GARCH folyamatok

Hoffmann Balázs

December 23, 2022

Definíciók

A Stacionárius folyamatok című tárgy keretein belül megismerkedtünk az alábbi definíciókkal: stacionárius folyamat, gyenge-, illetve erős stacionaritás, AR folyamatok, MA folyamatok, valamint ARMA folyamatok. A fent említett definíciókat a továbbiakban ismertnek tételezem föl.

Definition

GARCH(p, q) folyamat. Egy ϵ_t folyamatot GARCH(p, q) folyamatnak nevezünk, ha létezik az első két feltételes momentuma, valamint teljesíti a következő két feltételt:
$E(\epsilon_t|\epsilon_u, u < t) = 0, t \in \mathbb{Z}$ és
léteznek olyan $\omega, \alpha_i, i = 1, ..., q$, valamint $\beta_j, j = 1, ..., p$ konstansok, melyekre

$$\sigma_t^2 = Var(\epsilon_t|\epsilon_u, u < t) = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2.$$

Definíciók

A fenti egyenletet egyszerűbben is leírhatjuk:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(B)\epsilon_t^2 + \beta(B)\sigma_t^2, t \in \mathbb{Z},$$

ahol B az ismert backshift operátor, azaz $B^i\epsilon_t^2 = \epsilon_{t-i}^2$ és $B^i\sigma_t^2 = \sigma_{t-i}^2$, továbbá $\alpha(B) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i B^i$ és $\beta(B) = \sum_{j=1}^{p} \beta_j B^j$.
Ha $\beta(z) = 0$, akkor

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-1}^2.$$

Ekkor ARCH(q) folyamatot kapunk.

Definition

Erős GARCH(p, q) folyamat. Legyen (η_t) iid η eloszlású sorozat. Ekkor (ϵ_t) erős GARCH(p, q) folyamat, ha
$\epsilon_t = \sigma_t \eta_t$, valamint
$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2$, ahol α_i, β_j nemnegatívak és ω pozitív.

Nevezetes tételek

Amennyiben $p = q = 1$, akkor GARCH(1,1) folyamat esetén a fenti feltételek az alábbi alakban írhatóak fel:

$\epsilon_t = \sigma_t \eta_t$, valamint
$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$, ahol $\omega, \alpha, \beta \geq 0$.
Legyen $a(z) = \alpha z^2 + \beta$, $\gamma = E(log(\alpha\eta_t^2 + \beta)$ és
$h_t = \omega(1 + \sum_{i=1}^{\infty} a(\eta_{t-1})...a(\eta_{t-i}))$.

Theorem

A GARCH(1,1) folyamat erős stacionaritása. Ha

$$-\infty \leq \gamma < 0,$$

akkor h_t majdnem biztosan konvergens és a fenti feltételrendszer egyértelmű megoldása az

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t}\eta_t$$

erősen stacionárius folyamat. Ha $\gamma \geq 0$ és $\omega \geq 0$, akkor nincs ilyen erősen stacionárius folyamat.

Nevezetes tételek

Theorem

A GARCH(1,1) folyamat gyenge stacionaritása. Legyen $\omega > 0$. Ha $\alpha + \beta < 1$, akkor az $\epsilon_t = \sqrt{h_t}\eta_t$ folyamat gyengén stacionárius . Ha $\alpha + \beta \geq 1$, akkor nincs megfelelő gyengén stacionárius GARCH(1,1) folyamat.

