Általános topológia különböző modellekben

Székely Ákos
Témavezető: Soukup Lajos

2022

S és L terek

Definíció.

Az $(X, \mathscr{T})$ *topologikus tér S (L) tér, ha öröklődően szeparábilis és nem Lindelöf (öröklődően Lindelöf és nem szeparábilis).*

S és L terek

Definíció.

Az $(X, \mathscr{T})$ topologikus tér S (L) tér, ha öröklődően szeparábilis és nem Lindelöf (öröklődően Lindelöf és nem szeparábilis).

- a $\mathrm{HS} \to \mathrm{HL}$ és a $\mathrm{HL} \to \mathrm{HS}$ következtetések cáfolataira jók

S és L terek

Definíció.

Az $(X, \mathscr{T})$ topologikus tér S (L) tér, ha öröklődően szeparábilis és nem Lindelöf (öröklődően Lindelöf és nem szeparábilis).

- a $\mathrm{HS} \to \mathrm{HL}$ és a $\mathrm{HL} \to \mathrm{HS}$ következtetések cáfolataira jók
- T_2 S és L terek vannak (Sierpinski, 1921): $X \in [\mathbb{R}]^{\omega_1}$ és ha $\prec \subset X^2$ egy jólrendezés, akkor az eszerinti zárt kezdő- illetve végszeletekkel finomítva X-en az Euklideszi altértopológiát rendre S és L tereket kapunk

S és L terek

Definíció.

Az $(X, \mathscr{T})$ topologikus tér S (L) tér, ha öröklődően szeparábilis és nem Lindelöf (öröklődően Lindelöf és nem szeparábilis).

- a $\mathrm{HS} \rightarrow \mathrm{HL}$ és a $\mathrm{HL} \rightarrow \mathrm{HS}$ következtetések cáfolataira jók
- T_2 S és L terek vannak (Sierpinski, 1921): $X \in [\mathbb{R}]^{\omega_1}$ és ha $\prec \subset X^2$ egy jólrendezés, akkor az eszerinti zárt kezdő- illetve végszeletekkel finomítva X-en az Euklideszi altértopológiát rendre S és L tereket kapunk
- Ezek nem T_3 terek. T_3 terek esetén a kérdés jóval nehezebb.

Definíció.

Az $(X, \mathscr{T})$ topologikus tér S (L) tér, ha öröklődően szeparábilis és nem Lindelöf (öröklődően Lindelöf és nem szeparábilis).

- a $\mathrm{HS} \to \mathrm{HL}$ és a $\mathrm{HL} \to \mathrm{HS}$ következtetések cáfolataira jók
- T_2 S és L terek vannak (Sierpinski, 1921): $X \in [\mathbb{R}]^{\omega_1}$ és ha $\prec \subset X^2$ egy jólrendezés, akkor az eszerinti zárt kezdő- illetve végszeletekkel finomítva X-en az Euklideszi altértopológiát rendre S és L tereket kapunk
- Ezek nem T_3 terek. T_3 terek esetén a kérdés jóval nehezebb.
- Néhány konzisztens példa:

Konzisztens példák

- tailored forszolással: megadható olyan ccc poset melynek elemei az ω_1 alaphalmaz pontjainak egy T_3 S (L) topológia szerinti környezetbázisának véges feltételekkel való approximációi; ezzel forszolva T_3 S (L) tereket kapunk (sőt, ezek 0-dimenziós, M_1 terek is)

Konzisztens példák

- tailored forszolással: megadható olyan ccc poset melynek elemei az ω_1 alaphalmaz pontjainak egy T_3 S (L) topológia szerinti környezetbázisának véges feltételekkel való approximációi; ezzel forszolva T_3 S (L) tereket kapunk (sőt, ezek 0-dimenziós, M_1 terek is)
- kombinatorikus axiómákból:

