsolatuk a χ^2-próbával.

A változók közötti kapcsolat mérése. Fisher-féle egzakt teszt a függetlenségre. χ^2-próba. Spearman-féle rangkorreláció és teszt.

Homogenitásvizsgálat. Kolmogorov–Szmirnov-próba. Medián próba. Mann–Whitney-féle U-teszt. Wald–Wolfowitz-féle teszt. Wilcoxon-féle előjeles rangpróba. Wilcoxon-féle előjel-próba. Kruskal–Wallis-próba. Ansari–Bradley-próba.

Nemparaméteres szórásanalízis. Friedman-próba. Nemparaméteres t-próba (Tukey-teszt). Páronkénti összehasonlítás, Scheffé-féle nemparaméteres konfidenciaintervallum.

Nemparaméteres becsléselmélet. A Hodges–Lehmann statisztika. U-statisztikák. Nemparaméteres maximum-likelihood becslés. A Kaplan–Meier-féle szorzatbecslés. Monoton regresszió.

Irodalom

Vincze I., Varbanova M.: *Nemparaméteres matematikai statisztika. Elmélet és alkalmazások.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1993.
R. E. Barlow, D. J. Bartholomew, J. M. Bremner, H. D. Brunk: *Statistical Inference Under Order Restrictions.* Wiley, New York, 1972.
M. Hollander, D. A. Wolfe: *Nonparametric Statistical Methods.* Wiley, New York, 1973.
J. D. Gibbons: *Nonparametric Statistical Inference.* Marcel Dekker, Basel, 1971.
M. L. Puri, P. K. Sen, *Nonparametric Methods in Multivariate Analysis.* Wiley, New York, 1971.

IDŐSOROK STATISZTIKAI ELEMZÉSE

(Melléktárgy)

Az idősorok additív felbontása. A trend és a szezonalitás becslése.

Stacionárius idősorok modellezése. A várható érték és a kovariancia-, illetve korrelációfüggvény becslése. A korrelogram. A becslések aszimptotikus tulajdonságai. A becslések konzisztenciája négyzetesen integrálható spektrálsűrűségfüggvény esetén. Aszimptotikus normalitás lineáris folyamatok esetén.

A diszkrét spektrum becslése ismert és ismeretlen frekvenciák esetén. A periodogram. Várható értéke és kovarianciafüggvénye. Fisher-féle teszt, Grenander–Rosenblatt-féle teszt.

A spektrálsűrűség-függvény becslése. Konzisztens becslés konstruálása a periodogram simítása, illetve a tapasztalati kovarianciafüggvény súlyozásával. A simított periodogram aszimptotikus tulajdonságai.

A $P(\lambda)$-teszt.

Autoregresszív-mozgóátlag folyamatok. Folyamatok transzformációja. A transzformált folyamat tulajdonságai, korrelogramja, spektrálsűrűség-függvénye.

ARIMA modellek becslései, a becslések tulajdonságai.

A periodogram kiszámításának gyakorlati kérdései. A gyors Fourier-transzformáció.

Irodalom

Tusnády G., Ziermann M. (szerk.): *Idősorok analízise.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.
T. W. Anderson: *The Statistical Analysis of Time Series.* Wiley, New York, 1971.
D. R. Brillinger: *Time Series: Data Analysis and Theory.* Holt, Linehart and Winston, New York, 1975.
M. B. Priestley: *Spectral Analysis and Time Series.* Academic Press, New York, 1981.

ÉLETTARTAM-ADATOK ELEMZÉSE

(Melléktárgy)

Alapfogalmak, meghibásodási idők, cenzorálás típusai, összműködési idő. Hazárdfüggvény, meghibásodási tényező.

Nevezetes élettartam-eloszlások. Exponenciális minta elemzése. Paraméterbecslés a Cox-modellben.

Nemparaméteres maximum likelihood. Túlélésfüggvény becslése cenzorált mintából: Kaplan–Meyer-féle szorzatbecslés. Greenwood-formula.

Aktuárius becslés.

Arányos hazárd-modell. Teljes, feltételes, ill. parciális likelihood.

Öregedő eloszlások osztályai: IFR, IFRA, NBU. Tartalmazási kapcsolatok. Az osztályok zártsága gyenge konvergenciára és konvolúcióra.

Monoton és koherens rendszerek, a rendszer megbízhatósága. Az IFRA és NBU osztály zártsága. Az IFR osztály lezárása.

Sokk-modellek. A víztároló-modell. Öregedő tulajdonságok megőrződése.

IFRA eloszlásfüggvény ML becslése, inkonzisztencia.

IFR eloszlásfüggvény ML becslése, legnagyobb konvex minoráns. Konzisztencia.

A bioassay-probléma.

Az EM-algoritmus.

Irodalom

Móri T.: *Élettartam-adatok elemzése.* Jegyzet. Budapest, 2006.
[online `http://www.math.elte.hu/~mori/elettartam.pdf`]
R. E. Barlow, F. Proschan: *Statistical Theory of Reliability and Life Testing.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1975.
D. R. Cox, D. Oakes, *Analysis of Survival Data.* Chapman and Hall, London, 1984.

TÖBBDIMENZIÓS STATISZTIKAI MÓDSZEREK

(Melléktárgy)

A többdimenziós normális eloszlás. Feltételes és marginális eloszlás. Korreláció és regresszió, parciális korreláció, többszörös korreláció és regresszió.

Fisher–Bartlett tétel és megfordítása. A többdimenziós normális eloszlás paramétereinek becslése. A Wishart-eloszlás tulajdonságai. Hipotézisvizsgálat a várható értékkel, a korrelációs és a regressziós mátrixszal kapcsolatban.

Lineáris modell, lineáris becslések. Becsülhetőség, Gauss–Markov tétel. Lineáris hipotézis tesztelése normális lineáris modellben. Változószelekció, lépésenkénti regresszió. Robusztus regresszió.

Szórásanalízis. Fisher–Cochran tétel. Kovarianciaanalízis.

Főkomponens-analízis. Faktoranalízis. Kanonikus korreláció. A paraméterek becslése maximum likelihood módszerrel, a becslések tulajdonságai.

Osztályozás, legközelebbi társ módszer, klaszteranalízis.

Többdimenziós skálázás.

Kontingenciatáblázatok elemzése. A loglineáris modell. Maximum likelihood becslés a loglineáris modellben. A minimális diszkrimináló információ módszere. A maximális entrópia és minimális divergencia módszere. Iteratív arányos illesztés és EM algoritmus.

Irodalom

Móri F. Tamás, Székely J. Gábor (szerk.): *Többváltozós statisztikai módszerek.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.

K. V. Mardia, J. T. Kent, J. M. Bibby: *Multivariate Analysis*. Academic Press, New York, 1979.

J. D. Jobson: *Applied Multivariate Data Analysis*, Vol. I. and II. Springer, New York, 1992.

SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK

(Főtárgy)

1. Markov-láncok és -folyamatok.
A Markov-tulajdonság. Átmenetvalószínűségek. Chapman–Kolmogorov–féle egyenletek diszkrét és folytonos paraméterű esetben. Az állapotok osztályozása. Visszatérőség. Pozitív állapotok. Ergodtételek (az átmenetvalószínűségekre, függvényátlagra vonatkozóan). Stacionárius eloszlás.
Véges állapotterű Markov-láncok leírása pozitív mátrixokkal. Frobenius–Perron-tételek.
Születési és halálozási folyamatok.
Folytonos trajektóriájú Markov-folyamatok infinitezimális generátora. Az átmenetvalószínűség-függvény tulajdonságai, folytonosság, differenciálhatóság, Chapman–Kolmogorov-egyenlet.
Feller-folyamatok.
Potenciálok. Erdős–Kac-tétel.

