Irányított hipergráfok színezése

Szabó Balázs István

Témavezető: Keszegh Balázs

1. Bevezetés

A gráfok színezési problémája egy nagyon érdekes és sokak által tanulmányozott terület, ezen belül is a hipergráfok 2-színezhetősége egy rendkívül kedvelt probléma. Irányított hipergráf alatt olyan hipergráfot értünk, amelyben minden hiperél csúcshalmaza két diszjunkt részre van osztva, az egyiket fejnek a másikat talpnak nevezzük. Egy hipergráf 3-uniform, ha csak olyan hiperéleket tartalmaz, amelynek a mérete 3. A következőkben olyan irányított 3-uniform hipergráfokkal foglalkozunk, amelyekben minden élnek két talppontja és egy fejpontja van. Ezen hipergráfokat nevezzük $2 \to 1$ hipergráfnak és egy hiperélt $ab \to c$ alakban írhatunk, ahol a és b jelöli a két talppontot és c a fejpontot. Cameron $2 \to 1$ hipergráfok extremális számát vizsgálta [2]. Az $\mathcal{F}$ irányított hipergráfhoz tartozó n-edik extremális szám azon n csúcsú irányított hipergráfok maximális élszáma, amely nem tartalmazza $\mathcal{F}$-t. Keszegh egy Lovász problémát általánosítva vizsgálta, hogy egy konkrét 2-élű 2-1 hipergráf kitiltása garantál-e 2-színezhetőséget [1]. Azt mondjuk, hogy egy irányított hipergráf k színnel színezhető, ha létezik a csúcsoknak olyan színezése, amelyben minden hiperél tartalmaz legalább két színt, azaz nincs egyszínű hiperél. Tekintsük a két élet tartalmazó $2 \to 1$ hipergráfokat:

$$\begin{aligned}
V(S_1) &= \{a,b,c,d,e,f\}, \quad E(S_1) = \{ab \to c, de \to f\} \\
V(S_2) &= \{a,b,c,d\}, \quad E(S_2) = \{ab \to c, ab \to d\} \\
V(S_3) &= \{a,b,c,d\}, \quad E(S_3) = \{ab \to c, ad \to c\} \\
V(S_4) &= \{a,b,c,d\}, \quad E(S_4) = \{ab \to c, bc \to d\} \\
V(S_5) &= \{a,b,c,d\}, \quad E(S_5) = \{ab \to c, dc \to b\} \\
V(S_6) &= \{a,b,c,d,e\}, \quad E(S_6) = \{ab \to e, cd \to e\} \\
V(S_7) &= \{a,b,c,d,e\}, \quad E(S_7) = \{ab \to c, ad \to e\} \\
V(S_8) &= \{a,b,c,d,e\}, \quad E(S_8) = \{ab \to c, cd \to e\}
\end{aligned}$$

Azt szeretnénk megvizsgálni, hogy ha egy $2 \to 1$ hipergráf elkerüli ezen 8 hipergráf valamelyikét, vagyis nem tartalmazza részgráfként, akkor az elégséges feltétele-e a 2-színezhetőségnek. Például ha egy $2 \to 1$ hipergráf elkerüli S_1-et, azaz bármely két hiperélének van közös pontja akkor 3-színezhető, de 2 szín nem mindig elég, hiszen például egy 5 csúcsú teljes 3-uniform hipergráf tetszőleges írányítással megfelel a feltételeknek és nem színezhető 2 színnel. A következő táblázat mutatja az eredményeket.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
kromatikus szám	3	∞	∞	∞	∞	$3\leq$, ≤ 4	2	$2\leq$, ≤ 3

2. Színezések

2.1. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ egy $2 \to 1$ hipergráf, amely elkerüli S_1-et, azaz bármely két hiperélének van közös pontja. Ekkor $\mathcal{H}$ 3 színnel színezhető.*

Bizonyítás: Vegyük a piros, kék és zöld színeket, valamint $\mathcal{H}$ egy $ab \to c$ élét. Színezzük az a és b csúcsokat pirossal, a c csúcsot kékkel és az összes többi csúcsot zölddel. Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor minden él tartalmaz legalább két színt.□

