

Nemlineáris leképezések diagramjainak kiegészítése és alkalmazása

Egyéni kutatómunka 2.

Mészáros Botond

Eötvös Loránd Tudományegyetem

2023.06.02.



ELTE
EÖTVÖS LORÁND
UNIVERSITY



Új Nemzeti
Kiválóság Program

- ① Bevezetés
- ② Euklideszi terek
- ③ Sokaságok
- ④ Felhasználások
- ⑤ Eredmények ismertetése
- ⑥ Összefoglalás

- 1 Bevezetés
- 2 Euklideszi terek
- 3 Sokaságok
- 4 Felhasználások
- 5 Eredmények ismertetése
- 6 Összefoglalás

Numerikus feladatok megoldása és optimalizálása

Saját tapasztalatok:

- Számítógéppel segített geometriai tervezés, görbék és felületek kontrollpont alapú modellezése (2017);
- Soktestrendszer numerikus szimulációja (2017-2019);
- 2019: 28. Ifjúsági Tudományos és Innovációs Tehetségkutató Verseny I. díj, Ericsson különdíj;
- ELTE Fizikus BSc, Matematikus MSc... (2019-...)

Fő problémák:

- Egyre komplexebb, sürgető feladatok ↔ összetett megoldás (ha van...);
- Hogyan **automatizálhatjuk** az új megoldások keresését?
- Mit tudunk mondani az így kapott megoldásokról?
 - A bemenet milyen változtatására érzékenyek, milyenre nem?
 - Milyen idő- és memóriakomplexitással rendelkeznek?
 - Lehet-e "invertálni" őket? Hogyan?
 - Baj-e a nemlinearitás? Hogyan kezeljük?
- Mi a helyzet, ha nem Euklideszi terekkel dolgozunk?

- ① Bevezetés
- ② Euklideszi terek
- ③ Sokaságok
- ④ Felhasználások
- ⑤ Eredmények ismertetése
- ⑥ Összefoglalás

Feladat felbontása Jet-ekvivalenciával

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad \Gamma \quad} & \mathbb{R}^t \\
 \phi \downarrow & \text{Eredeti feladat, } (r=\infty) \text{ eset} & \downarrow \psi \\
 \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\quad \gamma \quad} & \mathbb{R}^o
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{J_0^{k,0} \Gamma} & \mathbb{R}^t & & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{J_0^{k,1} \Gamma} & \mathbb{R}^t & & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{J_0^{k,2} \Gamma} & \mathbb{R}^t & \dots & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{J_0^{k,r} \Gamma} & \mathbb{R}^t & \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 J_0^{k,0} \phi(0) & & J_0^{k,0} \psi & & J_0^{k,1} \phi(1) & & J_0^{k,1} \psi & & J_0^{k,2} \phi(2) & & J_0^{k,2} \psi & & \dots & & J_0^{k,r} \phi(r) & & J_0^{k,r} \psi \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{R}^m & \xrightarrow{J_0^{k,0} \gamma} & \mathbb{R}^o & & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{J_0^{k,1} \gamma} & \mathbb{R}^o & & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{J_0^{k,2} \gamma} & \mathbb{R}^o & \dots & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{J_0^{k,r} \gamma} & \mathbb{R}^o & \dots
 \end{array}$$

Feladat véges rendű megoldása

13. Tétel. [Euklideszi terek közötti C^k diagramok kiegészítése kommutatív diagrammá]

Legyen $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^o$ négy Euklideszi tér, $\phi \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\Gamma \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$ és $\psi \in C^k(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^o)$ három, az origót rögzítő leképezés. Ekkor minden $\gamma \in C^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^o)$, $\sum_{i=0}^k \gamma^{(i)} \sim_0^k \gamma$ leképezésre teljesül, hogy $J_0^k(\gamma \circ \phi) = J_0^k(\psi \circ \Gamma)$, ahol

$$\gamma_0^{(i)} = \left[\sum_{s=0}^j \psi_0^{(s)} \left(\sum_{\Xi \in P_0(s,i)} \Gamma_0^{(\otimes \Xi)} \right) - \sum_{s=0}^{l-1} \gamma_0^{(s)} \left(\sum_{\sigma \in P(s,i)} \phi_0^{(\otimes \sigma)} \right) \right] [\varphi_0^{\otimes i}], \quad i \in \{0, \dots, j\},$$

az elemi megoldás multilineáris sorfejtése, $\phi_0^{(r)}, \Gamma_0^{(r)}, \psi_0^{(r)}$ a megadott leképezések $r = 0, 1, \dots, k$ -ad rendű megfelelő Euklideszi terek origóiban vett multilineáris sorfejtési tagjai, φ_0 a $\phi_0^{(1)}$ lineáris leképezés jobb oldali pszeudinverze, $P_0(s, i)$ az összes olyan $(l_1, \dots, l_s) \in \mathbb{N}_0^i$ halmaza, amelyre $l_1 + \dots + l_s = i$ teljesül, $P(s, i)$ pedig az összes olyan $(l_1, \dots, l_s) \in \mathbb{N}^i$ halmaza, amelyre $l_1 + \dots + l_s = i$ teljesül.