Konzisztens példák

- tailored forszolással: megadható olyan ccc poset melynek elemei az ω_1 alaphalmaz pontjainak egy T_3 S (L) topológia szerinti környezetbázisának véges feltételekkel való approximációi; ezzel forszolva T_3 S (L) tereket kapunk (sőt, ezek 0-dimenziós, M_1 terek is)
- kombinatorikus axiómákból:
- $\diamondsuit \equiv \exists\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\} : \forall\alpha < \omega_1 : S_\alpha \subset \alpha$ és $\forall S \subset \omega_1$ esetén $\{\alpha < \omega_1 : S \cap \alpha = S_\alpha\} \in Stac(\omega_1)$

Konzisztens példák

- tailored forszolással: megadható olyan ccc poset melynek elemei az ω_1 alaphalmaz pontjainak egy T_3 S (L) topológia szerinti környezetbázisának véges feltételekkel való approximációi; ezzel forszolva T_3 S (L) tereket kapunk (sőt, ezek 0-dimenziós, M_1 terek is)
- kombinatorikus axiómákból:
- $\diamondsuit \equiv \exists \{S_\alpha : \alpha < \omega_1\} : \forall \alpha < \omega_1 : S_\alpha \subset \alpha$ és $\forall S \subset \omega_1$ esetén $\{\alpha < \omega_1 : S \cap \alpha = S_\alpha\} \in Stac(\omega_1)$
- $\mathrm{ZFC} + \diamondsuit \vdash$ Létezik Szuszlin egyenes.

Konzisztens példák

- tailored forszolással: megadható olyan ccc poset melynek elemei az ω_1 alaphalmaz pontjainak egy T_3 S (L) topológia szerinti környezetbázisának véges feltételekkel való approximációi; ezzel forszolva T_3 S (L) tereket kapunk (sőt, ezek 0-dimenziós, M_1 terek is)
- kombinatorikus axiómákból:
- $\diamondsuit \equiv \exists\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\} : \forall\alpha < \omega_1 : S_\alpha \subset \alpha$ és $\forall S \subset \omega_1$ esetén $\{\alpha < \omega_1 : S \cap \alpha = S_\alpha\} \in Stac(\omega_1)$
- $\mathrm{ZFC} + \diamondsuit \vdash$ Létezik Szuszlin egyenes.
- Szuszlin egyenes lokálisan kompakt, tökéletesen normális L tér

Konzisztens példák

- tailored forszolással: megadható olyan ccc poset melynek elemei az ω_1 alaphalmaz pontjainak egy T_3 S (L) topológia szerinti környezetbázisának véges feltételekkel való approximációi; ezzel forszolva T_3 S (L) tereket kapunk (sőt, ezek 0-dimenziós, M_1 terek is)
- kombinatorikus axiómákból:
- $\diamondsuit \equiv \exists\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\} : \forall\alpha < \omega_1 : S_\alpha \subset \alpha$ és $\forall S \subset \omega_1$ esetén $\{\alpha < \omega_1 : S \cap \alpha = S_\alpha\} \in Stac(\omega_1)$
- $\mathrm{ZFC} + \diamondsuit \vdash$ Létezik Szuszlin egyenes.
- Szuszlin egyenes lokálisan kompakt, tökéletesen normális L tér
- (ZFC) $\exists$ Szuszlin egyenes $\leftrightarrow$ $\exists$ Szuszlin fa

Konzisztens példák

- tailored forszolással: megadható olyan ccc poset melynek elemei az ω_1 alaphalmaz pontjainak egy T_3 S (L) topológia szerinti környezetbázisának véges feltételekkel való approximációi; ezzel forszolva T_3 S (L) tereket kapunk (sőt, ezek 0-dimenziós, M_1 terek is)
- kombinatorikus axiómákból:
- $\diamondsuit \equiv \exists\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\} : \forall\alpha < \omega_1 : S_\alpha \subset \alpha$ és $\forall S \subset \omega_1$ esetén $\{\alpha < \omega_1 : S \cap \alpha = S_\alpha\} \in Stac(\omega_1)$
- $\mathrm{ZFC} + \diamondsuit \vdash$ Létezik Szuszlin egyenes.
- Szuszlin egyenes lokálisan kompakt, tökéletesen normális L tér
- (ZFC) $\exists$ Szuszlin egyenes $\leftrightarrow$ $\exists$ Szuszlin fa
- (M.E.Rudin) Szuszlin fából konstruálható T_4 S tér.