2.2. Állítás. *Legyen $k \geq 2$ tetszőleges egész szám. Ekkor mindig létezik egy $\mathcal{H}$ $2 \to 1$ hipergráf, amely elkerüli S_2-t, azaz ha $H_1, H_2 \in E(\mathcal{H})$ és $H_1 \cap H_2 = \{u, v\}$, akkor u vagy v legalább az egyik élnek fejpontja és a kiszínezéséhez legalább k színre van szükség.*

Bizonyítás: A bizonyítás teljes indukcióval történik, $k = 2$ esetén teljesül az állítás, hiszen minden ilyen hipergráf megfelelő színezéséhez kell legalább 2 szín. Tegyük fel, hogy k-ra teljesül az állítás és legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ nem feltétlenül különböző $2 \to 1$ hipergráfok, amelyek kiszínezéséhez legalább k szín kell. Vegyük azt a $\mathcal{C}$ hipergráfot, amelyre $V(\mathcal{C}) = V(\mathcal{A}) \cup V(\mathcal{B}) \cup \{x\}$ és $E(\mathcal{C}) = E(\mathcal{A}) \cup E(\mathcal{B}) \cup \{ab \to x : a \in V(\mathcal{A}), b \in \in V(\mathcal{B})\}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathcal{C}$ elkerüli S_2-t. $\mathcal{C}$ színezéséhez legalább $k+1$ színre szükség van, mivel ha csak k színt használunk, akkor felhasználva, hogy x színe $\mathcal{A}$-ban vagy $\mathcal{B}$-ben nem szerepel az egyik $k-1$ színnel színezett, ami pedig ellentmondás.□

Az S_2-höz hasonlóan az S_3, S_4, S_5 elkerülése esetén is megadható olyan hipergráf, amelynek a kiszínezéséhez legalább k szín kell, sőt S_3, S_4 és S_5 egyszerre való elkerülése esetén is.

2.3. Állítás. *Legyen $k \geq 2$ tetszőleges egész szám. Ekkor mindig létezik egy $\mathcal{H}$ $2 \to 1$ hipergráf, amely S_3, S_4, S_5 mindegyikét elkerüli és a színezéséhez legalább k szín kell.*

Bizonyítás: A bizonyítás az előzőhöz hasonlóan teljes indukcióval történik. Tegyük fel, hogy k-ra teljesül az állítás és legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ olyan azonos csúcsszámú hipergráfok, amelyek elkerülik S_3, S_4, S_5 mindegyikét és a színezésükhöz legalább k szín kell. Legyen $V(\mathcal{A}) = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ és $V(\mathcal{B}) = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Jelölje S_n az $\{1,2,...,n\}$ permutációinak halmazát. Vegyük a következő $\mathcal{C}$ hipergráfot, amelyre $V(\mathcal{C}) = V(\mathcal{A}) \cup \cup V(\mathcal{B}) \cup \{x_\sigma : \sigma \in S_n\}$ és $E(\mathcal{C}) = E(\mathcal{A}) \cup E(\mathcal{B}) \cup \{a_i b_{\sigma(i)} \to x_\sigma : \sigma \in S_n, i \in \{1,2,...,n\} \}$.

Ekkor a $\mathcal{C}$ hipergráf S_3, S_4, S_5 mindegyikét elkerüli és legalább $k+1$ színnel színezhető. Tegyük fel indirekt, hogy $\mathcal{C}$ k színnel színezhető és vegyük $\mathcal{C}$-nek egy ilyen színezését. Ekkor létezik olyan σ permutáció és $I \subseteq \{1,2,..,n\}$, amelyre $|I| = k$, az $\{a_i : i \in I\}$ csúcsok páronként különböző színűek, valamint a_i és $b_{\sigma(i)}$ azonos színű minden $i \in I$ esetén. Ekkor az x_σ csúcs színét akárhogy választjuk meg lesz egyszínű hiperél, ezzel ellentmondásra jutottunk. Tehát $\mathcal{C}$ színezéséhez legalább $k+1$ szín kell. □

Ha egy $2 \to 1$ hipergráf elkerüli S_6-ot, akkor 2 szín nem mindig elég a kiszínezéséhez. Vegyük a következő írányítását az 5 csúcsú teljes 3-uniform hipergráfnak:

$$\begin{aligned} V(\mathcal{R}) &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \\ E(\mathcal{R}) &= \{v_1v_2 \to v_3, v_2v_3 \to v_4, v_3v_4 \to v_5, v_4v_5 \to v_1, v_5v_1 \to v_2, \\ &\quad\; v_1v_3 \to v_4, v_2v_4 \to v_5, v_3v_5 \to v_1, v_4v_1 \to v_2, v_5v_2 \to v_3\} \end{aligned}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathcal{R}$ elkerüli S_6-ot és nem színezhető két színnel.