14. Állítás. [Az $k \geq r$ -ed rendű közelítő megoldás nem függ k -tól]

Legyen $k, l, r \in \mathbb{N}$, $r \leq k, r \leq l$, és $\gamma_k \in C^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^o)$, $\gamma_l \in C^l(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^o)$ olyan, hogy $J_0^{k,r} \gamma_{0,k} \star J_0^{k,r} \phi = J_0^{k,r} \psi \star J_0^{k,r} \Gamma$, illetve $J_0^{l,r} \gamma_{0,l} \star J_0^{l,r} \phi = J_0^{l,r} \psi \star J_0^{l,r} \Gamma$ teljesül. Ekkor $\gamma_{0,l} \sim_0^r \gamma_{0,k}$, azaz $J_0^{r,r} \gamma_{0,l} = J_0^{r,r} \gamma_{0,k}$.

Konvergencia, hibabecslés

15. Tétel. [γ leképezés konverenciája]

Legyenek $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^t, \mathbb{R}^o$ és ϕ, Γ, ψ a 13-as Tételben megfogalmazottak szerint. A $\gamma_0^{(i)}$ leképezések minden $\mathbb{N} \ni j$ -edik $\gamma_{0,j}$ részösszege folytonos és korlátos leképezés, mely teljesíti a $J_0^{k,j}(\gamma_{0,j} \circ \phi) = J_0^{k,j}(\phi \circ \Gamma)$ összefüggést. A $\gamma_{0,j}$ sorozat a $B_R(0) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid d_{\mathbb{R}^m}(y, 0) < R\}$ halmazon pontonként konvergens, azon túl pedig divergens, ahol

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\limsup \sqrt[i]{C_i}}, & \text{ha } \limsup \sqrt[i]{C_i} \in (0, \infty) \\ 0, & \text{ha } \limsup \sqrt[i]{C_i} = \infty \\ \infty, & \text{ha } \limsup \sqrt[i]{C_i} = 0 \end{cases}$$

16. Tétel. [Véges sok tagból álló közelítés hibájának becslése]

Legyenek $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^t, \mathbb{R}^o$ és ϕ, Γ, ψ a 13-as Tételben megfogalmazott tulajdonságú, $k+1$ rendben folytonosan differenciálható leképezések és legyen $\gamma_{0,j}$ a megkonstruált $C^{k+1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^o)$ folytonos leképezés j -edik részösszege. Legyen $Q = \cap_{q \in \text{Dom}(\gamma_{0,k})} \phi^{-1}(q)$. Minden $\forall q \in Q$ pontra

$$\|(\gamma_{0,j} \circ \phi)(q) - (\psi \circ \Gamma)(q)\| \leq \frac{\|\phi(q) - \phi(p)\|^{(j+1)}}{(j+1)!} \cdot \sup_{u \in Q} \|(\psi \circ \Gamma)^{(j+1)}(u) - (\psi \circ \Gamma)^{(j+1)}(p)\|$$

Hibabecslés, pontos megoldás, iterálhatóság sima leképezésekre

17. Tétel. [Egzakt megoldás sima és analitikus leképezések esetében]

Legyenek $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^t, \mathbb{R}^o$ adottak és ϕ, Γ, ψ a 13-as Tételben megfogalmazott tulajdonságú, sima és analitikus leképezések. Legyen $U_m \subseteq B_R(0)$, $U_n = \phi^{-1}(U_m) \subseteq \mathbb{R}^n$, $U_t = \Gamma[U_n] \subseteq \mathbb{R}^t$ és $U_o = \psi[U_t] \subseteq \mathbb{R}^o$. Ekkor a $\gamma|_{U_m}, \phi|_{U_m}, \Gamma|_{U_t}$ és $\psi|_{U_o}$ leképezésekre $\gamma|_{U_m} \circ \phi|_{U_n} = \psi|_{U_o} \circ \Gamma|_{U_t}$ teljesül, a 4-es diagram tehát kommutatív.

$$\begin{array}{ccc}
 (U_n, 0) \subseteq (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\Gamma|_{U_n}} & (U_t, 0) \subseteq (\mathbb{R}^t, 0) \\
 \downarrow \phi|_{U_n} & & \downarrow \psi|_{U_t} \\
 (U_m, 0) \subseteq (\mathbb{R}^m, 0) & \xrightarrow{\gamma|_{U_m}} & (U_o, 0) \subseteq (\mathbb{R}^o, 0)
 \end{array}$$

4. ábra. Euklideszi részsokaságok közötti leképezésdiagramm kiegészítése kommutatív diagrammá sima és analitikus leképezésekkel

18. Tétel. [Kommutatív diagramok sorozatának egzakt kiegészítése]

Legyenek $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^t, \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^o$ adottak, $\phi = \psi, \Gamma$ sima és analitikus leképezések és $U_n \subseteq U_t \subseteq \mathbb{R}^n$, $U_m \subseteq U_o \subseteq \mathbb{R}^m$ a 17-es Tételben megfogalmazott tulajdonságúak. Ekkor a $\gamma|_{U_m}, \phi|_{U_n}, \Gamma|_{U_t}$ és $\psi|_{U_o}$ leképezésekre $\gamma|_{U_m}^k \circ \phi|_{U_n} = \psi|_{U_o} \circ \Gamma|_{U_t}^k$ teljesül, tehát az 5-ös diagram kommutatív.