Konzisztens példák

- ([1], V) Ostaszewski a $\mathrm{CH} + \clubsuit$ felhasználásával (melyek együtt ekivivalensek $\diamondsuit$-al) konstruált $\mathrm{T}_2, \mathrm{M}_1$, tökéletesen normális, öröklődően normális, megszámlálhatóan kompakt S teret

HFD, HFC típusú terek

- a 2^λ Cantor kockák altereiről van szó

HFD, HFC típusú terek

- a 2^λ Cantor kockák altereiről van szó
- $X \in [2^\lambda]^{\geq\omega}$ HFD, ha $\forall A \in [X]^\omega : \exists I \in [\lambda]^{\leq\omega}$ úgy, hogy $\forall\varepsilon \in Fn(\lambda \setminus I, 2; \omega) \exists f \in A : f \in [\varepsilon]$

HFD, HFC típusú terek

- a 2^λ Cantor kockák altereiről van szó
- $X \in [2^\lambda]^{\geq\omega}$ HFD, ha $\forall A \in [X]^\omega : \exists I \in [\lambda]^{\leq\omega}$ úgy, hogy $\forall\varepsilon \in Fn(\lambda \setminus I, 2; \omega)\exists f \in A : f \in [\varepsilon]$
- $X \in [2^\lambda]^{>\omega}$ HFC, ha $\forall n \geq 1 \forall B \in [[\lambda]^n]^\omega$ amely páronként diszjunkt halmazokból áll és $\forall\varepsilon \in 2^n$ esetén $|X \setminus \bigcup\{[\varepsilon \star b] : b \in B\}| \leq \omega$

HFD, HFC típusú terek

- a 2^λ Cantor kockák altereiről van szó
- $X \in [2^\lambda]^{\geq\omega}$ HFD, ha $\forall A \in [X]^\omega : \exists I \in [\lambda]^{\leq\omega}$ úgy, hogy $\forall \varepsilon \in Fn(\lambda \setminus I, 2; \omega) \exists f \in A : f \in [\varepsilon]$
- $X \in [2^\lambda]^{>\omega}$ HFC, ha $\forall n \geq 1 \forall B \in [[\lambda]^n]^\omega$ amely páronként diszjunkt halmazokból áll és $\forall \varepsilon \in 2^n$ esetén $|X \setminus \bigcup\{[\varepsilon \star b] : b \in B\}| \leq \omega$
- HFD öröklődően szeparábilis, HFC öröklődően Lindelöf altere 2^λ-nak

HFD, HFC típusú terek

- a 2^λ Cantor kockák altereiről van szó
- $X \in [2^\lambda]^{\geq\omega}$ HFD, ha $\forall A \in [X]^\omega : \exists I \in [\lambda]^{\leq\omega}$ úgy, hogy $\forall \varepsilon \in Fn(\lambda \setminus I, 2; \omega) \exists f \in A : f \in [\varepsilon]$
- $X \in [2^\lambda]^{>\omega}$ HFC, ha $\forall n \geq 1 \forall B \in [[\lambda]^n]^\omega$ amely páronként diszjunkt halmazokból áll és $\forall \varepsilon \in 2^n$ esetén $|X \setminus \bigcup\{[\varepsilon \star b] : b \in B\}| \leq \omega$
- HFD öröklődően szeparábilis, HFC öröklődően Lindelöf altere 2^λ-nak
- számos „művelettel” szemben jól viselkedő tulajdonságok így megfelelő módosításokkal L és S altereit adják 2^λ-nak