2. Stacionárius folyamatok.
Erős és gyenge stacionárius folyamatok. A Gauss-folyamatok esete.
Véletlen ortogonális sztochasztikus mérték. Bochner–Hincsin tétel, Herglotz-tétel. Stacionárius folyamatok spektrálelőállítása. A spektrálmérték. A Gauss-féle eset.
Az L_2-izomorfia következményei. A mintavételezés sűrűségére vonatkozó Kotelnyikov–Shannon tétel. Ergodicitás.
A gyengén stacionárius folyamatok osztályozása a lineáris filtráció szerint. Wold-felbontás. Teljesen reguláris folyamatok spektrálsűrűség-függvénye.
Erősen stacionárius folyamatok, Keverés. A Birkhoff-féle ergodtétel erősen stacionárius folyamatokra.
A korrelogram és a periodogram. A spektrálfüggvény konzisztens becslése.

3. Mértékek konvergenciája függvényterekben.
Folytonos trajektóriájú folyamatok, folytonossági modulusok. Másodfajú szakadás nélküli függvények. A $C[0,1]$ és a $D[0,1]$ tér, feszesség ezekben a terekben.
A Wiener-mérték. A Wiener-folyamat különböző konstrukciói, tulajdonságai. A trajektóriák viselkedése.
A szummációs folyamatra vonatkozó gyenge invariancia-elv (Donsker-tétel). A tapasztalati eloszlásfüggvény, mint sztochasztikus folyamat konvergenciája a Brown-hídhoz.
Véletlen ortogonális mérték. Wiener-integrál és alkalmazásai.

4. Független növekményű folyamatok.
A független és stacionárius növekményű folyamatok karakterisztikus függvényének jellemzése, a Lévy–Hincsin tétel.
Független növekményű pontfolyamatok leírása véletlen pontmérték szerinti integrál alakjában.
Független növekményű folyamatok trajektóriális felbontása folytonos és ugró folyamat összegére. Független növekményű Gauss-folyamatok.
Független növekményű folyamatok funkcionáljainak várható értékére vonatkozó differenciálegyenlet.

Irodalom

S. Karlin, H. M. Taylor: *Sztochasztikus folyamatok*. Gondolat Kiadó, Budapest, 1985.
M. H. A. Davis: *Linear Estimation and Stochastic Control*. Chapman and Hall, London, 1977.
M. B. Priestley: *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press, New York, 1981.
Yu. Rozanov: *Stationary time series*. Holden Day, San Francisco, 1967.
K. L. Chung, K.L.: *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*. Springer, Berlin, 1967.
D. L. Isaacson, R. W. Madsen: *Markov Chains: Theory and Applications*, Wiley, New York, 1976.

MARKOV-LÁNCOK, MARKOV-FOLYAMATOK

(Melléktárgy)

Sztochasztikus folyamatok: Markov-tulajdonság, erős Markov-tulajdonság, homogenitás. Diszkrét paraméterű Markov-láncok: definíció, átmenetvalószínűség-mátrix, Chapman–Kolmogorov-egyenletek. Az állapotok osztályozása. Periódus, visszatérőség. Az átmenetvalószínűségek konvergenciája. Stacionárius eloszlás. Nagy számok törvénye és centrális határeloszlás-tétel irreducibilis, pozitív rekurrens Markov-lánc funkcionáljára.

Átmenetvalószínűségek tabu állapotokkal. Reguláris mérték, Doeblin hányados-tétele. Megfordított Markov-lánc. Elnyelődési valószínűségek. Perron–Frobenius-tételek.

Születési és halálozási folyamatok.

Folytonos trajektóriájú Markov-folyamatok infinitezimális generátora. Az átmenetvalószínűség-függvény tulajdonságai, folytonosság, differenciálhatóság, Chapman–Kolmogorov-egyenlet. Feller-folyamatok.

Potenciálok. Erdős–Kac-tétel.

Irodalom

S. Karlin, H. M. Taylor: *Sztochasztikus folyamatok*. Gondolat Kiadó, Budapest, 1985.
K. L. Chung, K.L.: *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*. Springer, Berlin, 1967.
D. L. Isaacson, R. W. Madsen: *Markov Chains: Theory and Applications*, Wiley, New York, 1976.
G. Kemeny, J. L. Snell: *Finite Markov Chains*. Van Nostrand, Princeton, 1960.

STACIONÁRIUS FOLYAMATOK

(Melléktárgy)

Erős és gyenge stacionárius folyamatok. A Gauss-folyamatok esete.

Véletlen ortogonális sztochasztikus mérték. Bochner–Hincsin-tétel, Herglotz-tétel. Stacionárius folyamatok spektrálelőállítása. A spektrálmérték.

Az L_2-izomorfia következményei. A mintavételezés alaptétele. Ergodicitás.

A gyengén stacionárius folyamatok osztályozása a lineáris filtráció szerint. Wold-felbontás és kapcsolata a spektrálmérték Lebesgue-felbontásával. Teljesen reguláris folyamatok spektrálsűrűségfüggvénye.

ARMA folyamatok. Racionális spektrálsűrűségfüggvénnyel rendelkező gyengén stacionárius folyamatok. Az ARMA folyamatok állapotegyenletes előállítása.

Erősen stacionárius folyamatok. A Birkhoff-féle ergodtétel.

A keverés különböző mérőszámai.

Irodalom

S. Karlin, H. M. Taylor: *Sztochasztikus folyamatok*. Gondolat Kiadó, Budapest, 1985.
T. W. Anderson: *The Statistical Analysis of Time Series*. Wiley, New York, 1971.
M. B. Priestley: *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press, New York, 1981.
Yu. Rozanov: *Stationary Time Series*. Holden Day, San Francisco, 1967.

FÜGGETLEN NÖVEKMÉNYŰ FOLYAMATOK

(Melléktárgy)

A független és stacionárius növekményű folyamatok karakterisztikus függvényének jellemzése. Korlátlanul osztható eloszlások karakterisztikus függvénye, Lévy–Hincsin formula. Poisson pontfolyamat és integrál. Az eloszlás tulajdonságainak (nemnegativitás, véges szórás) jellemzése a karakterisztikus függvény segítségével. Stabilis eloszlások karakterisztikus függvénye. Stabilis eloszlású változó generálása. Stabilis eloszlások farok-valószínűségének nagyságrendje.

Független növekményű pontfolyamatok leírása véletlen pontmérték szerinti integrál alakjában.

Független növekményű folyamatok trajektóriális felbontása folytonos és ugró folyamat összegére. Független növekményű Gauss-folyamatok.

Független növekményű folyamatok funkcionáljai. A várható értékére vonatkozó differenciálegyenlet.

Irodalom

I. I. Gihman, A. V. Szkorohod: *Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.

O. Kallenberg: *Random Measures*. Academic Verlag, Berlin, 1976.

V. V. Petrov: *Sums of Independent Random Variables*. Springer, Berlin, 1972.

2. Operációkutatás (diszkrét és folytonos optimalizálás)

Főtárgyak:

Kombinatorikus optimalizálás a következő három - melléktárgyként külön is választható - tárgy uniója: Poliéderes kombinatorika, Kombinatorikus optimalizálási struktúrák, Kombinatorikus algoritmusok.

Diszkrét optimalizálás és alkalmazásai a következő három - melléktárgyként külön is választható - tárgy uniója: Egészértékű programozás, Ütemezéselmélet és termelésirányítás, Approximációs algoritmusok.