$$\begin{array}{ccccccc}
 (U_n, 0) & \xrightarrow{\Gamma|_{U_n}} & (U_n, 0) \subseteq (U_t, 0) & \xrightarrow{\Gamma|_{U_n}} & (U_n, 0) \subseteq (U_t, 0) & \xrightarrow{\Gamma|_{U_n}} & \dots & \xrightarrow{\Gamma|_{U_n}} & (U_n, 0) \subseteq (U_t, 0) \\
 \downarrow \phi|_{U_n} & & \downarrow \phi|_{U_n} & & \downarrow \phi|_{U_n} & & \downarrow \phi|_{U_n} & & \downarrow \phi|_{U_n} \\
 (U_m, 0) & \xrightarrow{\gamma|_{U_m}} & (U_m, 0) \subseteq (U_o, 0) & \xrightarrow{\gamma|_{U_m}} & (U_m, 0) \subseteq (U_o, 0) & \xrightarrow{\gamma|_{U_m}} & \dots & \xrightarrow{\gamma|_{U_m}} & (U_m, 0) \subseteq (U_o, 0)
 \end{array}$$

5. ábra. Euklideszi részsokaságok közötti leképezésdiagrammok sorozatának kiegészítése kommutatív diagrammá sima és analitikus leképezésekkel

- ① Bevezetés
- ② Euklideszi terek
- ③ Sokaságok**
- ④ Felhasználások
- ⑤ Eredmények ismertetése
- ⑥ Összefoglalás

Megoldás ábrázolása

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{N}, p) & \xrightarrow{G|_k} \in \mathcal{C}^k & \rightarrow (T, w) \\
 \downarrow & & \\
 f|_k \in \mathcal{C}^k & (0) & h|_k \in \mathcal{C}^k \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\mathcal{M}, q) & \xrightarrow{\dots ?g|_k} \in \mathcal{C}^k & \rightarrow (O, z)
 \end{array}$$

H_* -homotóp deformációs \mathcal{C}^∞ -né

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{N}, p) & \xrightarrow{G} \in \mathcal{C}^\infty & \rightarrow (T, w) \\
 \downarrow & & \\
 f \in \mathcal{C}^\infty & (1) & h \in \mathcal{C}^\infty \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\mathcal{M}, q) & \xrightarrow{\dots ?g} \in \mathcal{C}^\infty & \rightarrow (O, z)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{U}_N, p) & \xrightarrow{G|} \in \mathcal{C}^\infty & \rightarrow (\mathcal{U}_T, w) \\
 \downarrow & & \\
 f| \in \mathcal{C}^\infty & (2) & h| \in \mathcal{C}^\infty \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\mathcal{U}_M, q) & \xrightarrow{\dots ?g|} \in \mathcal{C}^\infty & \rightarrow (\mathcal{U}_O, z)
 \end{array}$$

$\mathcal{U}_k \subseteq \bullet \rightarrow$

$i_* : \bullet \rightarrow \mathcal{E}^{sim}(\bullet)$

$$\begin{array}{ccccc}
 (\mathcal{U}_N, 0) & \xrightarrow{i_N} & \tilde{G}| \in \mathcal{C}^\infty & \xrightarrow{i_T} & (\mathcal{U}_T, 0) \\
 \downarrow & \swarrow i_N^{-1} & \downarrow & \searrow i_T^{-1} & \downarrow \\
 (\mathcal{U}_N, p) & \xrightarrow{G|} \in \mathcal{C}^\infty & \rightarrow & (\mathcal{U}_T, w) & \\
 \downarrow & \swarrow i_N^{-1} & \downarrow & \searrow i_T^{-1} & \downarrow \\
 (\mathcal{U}_M, q) & \xrightarrow{\dots ?g|} \in \mathcal{C}^\infty & \rightarrow & (\mathcal{U}_O, z) & \\
 \downarrow & \swarrow i_M^{-1} & \downarrow & \searrow i_O^{-1} & \downarrow \\
 (\mathcal{U}_M, 0) & \xrightarrow{\dots ?g|} \in \mathcal{C}^\infty & \rightarrow & (\mathcal{U}_O, 0) &
 \end{array}$$

Megoldás $\mathbb{R}^m \supseteq B_{R_1}(0)$ -ban

Megoldás $\mathbb{R}^m \supseteq B_{R_1}(0)$ -ban

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{U}_N^R, 0) & \xrightarrow{\Gamma} \in \mathcal{C}^\infty & \rightarrow (\mathcal{U}_T^R, 0) \\
 \downarrow & & \\
 \phi \in \mathcal{C}^\infty & (4) & \psi \in \mathcal{C}^\infty \xrightarrow{U_{dim}(\bullet)} := U_{dim}^R(\bullet) \cap i_*(\bullet) \rightarrow \phi| \in \mathcal{C}^\infty \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\mathcal{U}_M^R, 0) & \xrightarrow{\gamma} \in \mathcal{C}^\infty & \rightarrow (\mathcal{U}_O^R, 0)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{U}_N, 0) & \xrightarrow{\Gamma|} \in \mathcal{C}^\infty & \rightarrow (\mathcal{U}_T, 0) \\
 \downarrow & & \\
 \psi \in \mathcal{C}^\infty & (5) & \psi| \in \mathcal{C}^\infty \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\mathcal{U}_M, 0) & \xrightarrow{\gamma|} \in \mathcal{C}^\infty & \rightarrow (\mathcal{U}_O, 0)
 \end{array}$$