HFD, HFC típusú terek

- a 2^λ Cantor kockák altereiről van szó
- $X \in [2^\lambda]^{\geq\omega}$ HFD, ha $\forall A \in [X]^\omega : \exists I \in [\lambda]^{\leq\omega}$ úgy, hogy $\forall \varepsilon \in Fn(\lambda \setminus I, 2; \omega) \exists f \in A : f \in [\varepsilon]$
- $X \in [2^\lambda]^{>\omega}$ HFC, ha $\forall n \geq 1 \forall B \in [[\lambda]^n]^\omega$ amely páronként diszjunkt halmazokból áll és $\forall \varepsilon \in 2^n$ esetén $|X \setminus \bigcup\{[\varepsilon \star b] : b \in B\}| \leq \omega$
- HFD öröklődően szeparábilis, HFC öröklődően Lindelöf altere 2^λ-nak
- számos „műveletttel” szemben jól viselkedő tulajdonságok így megfelelő módosításokkal L és S altereit adják 2^λ-nak
- CH-val 2^{ω_1}-ben konstruálható ω_1 számosságú HFD és HFC is

HFD, HFC típusú terek

- a 2^λ Cantor kockák altereiről van szó
- $X \in [2^\lambda]^{\geq\omega}$ HFD, ha $\forall A \in [X]^\omega : \exists I \in [\lambda]^{\leq\omega}$ úgy, hogy $\forall \varepsilon \in Fn(\lambda \setminus I, 2; \omega) \exists f \in A : f \in [\varepsilon]$
- $X \in [2^\lambda]^{>\omega}$ HFC, ha $\forall n \geq 1 \forall B \in [[\lambda]^n]^\omega$ amely páronként diszjunkt halmazokból áll és $\forall \varepsilon \in 2^n$ esetén $|X \setminus \bigcup \{[\varepsilon \star b] : b \in B\}| \leq \omega$
- HFD öröklődően szeparábilis, HFC öröklődően Lindelöf altere 2^λ-nak
- számos „művelettel” szemben jól viselkedő tulajdonságok így megfelelő módosításokkal L és S altereit adják 2^λ-nak
- CH-val 2^{ω_1}-ben konstruálható ω_1 számosságú HFD és HFC is
- nagyobb számosságúak kaphatók forszolással vagy más axiómákból is [2]

Na és ZFC-ben?

- Con(ZFC+MA+$\neg$CH) és $(\mathrm{MA}_{\omega_1}) \rightarrow \nexists$ Szuszlin fa

Na és ZFC-ben?

- Con(ZFC+MA+$\neg$CH) és (MA$_{\omega_1}$) $\rightarrow \nexists$ Szuszlin fa
- (Z. Szentmiklóssy, 1983) Con(ZFC+MA+$\neg$CH+$\exists$ T$_3$ S tér)

Na és ZFC-ben?

- Con(ZFC+MA+¬CH) és (MA_{ω_1}) $\rightarrow \nexists$ Szuszlin fa
- (Z. Szentmiklóssy, 1983) Con(ZFC+MA+¬CH+∃ T_3 S tér)
- (S.Todorcevic) (ZFC+PFA) $(X, \mathscr{T})$ X T_3 és öröklődően szeparábilis, akkor öröklődően Lindelöf

Na és ZFC-ben?

- Con(ZFC+MA+¬CH) és (MA_{ω_1}) $\rightarrow \nexists$ Szuszlin fa
- (Z. Szentmiklóssy, 1983) Con(ZFC+MA+¬CH+$\exists$ T_3 S tér)
- (S.Todorcevic) (ZFC+PFA) $(X, \mathscr{T})$ X T_3 és öröklődően szeparábilis, akkor öröklődően Lindelöf
- (Justin Moore, 2006 [3]) (ZFC) Létezik T_3 L tér.

Hivatkozások

Mary Ellen Rudin
Lectures on Set Theoretic Topology.
1974.

Juhász István
HFD and HFC type spaces, with applications.
Topology and its Applications, 2002.

Justin Moore
A solution to the L space problem.
Journal of the American Mathematical Society, 2006.