Folytonos optimalizálás a következő két - melléktárgyként külön is választható - tárgy uniója: Lineáris programozás, Nemlineáris programozás.

További, csak melléktárgyként választható tárgyak: Sztochasztikus programozás, Mikro- és makrogazdaságtan, Döntéselmélet.

Poliéderes kombinatorika. Poliéderek és kúpok előállítása. Farkas lemma, dualitás tétel, optimalitási kritérium, Bázis és erős-bázis megoldás. Poliéderek csúcsai, oldalai.Teljesen unimoduláris mátrixok jellemzése és alkalmazásai: Kőnig-Egerváry tétel, Hoffman tétele megengedett áramlatokról. Minimális költségű áramok optimalitási feltétele. Teljesen duális egészértékűség, kapcsolat Hilbert bázisokkal. Kombinatorikus problémák poliéderei. Polimatroid metszet, szubmoduláris áramok poliédere (Lucchesi és Younger tétele, Nash-Williams irányítási tétele és általánosításai), szupermoduláris függvények fedése gráffal. Fenyők és gyökeresen k-élösszefüggő részgráfok poliédere, Schrijve szupermoduláris színezési tétele. Párosítás poliéderek.

Irodalom:
A. Schrijver, Combinatorial Optimization: Polyhedra and efficiency, Springer, 2003. Vol. 24 of the series Algorithms and Combinatorics,
B. Korte and J. Vygen, Combinatorial Optimalization: Theory and Algorithms, Springer, 2000,
W. J. Cook, W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank, and A. Schrijver, Combinatorial Optimization, John Wiley and Sons, Inc., 1998.
Frank A. Poliéderes Kombinatorika, jegyzet
Frank A., Matroidelmélet, jegyzet.

Kombinatorikus optimalizálási struktúrák. Párosítások nem-páros gráfban: Tutte tétele, Gallai lemma, Berge-Tutte formula, Edmunds-Gallai struktúra tétel. A kínai portás probléma: A T-kötésekre vonatkozó Seymour tétel és alkalmazásai. Diszjunkt út problémák. G+H Euler és a vágás feltétel elégséges (Okamura-Seymour, Okamura, Schijver, Seymour: G+H síkgráf, Rothschild-Whinston, Lomonoszov: H = K4, H = C5) . Mader A-utas tételei, élidegen utak 3 terminálpont esetén. Irányított eset, amikor D + H síkgráf. Összefüggőség: Lovász és Mader leemelési tételei és alkalmazásaik (di) gráfok összefüggésének növelésére: Watanabe-Nakamura növelési tétele és irányított ellenpárja. A Lucchesi-Younger tétel. 3-összefüggő gráfok előállítása, Kuratowski tétel. Nash-Williams irányítási tétele (erős alak).

Digráfok pontösszefüggésének növelése. Győri tétele intervallumokról.Színezések: Brooks és Vizing tételei. Galvin listaszínezési tétele, Thomassen síkgráf listaszínezése. Lovász perfekt gráf tétele.Fák és fenyők. Edmonds diszjunkt fenyő tétele és általánosításai. Tutte diszjunkt fa tétele. Fedés fákkal és fenyőkkel. Matroidok: Mohó algoritmus, a matroid metszet és partíciós tétel és a rájuk vonatkozó algoritmusok. Súlyozott matroid metszet tétel és algoritmus. Diszkrét szeparációs tétel. A szubmoduláris áram poliéder nemüressége. Gráfirányítási problémák: vegyes gráfok k-összefüggővé irányítása. Greene és Greene-Kleitman tételei részbenrendezett halmazok lánc és antilánc pakolásairól. Matroidok és szubmoduláris függvények kapcsolata.

Irodalom:
A. Schrijver, Combinatorial Optimization: Polyhedra and efficiency, Springer, 2003. Vol. 24 of the series Algorithms and Combinatorics,
B. Korte and J. Vygen, Combinatorial Optimalization: Theory and Algorithms, Springer, 2000,
Frank András, Kombinatorikus optimalizálási struktúrák (elektronikus jegyzet),
W. J. Cook, W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank, and A. Schrijver, Combinatorial Optimization, John Wiley and Sons, Inc., 1998.
Frank A., Matroidelmélet, jegyzet.
Frank A. , Gráfelmélet, jegyzet.
Frank A., Kombinatorikus optimalizálási struktúrák, jegyzet.
A Frank, Packing paths, circuits, and cuts - a survey, in: "Paths, Flows and VLSI-Layouts" (B. Korte, L. Lovász, H-J. Prömel, A. Schijver, eds) pp. 47–100. (1990) Springer Verlag.
A Frank., Connectivity augmentation problems in network design, in: Mathematical Programming: State of the Art 1994, eds., J. R. Bridge and K. G. Murty), The University of Michigan, pp. 34–63.
A Frank, A survay on T-joins, T-cuts, and conservative weightings, in: Combinatorics, Paul Erdős is Eighty (Vol 2) (1996) (D. Miklós, V. T. Sós, T.Szőnyi, eds.) Bolyai Society, Mathematical Studies 2, pp. 213–252.

Kombinatorikus algoritmusok. BFS, DFS, SFS bejárások, a DFS alkalmazásai (erősen összefüggő irányítás, topologikus sorrend, periférikus kör), az SFS tulajdonságai, max-vissza sorrend, Nagamochi-Ibaraki algoritmus, ritka tanúk, merevkörű gráfok, szimpliciális sorrend. Karger random algoritmusa. Legrövidebb utak, konzervatív súlyozás, potenciálok, negatív körök, minimális körátlag, Dijkstra algoritmus, leghosszabb út aciklikus digráfban (PERT). Minimális súlyú fenyő, merevkörű gráfban maximális súlyú stabil halmaz. Gomory-Hu fa és alkalmazásai. Hatékony algoritmus korlátos favastagságú gráfokra és közel-optimális fafelbontás. Dinamikus programozás (részösszeg probléma, hátizsák feladat, Floyd-Warshall, minimális trianguláció, maximális konvex részhalmaz, Steiner fák). Lokális keresés (maximális vágás, a képfelbontási feladat). Folyamok és áramok: Hoffman tétel, Ford és Fukerson tétele, Edmonds és Karp algoritmusa, skálázás, az előfolyam algoritmus. Minimális költségű folyamok, minimális költségű áram (Goldberg-Tarjan). Párosítások. A magyar módszer, Edmonds maximális elemszámú párosítás algoritmusa és minimális költségű teljes párosítása. A Tutte mátrix és alkalmazása.

Irodalom:
A. Schrijver, Combinatorial Optimization: Polyhedra and efficiency, Springer, 2003. Algorithms and Combinatorics, Vol. 24.

B. Korte and J. Vygen, Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms, Springer, 2000.
W.J. Cook, W.H. Cunningham, W.R. Pulleyblank, and A. Schrijver, Combinatorial Optimization, John Wiley and Sons. Inc., 1998.
E. Lawler, Kombinatorikus optimalizálás - hálózatok és matroidok, Műszaki Könyvkiadó.
Frank A., Kombinatorikus algoritmusok, egyetemi jegyzet.

Egészértékű programozás. Alapvető feladattípusok, modellezési technikák, LP relaxáció, Gomory vágósíkos algoritmusa. Korlátozás és szétválasztás, dinamikus programozás. Heurisztikus algoritmusok az utazó ügynök feladatra, approximációs eredmények. A Held-Karp korlát, módszerek a kiszámolására. Lagrange relaxáció. Hilbert bázisok, unimodularitás, teljes duális egészértékűség. Gomory-Chvátal vágások. Vágások az utazó ügynök feladatra. Rácsok, bázis-redukció. Fix-dimenziós egészértékű programozási feladat megoldása polinom időben. Dekompozíciós módszerek. Felemelés és vetítés.

