p-adikus Hodge-elmélet

Pigler Donát

témavezető: Zábrádi Gergely

2023. június 2.

Motivációk

- cél: $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ reprezentációinak megértése
- $P \lhd \mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ prím p fölött, $G_P := \{\sigma \in G_{\mathbb{Q}} \mid \sigma(P) = P\}$ felbontási részcsoport
- $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p} \quad \rightsquigarrow \quad$ konjugáltság erejéig egyértelmű: $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}) \rightarrowtail \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \cong G_P \leq \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$$

- módosult cél: G_P hatásának megértése $\mathbb{Q}_p$ fölötti vektortereken

Bevezetés

- $\Gamma = \varprojlim_i \Gamma_i$ provéges csoporton (Γ_i-k véges csoportok) adott a provéges topológia: kompakt, Hausdorff és totálisan összefüggéstelen.

Definíció

Γ provéges csoport *p-adikus reprezentációjának* nevezünk egy V véges dimenziós $\mathbb{Q}_p$-vektorteret, amelyen Γ folytonosan és lineárisan hat. Γ p-adikus reprezentációinak kategóriája $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\Gamma)$.

Állítás

L/K Galois, $\mathscr{K} = \{K \leq K_\alpha \leq L \mid K'/K \text{véges, Galois}\}$ tartalmazás szerint rendezve. Legyenek a leképezések $\mathrm{Gal}(K_\alpha/K) \to \mathrm{Gal}(K_\beta/K)$ minden $K_\alpha, K_\beta \in \mathscr{K}$-ra és $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(K_\alpha/K)$ a megszorítás. Ekkor

$$\mathrm{Gal}(L/K) \simeq \varprojlim_{K_\alpha \in \mathscr{K}} \mathrm{Gal}(K_\alpha/K)$$

Bevezetés

- Galois-csoporton a Krull-topológia: $\mathrm{Gal}(L/K_\alpha)$ halmazok nyílt környezetbázisát adják 1-nek

Definíció

K *p-adikus test*, ha $\mathrm{char}\, K = 0$ és K teljes egy rögzített diszkrét értékelésre nézvést, továbbá $k = \mathscr{O}_K/\mathscr{M}_K$ maradékteste tökéletes és $\mathrm{char}\, k = p$. Pl. $\mathbb{Q}_p$ egy véges bővítése; az inerciacsoport fixtestének telítettje, nem az: $\overline{\mathbb{Q}}_p, \mathbb{C}_p$

- ***p*-adikus Hodge-elmélet:** $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ p-adikus reprezentációinak vizsgálata

Példa: Tate-csavarás

$K/\mathbb{Q}_p$ véges $\mathbb{Q}_p^{un}$ maximális elágazásmentes bővítése $\mathbb{Q}_p$-nak K-ban, $\boldsymbol{\mu}_{p^n} =: \overline{K}$ p^n-edik egységgyökeinek csoportja és $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty} = \cup_n \boldsymbol{\mu}_{p^n}$.

- Válasszuk primitív p^n-edik egységgyökök kompatibilis sorozatát $(\zeta^{(n)} \in \boldsymbol{\mu}_{p^n} : (\zeta^{(n+1)})^p = \zeta^{(n)})$, így $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty} = \varprojlim \boldsymbol{\mu}_{p^n}$ 1 rangú $\mathbb{Z}_p$-modulus (Jel.: $\mathbb{Z}_p(1)$).
- $K_n = K(\zeta^{(n)})$, $K_\infty := \cup K_n$, ekkor

$$\mathbb{Q}_p^{un} \subset ; \overbrace{\underbrace{K \subset K_n \subset K_\infty}_{\Gamma_K} = \underbrace{K_\infty \subset \overline{\mathbb{Q}_p^{un}} = \overline{K}}_{H_K}}^{G_K} \subset \mathbb{C}$$

G_K hatása: $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$-en a $g(\zeta) = \zeta^{\chi(g)}$ írja le, ez a $\chi : G_F \to \mathbb{Z}_p^\times$ a *körosztási karakter*, χ folytonos, $\operatorname{Ker}\chi = H_K = \operatorname{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$, így Γ_K-t azonosítja $\mathbb{Z}_p^\times$ egy zárt részcsoportjával.

Állítás

$\chi(I_K)$ csoport végtelen.

Példa: Tate-csavarás

Tate-csavarás

Ha $r \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}_p(r) = \mathbb{Q}_p \cdot e_r$ az *r-edik Tate-csavarás*, ahol G_K hatása e_r-en: $\sigma(e_r) = \chi(\sigma)^r e_r$.

Sőt általánosan, tetszőleges $\eta : G_K \to \mathbb{Q}_p^\times$ folytonos karakterre:

Definíció

Legyen $\eta : G_K \to \mathbb{Q}_p^\times$ folytonos karakter, M pedig egy $\mathbb{Q}_p[G_K]$-modulus, ekkor M *η szerinti csavarásának* mondjuk a

$$M(\eta) := M \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\eta)$$

$\mathbb{Q}_p[G_K]$-modulust, ahol $\mathbb{Q}_p(\eta)$ jelöli az η által meghatározott G_K-reprezentációt $\mathbb{Q}_p$-n.

$\mathbb{C}_K$-reprezentációk

- $\mathbb{C}_K$: $\overline{K}$ p-adikus telítettje, ez nem p-adikus test, de G_K folytonos hatása egyértelműen kiterjed K-ról $\mathbb{C}_K$ és

Állítás

$\mathbb{C}_K$ algebrailag zárt test.

- $V \rightsquigarrow \mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V, \quad V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ egyszerűsíti a helyzetet
- G_K folytonosan hat $\mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$-n a $g(c \otimes v) = g(c) \otimes g(v)$, $c \in \mathbb{C}_K$, $g \in G_K, v \in V$ szerint, azonban csak $\mathbb{C}_K$-szemilineárisan!

Definíció

Egy véges dimenziós W $\mathbb{C}_K$-vektorteret G_K $\mathbb{C}_K$*-reprezentációjának* nevezzük ha G_K folytonosan és szemiliniárisan hat W-n (vagyis a $G_K \times W \to W$ leképezésre $g(cw) = g(c)g(w)$ minden $c \in \mathbb{C}_K, w \in W$-re). A G_K-hoz tartozó $\mathbb{C}_K$-reprezentációk kategóriáját ($\mathbb{C}_K$-lineáris és G_K-ekvivariáns morfizmusokkal) $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}_K}(G_K)$-val jelöljük.

Tate-Sen-tétel

Tate-Sen

Legyen $\eta : G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$ egy folytonos karakter, ekkor $i = 0, 1$ esetén igaz az alábbi kanonikus izomorfizmus

$$H^i_{\mathrm{cont}}(G_K, \mathbb{C}_K(\eta)) \cong \begin{cases} K & \text{ha } \eta(I_K) \text{ véges,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- bizonyítás: Tate-Sen formalizmus, funkcionálanalízis
- Ha $\eta = \chi^r$

$$H^i_{\mathrm{cont}}(G_K, \mathbb{C}_K(r)) \cong \begin{cases} K & \text{ha } r = 0 \\ 0 & \text{ha } r \neq 0. \end{cases}$$

- $i = 0$: $\mathbb{C}_K(r)^{G_K} = K$
- $i = 1$: $H^1_{\mathrm{cont}}(G_K, \mathbb{C}_K(r))$ a $0 \to W \to W' \to \mathbb{C}_K \to 0$ bővítéseket írja le ($W, W' \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}_K}(G_K)$).