2.1. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ egy $2 \to 1$ hipergráf és tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ elkerüli S_6-ot, azaz ha $H_1, H_2 \in E(\mathcal{H})$ és $H_1 \cap H_2 = \{v\}$, akkor v legalább az egyik élnek talppontja. Ekkor $\mathcal{H}$ 4 színnel színezhető.*

Bizonyítás: Legyen a négy szín kék, piros, zöld és sárga, valamint jelölje $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ a $\mathcal{H}$ csúcsainak halmazát. Jelölje V_1 azon u csúcsok halmazát, amelyre az u fejpontú élek halmaza a következő alakban írható $\{wu' \to u : w \in V - \{u, u'\}\}$, vagyis minden az u-t és u'-t egyszerre tartalmazó csúcshármas egy u fejpontú élet alkot. V_2 pedig jelölje azon v csúcsok halmazát, amelyre a v fejpontú élek halmaza $\{w_1w_2 \to v, w_2w_3 \to v, w_3w_1 \to v\}$ alakban írható. Könnyen ellenőrizhető, hogy minden $u \in V$ csúcs esetén kiegészíthető az u fejpontú élek halmaza további élekkel úgy, hogy $u \in V_1$ vagy $u \in V_2$ teljesüljön és a kapott hipergráf továbbra is elkerüli S_6-ot. Tehát elegendő azt az esetet vizsgálni, amikor $V = V_1 \cup V_2$. A hiperéleket három csoportba sorolhatjuk aszerint, hogy a fejpont és a talppontok milyen sorrendben követik egymást. Legyen $A = \{v_iv_j \to v_k \in E(\mathcal{H}) : k < i, k < j\}$, $B = \{v_iv_j \to v_k \in E(\mathcal{H}) : ((k < i) \wedge (j < k)) \vee ((k < j) \wedge (i < k))\}$ és $C = \{v_iv_j \to v_k \in E(\mathcal{H}) : i < k, j < k\}$. A következőkben megadunk egy megfelelő színezést.

1. lépés: Legyen kezdetben minden csúcs színe kék. Ezután a v_1 csúcstól elindulva sorban minden v_i csúcsra megvizsgáljuk, hogy létezik-e olyan C-beli él, amelynek v_i a fejpontja és az él minden pontja kék. Ha létezik ilyen él, akkor v_i csúcsot átszínezzük pirosra, különben pedig továbblépünk a v_{i+1} csúcsra. Ezzel egy olyan színezést kapunk, amelyben minden C-beli élnek van legalább egy piros csúcsa. Ugyanakkor nem létezik egyszínű piros él C-ben, mivel ha lenne egy ilyen piros él, akkor az él fejpontját csak úgy színezhettük pirosra, hogy ha létezik egy másik C-beli él is, amelynek a fejpontja ugyanaz, a két talppontja pedig kék színű és így ez a két él egy S_6-ot alkotna, ami ellentmond a feltételnek. Az is teljesül, hogy a kapott színezésben