Ütemezéselmélet és termelésirányítás. Ütemezés egy gépen: optimális megoldások alkalmas sorba rendezéssel. Ütemezés egy gépen: optimális megoldások dinamikus programozással, Hodgson algoritmus, közelítő megoldások LP relaxációból. Ütemezés párhuzamos és uniform gépeken: optimális megoldások megszakítható esetben és egységnyi hosszú feladatokra. Ütemezés párhuzamos és uniform gépeken: közelítő megoldások listás ütemezéssel, LP relaxációval. A shop modellek (open shop, flow shop, job shop): ütemezés párosításokkal, Johnson algoritmus, branch and bound heurisztika. A ládapakolási feladat: egyszerű közelítő algoritmusok, aszimptotikus polinomális approximációs séma. Termelésirányítás.

Irodalom:
Jordán Tibor: Ütemezéselmélet, egyetemi jegyzet, ELTE, 2007.
Racsmány Anna: Ütemezéselmélet, MKKE jegyzet, 1981.
Vizvári Béla: Bevezetés a termelés-irányítás matematikai elméletébe, ELTE jegyzet, 1994.
J. Blazewicz, K.H. Ecker, E. Pesch, G. Schmidt, J. Weglarz: Scheduling computer and manufacturing processes, Springer, 1996.
Peter Brucker: Scheduling algorithms, Springer, 2001.
Michael Pinedo: Scheduling (Theory, algorithms, and systems), Prentice Hall, 2002.

Approximációs algoritmusok. Halmazfedés, minimális súlyú lefogó ponthalmaz, körlefogó ponthalmaz (feedback vertex set), legrövidebb szupersorozat. Steiner fák, az utazó ügynök feladat. 'Multiway' vágás (él és pont változat), k-vágás, multivágás fában, többtermékes folyamok. A k-center probléma, üzemtelepítési feladat (facility location). Minimális maximális fokú feszítőfa, minimális méretű 2-él- és pont-összefüggő, illetve erősen összefüggő részgráf. Súlyozott esetek. Közelítő algoritmusok ütemezési feladatokra, ládapakolás.

Irodalom:
D. Hochbaum (ed.): Approximation algorithms for NP-hard problems, PWS Publishing, 1996.
V. Vazirani: Approximation algorithms, Springer, 2001.

Lineáris programozás.

Megengedettségi (fizibilitási) feladat megoldhatósága (Farkas lemma). A megoldás halmaz struktúrája és tulajdonságai. Bázis megoldások, extremális pontok. Bázis megoldás előállítása egy adott megoldásból. A megengedettségi feladat megoldása (szimplex- illetve criss-cross módszerrel). Belső pont létezésének feltétele. Belső pont előállítása. Alternatíva tételek (Gordan, Stiemke, Carver stb.).
Poliederek, politópok, kúpok. Poliedrikus kúpok. Végesen generált kúpok. Poláris. Farkas-Minkowski-Weyl tétele. Konvex poliéderek reprezentációs tétele (Motzkin. 1936). Politópok véges bázis tétele (Minkowski 1896). Caratheodory tétele (1911).
Lineáris programozás. Lineáris programozási primál és duál feladatok: megoldás halmazok, bázis megoldások, megengedett bázis megoldások. Gyenge dualitás tétel. Erős dualitás tétel és következményei. Lineáris programozási feladatok különböző alakjai: standard, szimmetrikus, önduális és a Karmarkar által használt alak. Hogyan nyerhetünk lineáris komplementaritási feladatot a (szimmetrikus) primál és duál lineáris programozási feladatokból ? Goldman-Tucker tétel.
Lineáris programozás pivot algoritmusai. Szimplex tábla. Szimplex módszer (Dantzig, 1947). Primál/duál degeneráltság, ciklizálás. Tucker példája, amelyen a szimplex módszer nem véges. Bland szabály. Megengedett induló bazis megoldás előallítása (kétfázisú szimplex módszer). Criss-cross módszer (Terlaky, 1984). Lexikografikus primál és duál szimplex módszer. Primál-duál szimplex módszer. Klee-Minty (1972) példája, amelyen a primál szimplex módszer exponenciális lépésszámú. Polinomiális algoritmusok. Komplexitás modell a lineáris programozásban. Ellipszoid módszer (Hacsián, 1979). Karmarkar projektív skálázású algoritmusa (Karmarkar, 1984).
Lineáris programozás belsőpontos elmélete. Beágyazás ferdén szimmetrikus (önduális) lineáris programozási feladatba. Belső pontos feltétel. Az optimális megoldáshalmaz kompaktságának elégséges feltétele. Newton-lépes és annak egyértelműsége. Belső pont létezésével ekvivalens állítások. Centrális út definíciója, egyértelműsége, határértéke, ha $\mu > 0$. Változók partíciója. Analitikus centrum. Sonnevend tétele (1986). Dikin-féle affin skálázású algoritmus. Önduális lineáris programozási feladat. Dikinellipszoid. Dikin-féle segédfeladat, átskálázás. Dikin lépéses algoritmus az önduális lineáris programozási feladatra, ε-megoldás. A dualitási rés csökkenésének a mértéke. Lépéshossz meghatározása a centrális út egy környezetében. Dikin-féle affin-skálázástú módszer konvergenciája, polinomialitása. Pontos megoldás előállítása (erősen polinomiális) kerekítési eljárással.
Útkövető algoritmusok I. Duál logaritmikus barrier módszer: teljes Newton-lépéses, elfogadható lépéses (adaptive update), nagy lépéses változatok.
Útkövető algoritmusok II. Primál-duál logaritmikus barrier módszer: teljes Newton-lépéses, elfogadható lépéses (adaptive update), prediktor-korrektor és nagy lépéses variáns. Érzékenység vizsgálat és dekompozíciós eljárások. Praméteres lineáris programozási feladat. Felsőkorlátos szimplex módszer. Érzékenység vizsgálat pivot illetve belsőpontos algoritmusokkal. Dantzig-Wolfe es Benders dekompozició.

Irodalom:
V. Chvatal, Linear Programming, W. H. Freeman and Company, New York. 1983.
G. B. Dantzig Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princenton, New Jersey, 1963.
Darvay Zs., Belső pontos módszerek a lineáris programozásban, egyetemi jegyzet. Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest. 1996. (http://www.cs.elte.hu/opres/egyebek.html)

K. Fukuda and T. Terlaky, Criss-cross methods: A fresh view on pivot algorithms, Mathematical Programming 79, 369–395, 1997.
K. G. Murty, Linear and Combinatorial Programming, John Wiley & Sons, 1976.
K. G. Murty, Linear Programming, John Wiley & Sons, 1983.
Prékopa A., Lineáiris Prograrmozás, Bolyai Janos Matematikai Tarsasag, Budapest, 1968.
Prékopa A., A Very Short Introduction to Linear Programming, RUTCOR, Rutgers University, pp. 1–41., 1992.
C. Roos, T. Terlaky, 1.-Ph Vial. Theory and Algorithms for Linear Optimization: An Interior Point Approach, John Wiley & Sons, 1997.
A. Schrijver, Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley & Sons, 1986.
Terlaky T., Egy véges criss-cross módszer és alkalmazásai. Tanulmányok 179/1986, MTA SZTAKI, Budapest, 1986