$i_*^{-1} : \mathcal{E}^{sim}(\bullet) \rightarrow \bullet$

$$\begin{array}{ccccc}
 (\mathcal{U}_N, 0) & \xrightarrow{i_N} & \Gamma| \in \mathcal{C}^\infty & \xrightarrow{i_T} & (\mathcal{U}_T, 0) \\
 \downarrow & \swarrow i_N^{-1} & \downarrow & \searrow i_T^{-1} & \downarrow \\
 (\mathcal{U}_N, p) & \xrightarrow{\tilde{\Gamma}|} \in \mathcal{C}^\infty & \rightarrow & (\mathcal{U}_T, w) & \\
 \downarrow & \swarrow i_N^{-1} & \downarrow & \searrow i_T^{-1} & \downarrow \\
 (\mathcal{U}_M, q) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}|} \in \mathcal{C}^\infty & \rightarrow & (\mathcal{U}_O, z) & \\
 \downarrow & \swarrow i_M^{-1} & \downarrow & \searrow i_O^{-1} & \downarrow \\
 (\mathcal{U}_M, 0) & \xrightarrow{\tilde{\gamma}|} \in \mathcal{C}^\infty & \rightarrow & (\mathcal{U}_O, 0) &
 \end{array}$$

Kiterjesztés \mathcal{U}_{dim}^R -ről \bullet -re

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{N}, p) & \xrightarrow{G'} \in \mathcal{C}^\infty & \rightarrow (T, w) \\
 \downarrow & & \\
 f' \in \mathcal{C}^\infty & (7) & h' \in \mathcal{C}^\infty \xrightarrow{H_*} \text{homotópiák inverze} \rightarrow f'|_k \in \mathcal{C}^k \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\mathcal{M}, q) & \xrightarrow{g'} \in \mathcal{C}^\infty & \rightarrow (O, z)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{N}, p) & \xrightarrow{G|_k} \in \mathcal{C}^k & \rightarrow (T, w) \\
 \downarrow & & \\
 f|_k \in \mathcal{C}^k & (8) & h|_k \in \mathcal{C}^k \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\mathcal{M}, q) & \xrightarrow{g|_k} \in \mathcal{C}^k & \rightarrow (O, z)
 \end{array}$$

Megoldás konstrukciója, létezése, egyértelműsége

Tétel

Legyen (\mathcal{N}, p) , (\mathcal{M}, q) , (\mathcal{T}, w) és (\mathcal{O}, z) adott pontozott sima sokaságok és $G : (\mathcal{N}, p) \rightarrow (\mathcal{T}, w)$, $f : (\mathcal{N}, p) \rightarrow (\mathcal{M}, q)$ és $h : (\mathcal{T}, w) \rightarrow (\mathcal{O}, z)$ három C^k leképezés. Tegyük fel továbbá, hogy létezik egy $g : (\mathcal{M}, q) \rightarrow (\mathcal{O}, z)$ leképezés, mellyel $g \circ f = h \circ G$ teljesül. A 9-es ábrán megfogalmazott eljárásról a következőket tudjuk állítani:

- (i) A (0) \mapsto (1) áttérés során a $G_{(k)}$, $f_{(k)}$, $h_{(k)}$, $g_{(k)}$ és a G, f, h, g leképezések közötti kapcsolat kölcsönösen egyértelmű;
- (ii) A (2) \mapsto (3) áttérés során, ahol $\iota_{\mathcal{N}}$, $\iota_{\mathcal{M}}$, $\iota_{\mathcal{T}}$ és $\iota_{\mathcal{O}}$ az egyes pontozott sokaságok kijelölt pontjaira centrált szabályos beágyazások megfelelő dimenziós Euklideszi terekbe, kölcsönösen egyértelmű a megfeleltetés $G|, f|, h|, g|$ és $\tilde{G}|, \tilde{f}|, \tilde{h}|, \tilde{g}|$ között;
- (iii) Az (3) \mapsto (4) áttérés során az előző fejezetben tárgyalt megoldást konstruáljuk meg a γ leképezés maximális R konvergenciasugarán belüli U_m^R halmazon. Az $U_m = \iota_{\mathcal{M}}[\mathcal{U}_m] \cap U_m^R$ halmazon $\gamma|_{U_m}$ létezik;
- (iv) Az U_m halmazon $\gamma|_{U_m}$ egyértelműen meghatározza a $\tilde{g}|$ leképezést az $\mathcal{U}_m = \iota_{\mathcal{M}}^{-1}[U_m]$ halmazon: $\tilde{g}|_{\mathcal{U}_m} = \iota_{\mathcal{O}}^{-1} \circ \gamma|_{U_m} \circ \iota_{\mathcal{M}}$;
- (v) Az U_n , U_m és U_t halmazokra megszorítva a Γ, ϕ, ψ leképezéseket, azok megegyeznek az $\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_m, \mathcal{U}_t$ -re megszorított $G|, f|, h|$ és $g|$ leképezések $\tilde{G}|_{\mathcal{U}_n}, \tilde{f}|_{\mathcal{U}_n}, \tilde{h}|_{\mathcal{U}_n}$ megfelelőivel;
- (vi) Az $\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_m, \mathcal{U}_t$ halmazokon $G|_{\mathcal{U}_n} = \iota_{\mathcal{T}}^{-1} \circ \Gamma|_{U_n} \circ \iota_{\mathcal{N}}$, $f|_{\mathcal{U}_n} = \iota_{\mathcal{M}}^{-1} \circ \phi|_{U_n} \circ \iota_{\mathcal{N}}$ és $h|_{\mathcal{U}_n} = \iota_{\mathcal{O}}^{-1} \circ \psi|_{U_n} \circ \iota_{\mathcal{T}}$;
- (vii) $G'|_{\mathcal{U}_n} = G|_{\mathcal{U}_n}$, $f'|_{\mathcal{U}_n} = f|_{\mathcal{U}_n}$ és $h'|_{\mathcal{U}_n} = h|_{\mathcal{U}_n}$;
- (viii) Az $\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_m, \mathcal{U}_t$ és \mathcal{U}_o megfelelő homotópiák általi képeire megszorítva $G'_{(k)}| = G|_{(k)}$, $f'_{(k)}| = f|_{(k)}$ és $h'_{(k)}| = h|_{(k)}$.