Az általános esethez tekintsük a következő reprezentációt:

$$\underline{z}_t = \underline{b}_t + A_t \underline{z}_{t-1},$$

ahol

$$\underline{b}_t = \underline{b}(\eta_t) = \begin{pmatrix} \omega\eta_t^2 \\ 0 \\ \vdots \\ \omega \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+q}, \quad \underline{z}_t = \begin{pmatrix} \epsilon_t^2 \\ \vdots \\ \epsilon_{t-q+1}^2 \\ \sigma_t^2 \\ \vdots \\ \sigma_{t-p+1}^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+q},$$

Nevezetes tételek

valamint

$$A_t = \begin{pmatrix} \alpha_1\eta_t^2 & & \cdots & & \alpha_q\eta_t^2 & \beta_1\eta_t^2 & & \cdots & & \beta_p\eta_t^2 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & 0 & 0 & & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ldots & 1 & 0 & 0 & & \ldots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & & \cdots & & \alpha_q & \beta_1 & & \cdots & & \beta_p \\ 0 & & \cdots & & 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ldots & 0 & 0 & 0 & & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

egy $(p+q) \times (p+q)$ mátrix. Jelölje (A) az A mátrix spektrálsugarát. Továbbá tudjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} log||A^t|| = log(A).$$

Nevezetes tételek

Legyen

$$\gamma = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} E(log||A_t A_{t-1}..A_1||).$$

Theorem

A GARCH(p,q) folyamat erős stacionaritása. Szükséges és elégséges feltétel a fent definiált γ-ra: $\gamma < 0$.

Ha $E(log^+||A_t||)$ véges, akkor $\lim_{t\to\infty} ||A_0...A_{-t}|| = 0 \Longrightarrow \gamma < 0$.

Theorem

A GARCH(p,q) folyamat gyenge stacionaritása. A tétel a GARCH(1,1) esettel analóg módon kimondható. Legyen $\omega > 0$. Egy GARCH(p,q) folyamat akkor és csak akkor gyengén stacionárius, ha

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1.$$

A GARCH (1,1) folyamat

A GARCH folyamatok gyakorlati alkalmazásában a legjelentősebb a GARCH (1,1), így ezen folyamat néhány tulajdonságát fogom ismertetni.
$\epsilon_t = \sigma_t \eta_t$, és
$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$, ahol $\omega, \alpha, \beta \geq 0$ definiál egy GARCH(1,1) folyamatot. Ekkor a következők teljesülnek:
$E(\epsilon_t) = 0$, a folyamat autokorrelálatlan és $E_{t-1}\epsilon_t^2 = \sigma_t$.
Továbbá teljesül, hogy ϵ_t^2 ARMA(1,1) folyamatot követ.
Legyen $\mu_i = E(\eta_t^i)$. Ekkor a GARCH (1,1) folyamat 4. momentuma:

$$E(\epsilon_t^4) = E(\sigma_t^4)E(\eta_t^4),$$

amit kifejtve:

$$E(\epsilon_t^4) = \frac{\omega^2(1 + \alpha_1 + \beta_1)\mu_4}{(1 - \mu_4\alpha_1^2 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1)(1 - \alpha_1 - \beta_1)}.$$

A GARCH (1,1) folyamat

Tegyük fel, hogy $E(\epsilon_t^4)$ létezik és $E(\epsilon_t^4) < \infty$. Ekkor

$$Corr(\epsilon_t^2, \epsilon_{t-h}^2) = \frac{\alpha_1(1-\beta_1(\alpha_1+\beta_1))}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2+\alpha_1^2}(\alpha_1+\beta_1)^{h-1}, \quad h \geq 1,$$

valamint

$$Cov(\epsilon_t^2, \epsilon_{t-h}^2) \geq 0, \ \ \forall h.$$

Az IGARCH(p,q) folyamat

Definition

Ha

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j = 1,$$

akkor a folyamatot integrált GARCH, röviden IGARCH folyamatnak nevezzük.

Theorem

Az IGARCH(1,1) folyamat erős stacionaritása.
Ha $P(\eta_t^2 = 1) < 1$ és $\alpha + \beta = 1$, akkor a folyamat erősen stacionárius.

Francq, Christian, and Jean-Michel Zakoian. GARCH models: structure, statistical inference and financial applications. John Wiley Sons, 2019.