Nemlineáris programozás.
Konvex halmazok. Műveletek konvex halmazokkal. Halmazok konvex burka. Konvex halmazok topologikus tulajdonsága. Kúpok. Konvex kúpok. Recessziós kúpok és tulajdonságai. Projekció. Szeparációs tételek. Extremális halmazok és tulajdonságaik. Krein-Milman tétele. Adjungált kúpok és tulajdonságaik. Kúpok elválasztása. Krein tétel.
Konvex függvények. Konvex függvények jellemzése és tulajdonságaik (folytonosság, zárt konvex függvények). Jensen egyenlőtlenség. Szinthalmazok. Iránymenti deriváltak. Differenciálható konvex függvények. Folytonosan differenciálható konvex függvények és jellemzésük. Konvex függvények másodrendű jellemzése. Erősen konvex függvények és tulajdonságaik. Konvex függvények Lipschitz folytonossága. Dubovickij-Miljutyin 1. tétele és következményei. Self-concordant függvények. Általánosított konvex függvények. Függvények iránymenti deriváltjai. Szubgradiens és szubdifferenciál. Kvázi- és pszeudo-konvex függvények. Általánosított (log-, Ky Fan-, König-, kúp-, geodetikusan-) konvex függvények és jellemző tulajdonságaik.
Függvények szélsőérték-helyeinek jellemzése. Függvények lokális és globális minimuma. Feltétel nélküli és feltételes szélsőérték feladatok minimum helyeinek a szükséges és az elégséges jellemzése. Megengedett-, belső- és csökkenési irányok kúpja. Dubovickij-Miljutyin 2. tétele és következményei.
Nemlineáris egyenlőtlenség rendszerek és nemlineáris programozási feladatok. Megengedett megoldáshalmazok és azok struktúrája. Konvex-Farkas tétel. Következmények és általánosítások. Lagrange-függvény. Nyeregpontok. Lagrange-féle nyeregpont létezésének elégséges feltétele. Regularitási feltételek. Lagrange-féle nyeregpont létezésének szükséges feltétele. Általánosított Farkas- és dualitás tételek. Karush-Kuhn-Tucker feltételek. KKT- stacionárius pont létezésének szükséges feltétele. KKT-stacionárius pont optimalitásának elégséges feltétele és következménye. Konvex programozási feladat gyenge dualitás tétele. Közvetlen, erős dualitás tétele. Közvetett, erős dualitás tétel. Dualiáas elmélet. Lagrange-, Wolfe-, perturbált-duál feladatok. Konjugált függvények és deriváltjaik. Fenchel-féle dualitás elmélet. A dualitás elmélet illusztrálása: kúp lineáris programozás illetve szemidefinit programozás illetve szemidefinit programozási feladatok esetén. Példák konvex optimalizálási feladatokra, ahol pozitív dualitási rés adódik. Fixpont - és minimax tételek. Broweder-, Tyihonov-, Kakutani- es Ky-Fan-féle fixpont tételek. Neumann-, Karlin-, Shiffmann-, Kneser-, Ky Fan-, Nikaidó-féle minimax tételek. Kúpmódszer, Ky Fan féle metszettétel, minimax egyenlőtlenségek. Speciális nemlineáris optimalizálási feladatok. Hiperbolikus programozási feladat, alkalmazásai és speciális megoldó algoritmusaik (Martos-, Charnes-Cooper- illetve Anstreicher algoritmusa,

criss-cross módszer). Lineáris feltételes, konvex kvadratikus optimalizálási feladat, alkalmazásai és speciális megoldó algoritmusaik (pivot: Lemke-, Klafszky-Terlakyalgoritmus illetve belsőpontos módszerek: Dikin-féle affin skálazasú stb.).

Lineáris komplementaritási feladatok. Mátrixok osztályozása a lineáris komplementaritási feladatok megoldhatósága szempontjából: pozitív (szemi)definit-, P-, P_0-, elégséges vagy P^*-mátrixok. Megoldáshalmazok tulajdonságai (konvexitás, összefüggőség). Pivot algoritmusok elégséges mátrixok esetén: Lemke- illetve a criss-cross módszer. Murty algoritmusa P-mátrixok esetén és egyszerű komplexitási eredmény. Általánosított Goldman-Tucker tétel. Centrális út és tulajdonságai. Analitikus centrum, Sonnevend tétele. Newton-lépés egyértelműségének szükséges és elégséges feltétele. Belsőpontos módszerek P^*-mátrixok eseten (Dikin-féle affin skálázású algoritmus, potenciál függvényes módszer). A polinomialitás szükséges és elégséges feltétele. Az algoritmusok komplexitása. Pontos megoldások előállítása.

Speciális konvex programozási feladatok I. Geometriai programozási feladatok, alap lemma, „gyenge" dualitás tétel, elemi tulajdonságok. Primál célfüggvény korlátosságának szükséges és elégséges feltétele. Kanonikus és redukált geometriai programozási feladatok, dualitás elmélet, Lagrange-fele nyeregpont optimalitásának feltételei, regularitási tulajdonságok. A geometriai programozási feladatok logaritmikus self-concordance tulajdonsága.

Speciális konvex programozási feladatok II. Az l_p programozás fő lemmája és a feladattal kapcsolatos függvények elemi tulajdonságai. A feladat speciális esetei. Slater-reguláris l_p programozási feladatok, dualitás tételek, Lagrange-függvények, nyeregpont feltételek. Redukált l_p programozási feladatpár és regularitás az lp programozásban. Az l_p programozási feladatok logaritmikus self-concordance tulajdonsága.

Speciális konvex programozási feladatok III. A Young-, az entrópia és a szeparábilis programozási feladatok és alkalmazásaik. Konvex távolság függvények (entrópia, barrier és inverz barrier) tulajdonságai és kapcsolata konvex optimalizálási feladatokhoz és megoldó módszereikhez. Az általános entrópia programozás logaritmikus self-concordance tulajdonsága. A Young- és az entrópia programozás dualitás elmélete és megoldó módszereik. A Young-programozás kapcsolata a lineáris programozással. Feltétel nélküli szélsőérték feladatok megoldása. Egyenes menti optimalizálási módszerek. Több dimenziós keresés. Newton-módszer. Levenberg-Marquardt módszer. Konjugált irányok módszere: kvázi-Newton és konjugált gradiens módszer. Konvergencia sebesség és annak a feltételei.

Feltételes szélsőérték-feladatok megoldása I. Megengedett irányok módszere: Zoutendijk algoritmusa. SQP-módszerek. Redukált és vetített gradiens módszerek. Konvergencia sebesség és annak a feltételei.

Feltételes szélsőérték-feladatok megoldása II. Büntető- és barrier függvényes módszerek. Kvadratikus büntető függvényes módszer. Büntető függvények és tulajdonságaik. Logaritmikus büntető függvényes módszer. A középpontok módszere.

Feltételes szélsőértek-feladatok megoldása III. Nem sima (nem differenciálható) nemlineáris programozási feladatok megoldása. Duál módszerek: szubgradiens és vágó sík algoritmusok. Bundle módszerek. Simasági feltételek e konvex optimalizálásban. Self-concordance függvények kalkulusa. Relatív Lipschitz feltételes függvények. A Nyesterov-Nemirovski elmélet fő tétele.

Irodalom:

M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, C. M. Shetty, Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.