Megoldás konstrukciója, létezése, egyértelmősége

Tétel

Legyen (\mathcal{N}, p) , (\mathcal{M}, q) , (\mathcal{T}, w) és (\mathcal{O}, z) adott pontozott sima sokaságok, $G : (\mathcal{N}, p) \rightarrow (\mathcal{T}, w)$, $f : (\mathcal{N}, p) \rightarrow (\mathcal{M}, q)$ és $h : (\mathcal{T}, w) \rightarrow (\mathcal{O}, z)$ három C^∞ leképezés, $(\mathcal{U}_{\mathcal{N}}, p)$, $(\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, q)$, $(\mathcal{U}_{\mathcal{T}}, w)$ és $(\mathcal{U}_{\mathcal{O}}, z)$ szabályosan beágyazott pontozott részsokaságok. A 9-es ábrán megfogalmazott eljárásról a következőket tudjuk állítani:

- (i) Ha létezik $g \in C^\infty$, amelyre $g \circ f = h \circ G$ teljesül minden $p \in \mathcal{N}$ pontra, akkor egyértelmű;
- (ii) Ha létezik $g| \in C^\infty$, amelyre $g| \circ f| = h| \circ G|$ teljesül minden $p \in \mathcal{U}_{\mathcal{N}}$ pontra, akkor egyértelmű;
- (iii) Ha g létezik, akkor egyértelmű, és $g| \in C^\infty((\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, q), (\mathcal{U}_{\mathcal{O}}, z))$ létezik;
- (iv) Ha $g| \in C^\infty((\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, q)(\mathcal{U}_{\mathcal{O}}, z))$ létezik, akkor egyértelmű;
- (v) Minden $U_{\mathcal{N}} \subseteq U_{\mathcal{N}}^R$, $U_{\mathcal{M}} \subseteq U_{\mathcal{M}}^R$, $U_{\mathcal{T}} \subseteq U_{\mathcal{T}}^R$ és $U_{\mathcal{O}} \subseteq U_{\mathcal{O}}^R$ mellett $g| = \iota_{\mathcal{O}}^{-1} \circ \gamma|_{U_{\mathcal{M}}} \circ \iota_{\mathcal{M}}$ megoldja a (2)-es diagramot, tehát egyértelmű;
- (vi) Minden $U_{\mathcal{N}} \subseteq U_{\mathcal{N}}^R$, $U_{\mathcal{M}} \subseteq U_{\mathcal{M}}^R$, $U_{\mathcal{T}} \subseteq U_{\mathcal{T}}^R$ és $U_{\mathcal{O}} \subseteq U_{\mathcal{O}}^R$ mellett az (1)-es diagramnak van megoldása, mégpedig a $G| = \iota_{\mathcal{T}}^{-1} \circ \Gamma|_{U_{\mathcal{N}}} \circ \iota_{\mathcal{N}}$, $f| = \iota_{\mathcal{M}}^{-1} \circ \phi|_{U_{\mathcal{N}}} \circ \iota_{\mathcal{N}}$, $h| = \iota_{\mathcal{O}}^{-1} \circ \psi|_{U_{\mathcal{T}}} \circ \iota_{\mathcal{T}}$ és $g| = \iota_{\mathcal{O}}^{-1} \circ \gamma|_{U_{\mathcal{M}}} \circ \iota_{\mathcal{M}}$ kiterjesztéséből adódó leképezésekkel.