nem létezik egyszínű piros B-beli él. Az előző gondolatmenethez hasonlóan, ha létezne egyszínű piros B-beli él, akkor létezik olyan C-beli él is, amelynek a fejpontja ugyanaz, a két talppontja pedig kék színű, ami nem lehetséges, mivel $\mathcal{H}$ elkerüli S_6-ot. Az is könnyen meggondolható, hogy nem létezik egyszínű piros A-beli él. Tehát az első lépés után kapott színezésben minden C-beli él jól színezett és ha egy B-beli él egyszínű, akkor az csak kék lehet.
2. lépés: A v_n csúcstól elindulva visszafelé haladva minden v_i csúcsra megvizsgáljuk, hogy létezik-e olyan A-beli él, amelynek v_i a fejpontja és az él nem tartalmaz zöld színű csúcsot. Ha létezik ilyen él, akkor v_i csúcsot átszínezzük zöldre, különben pedig továbblépünk a v_{i-1} csúcsra. Az így kapott színezésben minden A-beli élnek van zöld csúcsa, ugyanakkor egyszínű zöld nem lehet egyik A-beli él sem, vagyis az összes A-beli él jól színezett. Vegyük eszre, hogy v_n színe nem zöld, mivel egyik A-beli élnek sem lehet v_n a fejpontja. Az is teljesül, hogy a kapott színezésben nem létezik egyszínű zöld B-beli él, mert ha létezne ilyen él, akkor létezik olyan A-beli él is, amelynek a fejpontja ugyanaz, a két talppontja pedig kék vagy piros színű, így ez a két él egy S_6-ot alkotna. Egy C-beli él csak úgy lehet egyszínű, ha minden csúcsa zöld. Ha létezne ilyen egyszínű zöld él, akkor van olyan A-beli él, amelynek ugyanaz a fejpontja, ami pedig nem lehetséges, mivel egy C-beli és egy A-beli élnek nem lehet ugyanaz a fejpontja, a két él S_6-ot alkotna. Tehát a második lépés után minden A-beli és minden C-beli él jól színezett, valamint ha egy B-beli él egyszínű, akkor az csak kék színű lehet.
3. lépés: A v_2 csúcstól elindulva sorban minden v_i csúcsra megvizsgáljuk, hogy létezik-e olyan B-beli él, amelynek v_i a fejpontja és az él minden pontja kék. Ha létezik ilyen él, akkor v_i csúcsot átszínezzük sárgára, különben pedig továbblépünk a v_{i+1} csúcsra. Vegyük észre, hogy v_n színe nem sárga, mert egy B-beli élnek sem lehet v_n a fejpontja. Ezzel minden B-beli él színezését kijavítjuk és mivel csak kék színű csúcsokat színezünk át, így továbbra is minden $A \cup C$-beli él színezése jó lesz. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egyszínű B-beli él, legyen ez $H_1 = (v_i v_j \to v_k)$, ahol $i < j$. Ebben az esetben H_1 csak sárga lehet. Ezekből következik, hogy a v_k csúcs sárgára színezésekor egy B-beli $H_2 = v_l v_j \to v_k$, $l < j$ él egyszínű kék volt. Ha $v_k \in V_2$, akkor $v_i v_l \to v_k$ egy C-beli él, amely a 2. lépés után egyszínű kék volt, ami ellentmondás. Ha $v_k \in V_1$, akkor $v_j v_n \to v_k$ egy A-beli él, amelynek a 2. lépés után nincs zöld színű csúcsa, ami ellentmondás. Ha $j = n$, akkor pedig nem színeztük sárgára a v_j csúcsot és így H_1 nem egyszínű, ami szintén ellentmondás. Ebből következik, hogy minden B-beli él színezése is jó. Tehát egy jó színezést kaptunk 4 színnel. □

Az [1] cikk alapján S_7 elkerülése elégséges feltétele a 2-színnel való színezhetőségnek.

2.2. Tétel ([1])**.** *Legyen $\mathcal{H}$ egy $2 \to 1$ hipergráf és tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ elkerüli S_7-et, azaz ha $H_1, H_2 \in E(\mathcal{H})$ és $H_1 \cap H_2 = \{v\}$, akkor v legalább az egyiknek a fejpontja. Ekkor $\mathcal{H}$ 2-színezhető.*

2.3. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ egy $2 \to 1$ hipergráf és tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ elkerüli S_8-at, azaz ha $H_1, H_2 \in E(\mathcal{H})$ és $H_1 \cap H_2 = \{v\}$, akkor v vagy mindkettőnek fejpontja, vagy mindkettőnek talppontja. Ekkor $\mathcal{H}$ 3 színnel színezhető.*