D. P. Bertsekas, Nonlinear Programming, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1995.

R. W. Cottle, J.-S. Pang, R. E. Stone, The Linear Complementarity Problem, Academic Press, Inc., Boston, 1992.
D. den Hertog, Interior Point Approach to Linear, Quadratic and Convex Programming: Algorithms and Complexity, PhD Thesis, Delft University of Technology, Delft, 1992.
D. den Hertog, C. Roos and T. Terlaky, The Linear Complementarity Problem, Sufficient Matrices and the Criss-cross Method, Linear Algebra and Its Applications, 187 (1993) 1–14.
D. den Hertog, F. Jarre, C. Roos and T. Terlaky, A Sufficient Condition for Self-Concordance with Application to Some Classes of Structured Convex Programming Problems, Mathematical Programming, 69 (1995) 75–88.
E. de Klerk, Interior Point Methods for Semidefinite Programming, PhD Thesis, Delft University of Technology, Delft, 1997.
J. B. G. Frenk, Convexity and Optimization, Econometric Institute, Erasmus University, Rotterdam, 1997.
F. Glineur, Self-concordant functions in structured convex optimization, Image Technical Report 0007, Faculte Polytechnique de Mons, Mons, 2000.
F. Jarre, The Method of Analytic Centers for Smooth Convex Programs, Grottenthaler Verlag Bamberg, Wfirzburg, 1989.
J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemarechal, Convex Analysis and Minimization, Algorithms Springer-Verlag, Berlin, 1993.
P. Kas and E. Klafszky, On the Duality of the Mixed Entropy Programming, Mathematische Operationsforschung und Statistics ser. Optimization, 27 (1993) 253–258.

Sztochasztikus programozás. Példák sztochasztikus programozási feladatokra. Osztályozásuk. Statikus és dinamikus modellek. A korlátok és célok megfogalmazása várható értékkel vagy valószínűséggel. Hasznossági és kockázati függvények. Egyváltozós, folytonos és invertálható F eloszlás-függvény esetén: teljesítmény-függvények értelmezése, jelentése és egymáshoz való viszonyuk. Statikus modellekmean / variance modell (Markowitz 1952), mean / risk modellek valószínűségi korlátok (Charnes, Cooper 1963, Prékopa 1970) Value-at-Risk minimalizálása (Kataoka 1963) feltételes várható értéket tartalmazó korlátok (Prékopa 1970), integrated chance constraints (Klein Haneveld 1986) Konvexitási meggondolások: bizonyítások várható érték esetén, problémafelvetés valószínűségek esetén. A simple recourse feladat (Dantzig 1955, Beale 1955). Megfogalmazás és matematikai jellemzés. Megoldó módszerek diszkrét eloszlás esetén: primál módszer (Wets 1983), duál módszer (Prékopa 1990). Megoldó módszerek folytonos eloszlás esetén: cutting-plane, bundle, level típusú módszerek. Logkonkáv mértékek és függvények. Logkonkáv mértékek alaptétele (Prékopa 1971). Példák logkonkáv sűrűségfüggvényekre. Valószínűségi korlátok logkonkávitása (Prékopa 1973). Valószínűségi korlátok kezelése Függvényértékek becslése elemi események együttes bekövetkezésének valószínűségére vonatkozó korlátok alapján: egyenlőtlenségek az egyedi valószínűségeket illetve a páros, hármas, stb. valószínűségeket felhasználó szita-formulák alapján (Boole 1854, Bonferroni 1937) éles korlátok a binomiális momentumok felhasználásával: visszavezetés a diszkrét momentum feladatra. Zárt alakban felírható korlátok (Dawson, Sankoff 1967; Prékopa 1988; Kwerel 1975; Boros, Prékopa 1989) Hunter felső korlátja (1976) cseresznyefákból származó korlátok (Prékopa, Bukszár, Szántai 1999). Szimulációs módszerek említése, ezeket a Szimuláció c. tárgyban elemezzük. Közelítő értékekkel dolgozó megoldó módszerek. Szimuláció:Diszkrét momentum feladatok. A binomiális és a hatvány momentum feladatok ekvivalenciája. Alsó/felső korlátok lineáris programozási feladat megoldásából. Duál megengedett bázisok jellemzése (Prékopa

1990). Zárt alakban felírható korlátok. Sztochasztikus dekompozíció (Higle, Sen 1991), feltételes sztochasztikus dekompozíció (Higle, Lowe, Odio 1990). Sztochasztikus kvázigradiens módszer (Ermoliev 1983) Kétlépcsős modellek.Tradícionális megfogalmazás (Dantzig, Madansky 1961), matematikai jellemzés (Wets 1974). Diszkretizációs eljárások (Kall 1980). Dekompozíciós megoldó módszerek diszkrét eloszlás esetéreL-shaped method (Van Slyke, Wets 1969)Regularizizált dekompozíció (Ruszczynski 1986) új típusú módszerek. Sztochasztikus módszerek említése, ezeket a Szimuláció c. tárgyban elemezzük. Valószínűségi korlátos modell és matematikai jellemzése (Prékopa 1973). Többlépcsős modellek: Megfogalmazás, matematikai jellemzés, megoldó módszer vázlata.

Irodalom:
Kall, P., Wallace, S.W., Stochastic Programming, Wiley, 1994.
Prékopa A., Stochastic Programming, Kluwer, 1995.
Birge, J.R., Louveaux, F.: Introduction to Stochastic Programming, Springer, 1997-1999.

Mikro- és makrogazdaságtan. Kereslet és kínálat; termelési függvény, Cobb-Douglas és Leontief technológia, a profitmaximalizálás gyenge axiómája, optimalitási feltételek; a költség minimalizálása; Hotelling lemma, LeChatelier elv; költségfüggvények; profit és költség viszonya; fogyasztói preferencia, hasznossági függvény, Marshall és Hicks keresleti függvénye, Roy azonosság; fogyasztói magatartás és kereslet, Engel görbe, Slutsky egyenlet; a versengő piac, adók hatása. Kétperiódusu egy-fogyasztós dinamikus egyensúlyi model.. A Robinson Crusoe-féle gazdaság modellje. A szabadkereskedelem előnyei. A gazdaságba való állami beavatkozás profit-csökkentő hatása.

Irodalom:
T. Mellár, Alkalmazott makroökonómia, JPTE, 1997.
Hal R. Varian, Mikrogazdaságtan, Aula Kiadó.

Döntéselmélet. Wald-, Hurwitz-, Savage- és Laplace- kritriumok véges sok alternativa esetére, Preferencia relációk, A Neumann-Morgenstern-féle utility elmélet, A Yager-féle OWA operátorok, A Saaty-féle AHP. Pareto optimalitás, Az epszilon korlátozások módszere, Az értékelő függvény módszer, Interaktiv módszerek, Lexikografikus optimalizálás, A referencia pontok módszere, A trade-off módszer.

Irodalom:
K.Miettinen, Nonlinear Multiobjective Optimization, (Kluwer, 1999).
S. French, Readings in Decision Analysis, (Chapman and Hall, London, 1990).

3. Numerikus módszerek

Mindegyik alpont önállóan melléktárgyként választható.
Aki főtárgyként választja a Numerikus módszerek tárgyat, annak az alábbi melléktárgyakból ötöt kell választania, a vizsgáztatóval illetve a témavezetővel való egyeztetetés alapján. (Javaslom, hogy az 1. és 4. téma legyen kötelező, azaz lényegében három tárgy megválasztása legyen lehetséges.)