Megoldások szuperponálhatósága

Tétel

Legyen \mathcal{N} , \mathcal{M} , \mathcal{T} és \mathcal{O} adott sima sokaságok és $G \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathcal{T})$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ és $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{T}, \mathcal{O})$ sima leképezések. Legyenek $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{N}$, $q_1, \dots, q_k \in \mathcal{M}$, $w_1, \dots, w_k \in \mathcal{T}$ és $z_1, \dots, z_k \in \mathcal{O}$ olyan pontok, melyekre $G(p_l) = w_l$, $f(p_l) = q_l$ és $h(w_l) = z_l$ teljesül minden $l \in \{1, \dots, k\}$ -ra. Legyenek $\tau_{\mathcal{N}} \ni \mathcal{U}_{\mathcal{N},l} \ni p_l$, $\tau_{\mathcal{M}} \ni \mathcal{U}_{\mathcal{M},l} \ni q_l$, $\tau_{\mathcal{T}} \ni \mathcal{U}_{\mathcal{T},l} \ni w_l$ és $\tau_{\mathcal{O}} \ni \mathcal{U}_{\mathcal{O},l} \ni z_l$ nyílt környezetek, melyek lezártjaihoz tartozó legszűkebb nyílt környezetek diszjunktak, és képezzük ezekből az $(\mathcal{U}_{\mathcal{N},l}, p_l)$, $(\mathcal{U}_{\mathcal{M},l}, q_l)$, $(\mathcal{U}_{\mathcal{T},l}, w_l)$ és $(\mathcal{U}_{\mathcal{O},l}, z_l)$ nyílt pontozott részsokaságokat minden $l \in \{1, \dots, k\}$ mellett. Legyenek $G_1, \dots, G_k \in \mathcal{C}^\infty((\mathcal{U}_{\mathcal{N},l}, p_l), (\mathcal{U}_{\mathcal{T},l}, w_l))$, $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{C}^\infty((\mathcal{U}_{\mathcal{N},l}, p_l), (\mathcal{U}_{\mathcal{M},l}, q_l))$ és $h_1, \dots, h_k \in \mathcal{C}^\infty((\mathcal{U}_{\mathcal{T},l}, w_l), (\mathcal{U}_{\mathcal{O},l}, z_l))$ a megfelelő leképezések megfelelő megszorításai. Ekkor a következőket állíthatjuk:

- (i) Ha létezik $g_l \in \mathcal{C}^\infty((\mathcal{U}_{\mathcal{M},l}, q_l), (\mathcal{U}_{\mathcal{O},l}, z_l))$, amelyre $g_l \circ f_l = h_l \circ G_l$ teljesül, akkor ez egyértelmű, és vannak olyan $(\mathcal{V}_{\mathcal{N},l}, p_l)$, $(\mathcal{V}_{\mathcal{M},l}, q_l)$, $(\mathcal{V}_{\mathcal{T},l}, w_l)$ és $(\mathcal{V}_{\mathcal{O},l}, z_l)$ pontozott nyílt részsokaságok, hogy $\mathcal{U}_{\mathcal{N},l} \subseteq \mathcal{V}_{\mathcal{N},l}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{M},l} \subseteq \mathcal{V}_{\mathcal{M},l}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{T},l} \subseteq \mathcal{V}_{\mathcal{T},l}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{O},l} \subseteq \mathcal{V}_{\mathcal{O},l}$ és a G_l, f_l, h_l, g_l leképezések megfelelő sokaságokra való simák kiterjesztései $\mathcal{V}_{\bullet,l}$ -en kívül $\bullet_{\bullet,l}$ -et vesznek fel, ahol $\bullet \in \{\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{T}, \mathcal{O}\}$ és $\bullet_{\bullet} \in \{p, q, w, z\}$;
- (ii) Ha minden $l \in \{1, \dots, k\}$ -re létezik $g_l \in \mathcal{C}^\infty((\mathcal{U}_{\mathcal{M},l}, q_l), (\mathcal{U}_{\mathcal{O},l}, z_l))$ megoldása a $g_l \circ f_l = h_l \circ G_l$ feltételnek, akkor létezik olyan $\tilde{g} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ sima leképezés, amelyre $\tilde{g} \circ f = h \circ G$ teljesül és $\tilde{g}|_{\mathcal{U}_{\mathcal{M},l}} = g_l$ minden $l \in \{1, \dots, k\}$.


- ① Bevezetés
- ② Euklideszi terek
- ③ Sokaságok
- ④ Felhasználások**
- ⑤ Eredmények ismertetése
- ⑥ Összefoglalás

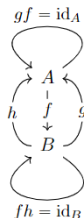
Determinisztikus rendszerek numerikus modellezése

A dolgozat, hogy a bevezetett fogalmakat (és azok modellezési szempontból elvárt és feltehető tulajdonságait) motiválni lehessen, központilag determinisztikus rendszerek leírásából kiindulva oldotta meg leképezési diagramok kommutatív diagrammá való kiegészítésének problémáját. Emiatt a módszer alkalmazható az alábbi területeken:

- Klasszikus fizikai rendszerek numerikus modellezése;
- Makro- és mezoszkopikus (gyakran nemegyensúlyi) rendszerek numerikus modellezése;
- A dolgozatban expliciten említett tereken kívül Euklideszi terekbe beágyazható, különböző differenciálható struktúrájú topologikus terekkel (kompakt Finsler-sokaságok, bizonyos sub-Riemann sokaságok) modellezett rendszerek kezelése...

Leképezés jobb- és balinveze

Legyen C egy kategória, A, B két objektum és $f \in \text{Hom}(A, B)$. Ekkor az f leképezés bal-, illetve jobb oldali inverze alatt olyan $g, h \in \text{Hom}(B, A)$ leképezéseket értünk, melyekre $gf = \text{id}_A$, illetve $fh = \text{id}_B$ teljesülnek. Márképp, a -es diagram kommutatív.