Bizonyítás: Vegyük a piros, zöld és kék színeket, valamint jelölje $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ a $\mathcal{H}$ csúcsainak halmazát. Legyen $A = \{v_i v_j \to v_k \in E(\mathcal{H}) : k < i, k < j\}$, $B = \{v_i v_j \to v_k \in E(\mathcal{H}) : ((k < i) \wedge (j < k)) \vee ((k < j) \wedge (i < k))\}$ és $C = \{v_i v_j \to v_k \in E(\mathcal{H}) : i < k, j < k\}$. Legyen kezdetben minden csúcs színe piros. Ezután a v_1 csúcstól elindulva sorban minden v_i csúcsra megvizsgáljuk, hogy létezik-e olyan $A \cup B$-beli él, amelynek v_i a fejpontja és az él minden pontja piros. Ha létezik ilyen él, akkor v_i csúcsot átszínezzük zöldre, különben pedig továbblépünk a v_{i+1} csúcsra. Könnyen látható, hogy ezzel egy olyan színezést kapunk, amelyben minden $A \cup B$-beli élnek van legalább egy zöld csúcsa. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egyszínű zöld él $A \cup$ $\cup B$-ben és legyen $H_1 \in A \cup B$ az első ilyen él amit a színezés során megkapunk, valamint jelölje v_j azt a csúcsot, amelynek zöldre színezésével H_1 egyszínű zöld lett. Átmenetileg a színezés azon részét tekintjük, amelyben a v_j csúcsot színeztük át zöldre utolsóként. Mivel v_j-t zöldre színeztük létezik $H_2 \in A \cup B$, amelynek v_j a fejpontja és v_j átszínezése előtt egyszínű piros volt. v_j nem lehet H_1 fejpontja, mivel ekkor H_1-nek létezne egy v_k csúcsa, amelyre $k > j$, ami így biztosan piros. Ebből következik, hogy v_j H_1-nek talppontja. Mivel v_j H_2-nek fejpontja, H_1-nek talppontja, így H_1-nek és H_2-nek van egy másik közös pontja is, jelölje v_l. v_l piros, mivel H_2-nek csak egy zöld csúcsa van. Ez ellentmondás, hiszen H_1-nek nincs piros csúcsa. Tehát a kapott színezésben minden $A \cup B$-beli él jól van színezve. A harmadik színt használva a C-beli élek színezését is kijavítjuk. A v_1 csúcstól indulva sorban minden v_i csúcsra megvizsgáljuk, hogy létezik-e olyan C-beli egyszínű él, amelynek v_i a fejpontja, ha létezik ilyen, akkor v_i-t átszínezzük kékre, különben pedig továbblépünk a v_{i+1} csúcsra. Könnyen látható, hogy ezzel minden C-beli él tartalmaz legalább két színt. Egyetlen probléma az lehet, hogy egy $A \cup B$-beli élet kékre színeztünk. Tegyük fel indirekt, hogy létezik olyan $A \cup B$-beli él, amelynek minden csúcsa kék és legyen az első ilyen él $H_1 \in A \cup B$, amit megkapunk a színezés során és jelölje v_j azt a csúcsot, amelyet kékre színezve H_1 egyszínű kék lett. Hasonlóan most is tekintsük átmenetileg a színezés azon részét, amelyben a v_j csúcsot színeztük át kékre utolsóként. Legyen $H_2 \in C$ az az él, ami miatt v_j-t kékre kellett színezni. A v_j H_1-nek talppontja, H_2-nek fejpontja, vagyis van egy v_j-től különböző közös v_k csúcsuk. H_2 miatt v_k piros vagy zöld, ami ellentmond annak, hogy H_1 egyszínű kék. Tehát a kapott színezésben egyetlen él sem egyszínű. $\square$

3. Összefoglalás

Összességében elmondható, hogy a kételű $2 \to 1$ hipergráfok közül az S_2, S_3, S_4 és S_5 hipergráfok kitiltásai gyenge feltételek színezés szempontjából. S_7 elkerülése

2-színezhetőséget, S_1 elkerülése pedig 3-színezhetőséget garantál. Beláttuk, hogy S_6 kitiltása garantálja a 4-színezhetőséget és egyes esetekben szükség van 3 színre, de lehetséges, hogy S_6 kitiltása 3-színezhetőséget is garantál. Az S_8 elkerülése esetén is nyitott kérdés, hogy elegendő-e mindig a 2 szín, de azt tudjuk, hogy 3 szín elég. A nyitott kérdések közül kiemelhető az [1]-ben szereplő általánosabb sejtés:

3.1. Sejtés ([1])**.** *Legyen adott egy $\mathcal{H}$ irányított hipergráf, amelyben minden hiperélnek kevesebb fejpontja van, mint talppontja és tegyük fel, hogy ha $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$, $H_1 \cap H_2 = \{v\}$, akkor v legalább az egyiknek a fejpontja. Ekkor $\mathcal{H}$ 2-színezhető.*

Hivatkozások

[1] Keszegh Balázs. Coloring directed hypergraphs. 2022. https://arxiv.org/abs/2205.11271

[2] Alex Cameron. Extremal numbers for directed hypergraphs with two edges. Electron. J. Combin., 25(1): P1.56, 2018.