1. Lineáris algebrai egyenletrendszerek numerikus megoldása
Lineáris algebrai egyenletrendszerek direkt megoldási módszerei. (Gauss módszer, főelem kiválasztás, párhuzamosítás, kondíciószám és a numerikus stabilitás, speciális mátrixú rendszerek)
Lineáris algebrai egyenletrendszerek iterációs megoldási módszerei. (Nevezetes egylépéses módszerek, konvergencia, az optimális paraméterek megválasztása. Az inkomplett LU felbontás. A konvergencia sebességének becslése.)
Nagyméretű rendszerek kezelése. (Direkt módszerek blokkosított és általános ritka mátrixú egyenletek megoldására,. Iterációs módszerek, prekondicionálás.)
Az M mátrixok és tulajdonságaik. Megoldási módszerek M-mátrixikon. Alkalmazások a parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásában.

2. Interpoláció, függvények közelítése.
Lagrange és Hermite típusú interpoláció, hibabecslések. Az interpolációs alappontok optimális megválasztása. Spline interpoláció, a módszer konvergenciája. A legkisebb négyzetes közelítés. Numerikus deriválás véges differenciák módszerével. Az eljárás stabilitásának vizsgálata. Interpolációs függvényekkel való deriválás.
Egyszerű közelítő integrálási formulák. Hibabecslés, Romberg módszer. Interpolációs kvadratúra képletek, konvergenciájuk. Összetett kvadratúra-képletek. Gauss típusú numerikus integrálás. Speciális integrandusok kezelése. Trigonometrikus interpoláció, gyors Fourier transzformáció.

3. Nemlineáris egyenletek és egyenletrendszerek megoldása.
A gyökök létezésének vizsgálata. Az egyszerű iterációs eljárások és konvergenciájuk. Newton módszer és változatai, konvergencia-rend, lokális konvergencia. Monoton konvergencia.
Egyenletrendszerek megoldása. Egyszerű iteráció, gradiens típusú módszerek, egyenletrendszer megoldásának kapcsolata minimalizálással, konvex függvény minimalizálása. A Newton módszer és konvergenciája. A Jacobi mátrix meghatározása, Broyden módszer. Kvázi-Newton-módszerek. Lokális és globális konvergencia, csillapított Newton-módszer. Prekondicionálás.

4. Közönséges differenciálegyenletek kezdetiérték-feladatának numerikus megoldása.
Egylépéses egyszerű módszerek, konzisztencia és konvergencia fogalma. Zero-stabilitás és konvergencia. Explicit Runge-Kutta típusú módszerek. A másodrendű módszerek analízise. Beágyazott RK módszerek. Hibabecslő formulák.
Többlépéses módszerek. Adams-módszer, középponti szabály, prediktor-korrektor típusú eljárások. Konzisztencia és konvergencia. Hibabecslések.
Merev rendszerek numerikus megoldása. Nemlineáris rendszerek kezelése, stabilitása.

5. Közönséges differenciálegyenletek peremértékfeladatának numerikus megoldása.
Fizikai példák. Véges differenciás eljárások, alapvető formulák. Magasabb rendű approximációk, diszkrét Green függvény. Változó együtthatójú egyenletek.
A belövéses módszer, algoritmusa nemlineáris, kétpontos feladatokra. Ismételt belövéses módszer lineáris feladatokra. A többpontos peremérték feladatok.
Véges elemes eljárások alkalmazása. A véges elemek matematikai alapjai, alkalmazása egy modellfeladatra. Konvergencia vizsgálata.

6. Elliptikus típusú parciális differenciálegyenletek peremérték feladatának numerikus megoldása.
Poisson-egyenlet megoldása véges differenciák módszerével. A diszkrét maximum-elv. Harmadrendű peremfeltételek esete. A multigrid módszer, algoritmusa, simító tulajdonsága és konvergenciája.
A Laplace operátor sajátérték feladatának megoldása véges differenciák módszerével, a diszkrét Lapace operátor tulajdonságai.
Véges elemek módszere elliptikus feladatok megoldására. A variációs feladat, megoldhatósága. Véges elemek két és három dimenzióban. A módszer pontossága, konvergenciája. Numerikus integrálás a véges elemek alkalmazásánál. A véges elemes lineáris egyenletrendszerek megoldásának speciális kérdései (tartomány dekompoziciós eljárás, párhuzamosítás).

7. Parabolikus típusú parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása
A vegyes feladat megoldása véges differenciák módszerével. A súlyozott séma és tulajdonságai. A harmadik peremfeltétel esete. Parabolikus diszkrét maximum elv és következményei a véges differenciás sémára. Stabilitás, konvergencia. Többdimenziós parabolikus feladatok numerikus megoldása, az ADI módszer.
Hiperbolikus feladatok megoldása. A hullámegyenlet approximációja súlyozott sémával. A Courant feltétel, A Neumann-féle stabilitási vizsgálat. A háromréteges lineáris egyenletrendszerek megoldásának speciális kérdései (stabilitási vizsgálat).

8. Fizikai alkalmazások, numerikus modellezés.
A Maxwell, Navier-Stokes, konvekciós-diffúziós, hővezetési, reakció kinetikai egyenlet vizsgalata, numerikus megoldásának kérdései. Algortimikus realizálás, programcsomagok használata.

4. Közönséges differenciálegyenletek

Főtárgy: 4 blokk.
Melléktárgy: 2 blokk

1. Közönséges differenciálegyenletek klasszikus elmélete. Megoldások létezése és egyértelműsége, Gronwall lemma. Lineáris rendszerek. Másodrendű lineáris differenciálegyenletre vonatkozó peremértékproblémák.
Stabilitási fogalmak; lineáris differenciálegyenlet-rendszer stabilitás vizsgálata: stabil, instabil, centrális altér, egyensúlyi pont stabilitás vizsgálata linearizálással. Stabilitásvizsgálat Ljapunov módszerével. Aszimptotikus viselkedés, határhalmazok, vonzó halmaz, a Poincaré-Bendixson elmélet.
Periodikus megoldás stabilitás vizsgálata, Poincaré leképezés.

2. Dinamikai rendszerek. Dinamikai rendszerek topologikus osztályozása. Kiegyenesítési tétel, lineáris rendszerek topologikus osztályozása, Hartman-Grobman tétel, nemlineáris rendszerek osztályozása a Poincaré-féle normálforma segítségével. Stabilis, instabilis, centrális sokaság. Lokális vizsgálat periodikus megoldások körül, periodikus megoldás stabilis, instabilis, centrális sokasága.

3. Bifurkáció elmélet, káosz. Dinamikai rendszerek bifurkációi. Nyereg-csomó és Andronov-Hopf bifurkáció. Két-kodimenziós bifurkációk. Strukturális stabilitás. Morse-Smale rendszerek. Diszkrét dinamikai rendszerek. Periodikus pályák stabilitása. Kaotikus pálya fogalma, példák. Káosz a Lorenz-féle differenciálegyenletben. Attraktorok típusai, kaotikus attraktor.

4. Operátor félcsoportok és alkalmazásaik differenciálegyenletekre. Végtelen dimenziós fázisterű dinamikai rendszerek. Operátor félcsoportok, generátorok. Absztrakt Cauchy-feladatok, egzisztencia tételek. Stabilitás, operátor félcsoportok aszimptotikus tulajdonságai. Késleltetett argumentumú differenciálegyenletek, alkalmazások. Reakció-diffúzió egyenletek, utazó hullámok létezése és stabilitása.

5. Parciális differenciálegyenletek

Főtárgy: 6 blokk
Melléktárgy: 3 blokk választható.