10. ábra. Leképezés jobb- és bal oldali inverze

Azt, hogy egy általánosított inverztől a fenti mellett milyen erős vagy gyengébb tulajdonságokat várunk el, széles körben változik. Közös azonban, hogy a legtöbb ilyen általánosított inverz ténylegesen csak nehezen megkonstruálható.

Általánosított inverzek

84. Definíció. [Sima sokaságok közötti sima leképezés (Γ, ψ) -pseudoinverz]

Legyen $\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{T}, \mathcal{O}$ négy adott sima sokaság, $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathcal{T})$, $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{T}, \mathcal{O})$ két sima leképezés. A $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ leképezés (Γ, ψ) -pseudoinverzén, ha létezik, azt a φ leképezést értjük, melyre a [11](#)-es ábrán szereplő (2)-es leképezési diagram kommutatív, ha az (1)-es is az.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{N} - \Gamma \in \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{T} & & \mathcal{N} - \Gamma \in \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{T} \\
 \downarrow \phi \in \mathcal{C}^\infty & (1) & \downarrow \psi \in \mathcal{C}^\infty \\
 \mathcal{M} - \gamma \in \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{O} & & \mathcal{M} - \gamma \in \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{O} \\
 & & \uparrow \varphi \in \mathcal{C}^\infty \quad (2) \quad \downarrow \psi \in \mathcal{C}^\infty
 \end{array}$$

11. ábra. Sima sokaságok közötti sima ϕ leképezés (Γ, ψ) -pseudoinverze

85. Definíció. [Sima sokaságok közötti sima leképezés Γ -pseudoinverz]

Legyen \mathcal{N}, \mathcal{M} két sima sokaság, $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathcal{T})$ egy sima leképezés. A $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ leképezés Γ -pseudoinverzén, ha létezik, azt a φ leképezést értjük, melyre a [12](#)-es ábrán szereplő (2)-es leképezési diagram kommutatív, ha az (1)-es is az.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{N} - \Gamma \in \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{N} & & \mathcal{N} - \Gamma \in \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{N} \\
 \downarrow \phi \in \mathcal{C}^\infty & (1) & \downarrow \phi \in \mathcal{C}^\infty \\
 \mathcal{M} - \gamma \in \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{M} & & \mathcal{M} - \gamma \in \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{M} \\
 & & \uparrow \varphi \in \mathcal{C}^\infty \quad (2) \quad \uparrow \varphi \in \mathcal{C}^\infty
 \end{array}$$

12. ábra. Sima sokaságok közötti sima ϕ leképezés Γ -pseudoinverze

Pontozott sokaságok közötti leképezés c -inverze

86. Definíció. [Pontozott sima sokaságok közötti sima leképezés Γ -pszeudinverze]

Legyen $(\mathcal{N}, p), (\mathcal{M}, q)$ két sima sokaság, $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty((\mathcal{N}, p), (\mathcal{M}, q))$ egy sima leképezés. A $\phi \in \mathcal{C}^\infty((\mathcal{N}, p), (\mathcal{M}, q))$ leképezés Γ -pszeudinverzén, ha létezik, azt a φ leképezést értjük, melyre a 13-as ábrán szereplő (2)-es leképezési diagram kommutatív, ha az (1)-es is az.

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{N}, p) - \Gamma \in \mathcal{C}^\infty \rightarrow (\mathcal{N}, p) & & (\mathcal{N}, p) - \Gamma \in \mathcal{C}^\infty \rightarrow (\mathcal{N}, p) \\
 \downarrow \phi \in \mathcal{C}^\infty & (1) & \downarrow \phi \in \mathcal{C}^\infty \\
 (\mathcal{M}, q) - \gamma \in \mathcal{C}^\infty \rightarrow (\mathcal{M}, q) & & (\mathcal{M}, q) - \gamma \in \mathcal{C}^\infty \rightarrow (\mathcal{M}, q) \\
 \uparrow \varphi \in \mathcal{C}^\infty & (2) & \uparrow \varphi \in \mathcal{C}^\infty
 \end{array}$$

13. ábra. Pontozott sima sokaságok közötti sima ϕ leképezés Γ -pszeudinverze

87. Definíció. [Pontozott Euklideszi terek közötti sima leképezés c -pszeudinverze]

Legyen $(\mathcal{E}^n, 0), (\mathcal{E}^m, 0)$ két pontozott Euklideszi tér, $(\mathbb{R}_{>0} \setminus 1) \ni c$ tetszőleges pozitív $\neq 1$ skalár, és $\Gamma = c \cdot \text{id}_{\mathcal{E}^n}$ skálázás. A $\phi \in \mathcal{C}^\infty((\mathcal{E}^n, 0), (\mathcal{E}^m, 0))$ leképezés c -pszeudinverzén, ha létezik, annak Γ -pszeudinverzét értjük.

88. Állítás. [c -pszeudinverz létezése]

Pontozott Euklideszi terek közötti sima leképezés c -pszeudinverze létezik valamely $B_R(0) \subseteq \mathcal{E}^m$ halmazon.

Invariáns transzformációk és rövid egzakt sorok

90. Definíció. [Sima sokaságok közötti sima leképezés sima invariáns transzformációjá]

Legyen \mathcal{N}, \mathcal{M} két sima sokaság, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ sima leképezés. Ekkor a $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathcal{N})$ sima leképezést a ϕ leképezés sima invariáns transzformációjának nevezzük, ha a 14-es diagram kommutatív. Ezek a transzformációk csoportot alkotnak.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{N} & \xrightarrow{\Gamma \in \mathcal{C}^\infty} & \mathcal{N} \\
 \downarrow \phi \in \mathcal{C}^\infty & & \downarrow \phi \in \mathcal{C}^\infty \\
 \mathcal{M} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{M}}} & \mathcal{M}
 \end{array}$$

14. ábra. Sima sokaságok közötti sima ϕ leképezés Γ sima invariáns transzformációjá

Tehát, az, ha adott modell rendelkezik valamilyen nemtriviális sima invariáns transzformációval, szükségszerűen azt is jelenti, hogy olyan leképezési diagramot akarunk kiegészíteni kommutatív módon, amiben egy egzakt sor szerepel, ahogy azt a 17-es ábra szemlélteti.

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathcal{E}^n, 0) & \xrightarrow{\Gamma \in \mathcal{C}^\infty} & (\mathcal{E}^t, 0) & & 0 \longrightarrow & (\mathcal{E}^n, 0) & \xrightarrow{J_0^{\infty, r} \Gamma} & (\mathcal{E}^t, 0) \\
 \downarrow \phi \in \mathcal{C}^\infty & & \downarrow \psi \in \mathcal{C}^\infty & \xleftarrow{J_0^r(\bullet)} & \xrightarrow{J_0^{\infty, r} \phi} & \downarrow & & \downarrow J_0^{\infty, r} \psi \\
 (\mathcal{E}^m, 0) & \xrightarrow{? \gamma \in \mathcal{C}^\infty} & (\mathcal{E}^o, 0) & & & (\mathcal{E}^m, 0) & \xrightarrow{? J_0^{\infty, r} \gamma} & (\mathcal{E}^o, 0) \\
 & & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & & 0
 \end{array}$$

17. ábra. Rövid egzakt sor.

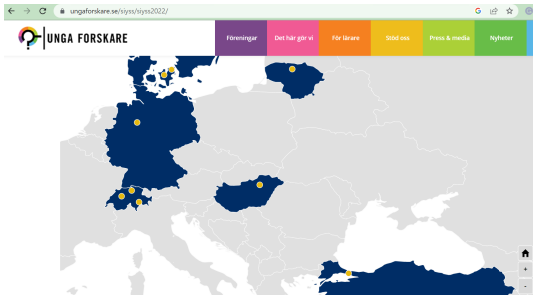
- ① Bevezetés
- ② Euklideszi terek
- ③ Sokaságok
- ④ Felhasználások
- ⑤ Eredmények ismertetése**
- ⑥ Összefoglalás

Eredményeimet a következő eseményeken ismerttettem:

- XXVI. Bolyai Konferencia, 2022. április 9-10.
- XXIII. Eötvös József Konferencia, 2022. április 22-23.
- Márton Áron Szakkollégium Konferencia, 2022. április 29.
- Kárpát-medencei Nyári Egyetem, 2022. július 4-10.
- Stockholm International Youth Science Seminar (SIYSS'22), 2022. december 3-11.
- XXVII. Bolyai Konferencia, 2023. április 15-16.
- XXIV. Eötvös József Konferencia, 2023. május 5-6.

SIYSS: 1976 óta a SIYSS célja, hogy a Nobel-hét során évente exkluzív tudományos programot szervezzen, és ezzel ünnepelje a kutatási kiválóságot, ösztönözze a kulturális kiválóságot és elősegítse a nemzetközi együttműködést. A SIYSS-t kategóriájában az egyik legrangosabb díjnak tartják. 2022-ben összesen 23 diák vett rajta részt a világ 15 országából.

Stockholm International Youth Science Seminar 2022



- 1 Bevezetés
- 2 Euklideszi terek
- 3 Sokaságok
- 4 Felhasználások
- 5 Eredmények ismertetése
- 6 Összefoglalás**

Összefoglalás

Összességében, dolgozatomban azt vizsgáltam, miként lehet Euklideszi terekbe ágyazható sima leképezésből álló kommutatív diagramokat kiegészíteni. A kérdés vizsgálata mögötti motivációt az összetett feladatok numerikus megoldásainak megtalálásának és optimalizálásának kérdése adta. Sikerült számos tételt belátni, és tárgyalni az adott megoldások létezésének és egyértelműségének kérdését, illetve a bizonyos értelemben független megoldások szuperponálhatóságát. Bevezettünk egy új típusú nemlineáris pszeudoinvert fogalmat, mely egyszerű esetekben analitikusan is megkonstruálható. Megmutattuk, hogyan kapcsolódik a dolgozat tartalma modellek invariáns transzformációinak kereséséhez, és kitértünk arra, hogy az ilyen invariáns transzformációk meglétét hogyan látjuk előre az egyes leképezési diagramokhoz rendelt adott rendű Jet-diagramokban megjelenő egzakt sorokkal.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék a Bolyai Kollégium, az Eötvös József Collegium és a Márton Áron Szakkollégium közösségének szellemi és/vagy anyagi támogatásáért, melynek hála e kutatás megvalósulhatott. A kutatás az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-22-2 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.



BOLYAI
Kollégium
1992



ELTE Márton Áron Szakkollégium