1. Disztribúcióelméleti alapfogalmak. Reguláris disztribúció, tartó. Algebrai műveletek, deriválás, direkt szorzat, konvolúció. Állandó együtthatós lineáris parciális differenciálegyenletek alapmegoldása.
Fourier-transzformáció temperált disztribúciók körében, az L^1 és L^2 térben. Paley-Wiener-tétel, általánosítás disztribúciókra. Alkalmazás alapmegoldások előállítására.

2. Szoboljev-terek. Definíció, alaptulajdonságok. Kiterjesztés, ekvivalens normák a $H_1^0(\Omega)$ térben. Nyom operátor. Kompakt beágyazási tételek. A $H^k(\mathbb{R}^n)$ és $H^k(\mathbb{R}^n_+)$ tér jellemzése a Fourier-transzformációval, a Szoboljev-térbeli függvények simasága. Anizotróp Szoboljev-terek.

3. Lineáris elliptikus egyenletekre vonatkozó peremérték feladatok. A klasszikus és általánosított peremérték feladatok megfogalmazása. Szimmetrikus egyenletekre vonatkozó általánosított peremérték feladatok és sajátérték feladatok, a sajátértékek és sajátfüggvények tulajdonságai. A peremérték feladatok és sajátérték feladatok variációs értelmezése. Alternatíva tétel általános alakú elliptikus peremérték problémákra.

4. Kezdeti-peremérték feladatok lineáris hiperbolikus és parabolikus egyenletekre. A klasszikus és általánosított feladatok értelmezése. A megoldás egyértelműsége. A megoldások létezésének bizonyítása és előállítása a Fourier-módszerrel és a Galjorkin-módszerrel.

5. Nemlineáris elliptikus egyenletek. A monoton típusú operátorok elméletének alapjai. Monoton és pszeudomonoton operátorokra vonatkozó egzisztencia tételek, alkalmazás nemlineáris elliptikus egyenletekre. Elliptikus variációs egyenlőtlenségek.

6. Nemlineáris parabolikus egyenletek. Absztrakt evolúciós egyenletek vizsgálata a monoton típusú operátorok elméletével. Monoton és pszeudomonoton operátorokkal tekintett kezdeti érték feladatok, alkalmazás nemlineáris parabolikus egyenletekre vonatkozó kezdeti-peremérték feladatokra. Parabolikus funkcionál egyenletek.

Matematika Doktori Iskola szigorlati tematikája
Funkcionálanalízis (alkalmazott matematikus)

1. A funkcionálanalízis néhány alapfogalma és tétele. Banach-terek. Nevezetes függvényterek, egyváltozós Szoboljev-terek. Folytonos lineáris funkcionálok Banach-térben, duális és második duális tér, reflexív Banach-terek. A Hahn-Banach- és "kis" Hahn-Banach-tétel. Folytonos lineáris operátorok Banach-térben. A Banach-Steinhaus-tétel, következményei és alkalmazásai. A nyílt leképezés tétele, Banach-homeomorfizmus-tétel. A zártgráf-tétel. Hilbert-terek alaptulajdonságai, ortogonalitás. Riesz tétele az ortogonális felbontásról. Fourier-sorok Hilbert-térben. Folytonos lineáris funkcionálok Hilbert-térben, Riesz reprezentációs tétele.

2. Korlátos lineáris operátorok Hilbert-térben. Adjungált operátor. Projektorok, önadjungált, izometrikus és unitér operátorok tulajdonságai. Sajátértékek, spektrum. Reguláris leképezések, a spektrum kompaktsága. Operátorhatványsorok, a spektrum nem üres volta. Kompakt operátorok Hilbert-térben. Kompakt önadjungált operátorok sajátértékei és sajátvektorai. Fredholm-féle alternatívatétel, Hilbert-Schmidt-sorfejtés. Spektráltétel korlátos normális operátorokra, az operátorkalkulus elemei.

3. Lineáris operátoregyenletek megoldhatósága Hilbert-térben. Megoldhatósági tételek egyenletes pozitivitási (koercivitási) feltételek esetén. Bilineáris formák Riesz-reprezentációja, Lax-Milgram-tétel. Kvadratikus funkcionál, minimumának létezése, kapcsolata operátoregyenletekkel. A $H^1(\Omega)$ és $H^1_0(\Omega)$ Szoboljev-terek. Ekvivalens normák $H^1_0(\Omega)$-ban, beágyazási tételek, H^1-függvények nyoma. Integrálegyenletek megoldhatósága pozitív magfüggvény esetén. Elliptikus peremértékfeladatok gyenge megoldása Szoboljev-terekben.

4. Nem korlátos lineáris operátorok Hilbert-térben. Szimmetrikus operátorok, az adjungált fogalma, önadjungált operátorok. Nem korlátos pozitív lineáris operátorok energiatere, gyenge megoldás, Friedrich-kiterjesztés. Sturm-Liouville-operátorok, elliptikus differenciáloperátorok, példák önadjungált esetre. Szimmetrikus operátorok kompakt inverzzel, sajátértékek, Rayleigh-hányados, sorfejtés. Cayley-transzformált, defektindex, spektráltétel nem korlátos önadjungált operátorokra.

5. Nemlineáris funkcionálanalízis. Nemlineáris operátorok alapfogalmai normált terekben, hemi- és bihemifolytonos operátorok, Gateaux- és Frechet-derivált. Potenciáloperátorok, a potenciál fogalma és létezésének feltételei. Monoton operátorok és konvex funkcionálok. Dualitás reflexív Banach-terekben. Variációs elv nemlineáris operátoregyenletre, funkcionál minimumának létezése. Nemlineáris leképezés bijekció voltának feltételei, fixponttételek, monoton operátoregyenletek megoldhatósága. Alkalmazás nemlineáris differenciálegyenletekre.

6. Közelítő módszerek a funkcionálanalízisben. Ritz-Galjorkin-féle projekciós módszerek lineáris operátorokra Hilbert-térben, a hiba ortogonalitása. A végeselem-módszer elméleti alapjai. Ritz-Galjorkin-módszer monoton nemlineáris operátorokra. Iterációs módszerek. Gradiens-módszer Hilbert-térben lineáris operátorokra a kvadratikus funkcionál alapján, ill. nemlineáris monoton potenciáloperátorokra. A konjugált gradiens-módszer szimmetrikus és nem szimmetrikus lineáris operátorokra, kompakt perturbációk és szuperlineáris konvergencia. Nem folytonos operátor esete, prekondicionálás és energiatér. A Newton-Kantorovics módszer nemlineáris operátorokra Banach-térben. Csillapított és inegzakt változat.

7. Topologikus vektorterek, Banach-algebrák, harmonikus analízis. Topologikus vektorterek előállításai, lokálisan konvex terek, szigorú induktív limeszek. A Hahn-Banach tétel. Krein-Milman tétel. Banach-Alaoglu tétel. Banach ekvifolytonosság tétele. A Banach-Steinhaus tétel általános formája, a dualitáselmélet elemei. Banach-algebrák, Gelfand-reprezentáció, holomorf függvényszámítás. C^*-algebrák. Stone-tétel. Banach *-algebrák ábrázolásai, GNS-konstrukció. Gelfand-Najmark tételek. Topologikus csoportok, Haar-mérték. A harmonikus analízis alapjai, lokálisan kompakt csoportok folytonos unitér ábrázolásai.

Megjegyzések.

(i) Aki főtárgyként választja a Funkcionálanalízis tárgyat, annak a fenti témakörök közül ötből kell felkészülnie: az 1-3. témakörök kötelezők, további kettő a vizsgáztatóval ill. a témavezetővel való egyeztetés alapján választható.

(ii) Mindegyik alpont önállóan melléktárgyként választható.