Egyéni kutatómunka beszámoló

Hoffmann Balázs

2022 december 15.

Bevezetés

Az egyéni kutatómunka keretében GARCH folyamatokkal foglalkoztam, amelyek szorosan épülnek a jelenlegi félévben tanult Stacionárius folyamatok című tárgyban megszerzett ismeretekre. A GARCH mozaikszó jelentése általánasított autoregresszív feltételesen heteroszkedasztikus (generalized autoregressive conditionally heteroscedastic) folyamat. Az eredeti ARCH folyamatokról először 1982-ben jelent meg publikáció, azóta hatalmasra nőtt mind az elméleti, mind a gyakorlati askepktusait vizsgálók kutatótábora. Az ARCH folyamatok esetében a korábban tanult stacionárius folyamatoktól eltérően megjelenik a feltételes szórás, azaz a szórásnégyzet a múlt függvénye. A GARCH modellek megjelenése alapjaiban változtatta meg a magas volatilitású pénzügyi folyamatok matematikai kezelhetőségét. Az alábbi összefoglalóban néhány alapvető definíció után bemutatom a GARCH folyamatok különböző tulajdonságait, valamint néhány általánosítását.

Definíciók

A Stacionárius folyamatok című tárgy keretein belül megismerkedtünk az alábbi definíciókkal: stacionárius folyamat, gyenge-, illetve erős stacionaritás, AR folyamatok, MA folyamatok, valamint ARMA folyamatok. A fent említett definíciókat a továbbiakban ismertnek tételezem föl.

Definition 1 *GARCH(p, q) folyamat. Egy ϵ_t folyamatot GARCH(p, q) folyamatnak nevezünk, ha létezik az első két feltételes momentuma, valamint teljesíti a következő két feltételt:*
$E(\epsilon_t|\epsilon_u, u < t) = 0, t \in \mathbb{Z}$ *és*
léteznek olyan $\omega, \alpha_i, i = 1, ..., q$, valamint $\beta_j, j = 1, ..., p$ konstansok, melyekre

$$\sigma_t^2 = Var(\epsilon_t|\epsilon_u, u < t) = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-1}^2.$$

A fenti egyenletet egyszerűbben is leírhatjuk:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(B)\epsilon_t^2 + \beta(B)\sigma_t^2, t \in \mathbb{Z},$$

ahol B az ismert backshift operátor, azaz $B^i\epsilon_t^2 = \epsilon_{t-i}^2$ és $B^i\sigma_t^2 = \sigma_{t-i}^2$, továbbá $\alpha(B) = \sum_{i=1}^q \alpha_i B^i$ és $\beta(B) = \sum_{j=1}^p \beta_j B^j$.

Ha $\beta(z) = 0$, akkor

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-1}^2.$$

Ekkor ARCH(q) folyamatot kapunk.

Definition 2 *Erős GARCH(p, q) folyamat. Legyen (η_t) iid η eloszlású sorozat. Ekkor (ϵ_t) erős GARCH(p, q) folyamat, ha*

$\epsilon_t = \sigma_t\eta_t$, valamint

$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i\epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j\sigma_{t-j}^2$, ahol α_i, β_j nemnegatívak és ω pozitív.

Nevezetes tételek

Az alábbiakban a GARCH folyamatok stacionaritását fogjuk vizsgálni. Először a GARCH(1,1) folyamatot, majd az álalános esetet taglaljuk.

Amennyiben $p = q = 1$, akkor GARCH(1,1) folyamat esetén a fenti feltételek az alábbi alakban írhatóak fel:

$\epsilon_t = \sigma_t\eta_t$, valamint

$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$, ahol $\omega, \alpha, \beta \geq 0$.

Legyen $a(z) = \alpha z^2 + \beta$, $\gamma = E(log(\alpha\eta_t^2 + \beta)$ és $h_t = \omega(1 + \sum_{i=1}^\infty a(\eta_{t-1})...a(\eta_{t-i}))$.

Theorem 1 *A GARCH(1,1) folyamat erős stacionaritása. Ha*

$$-\infty \leq \gamma < 0,$$

akkor h_t majdnem biztosan konvergens és a fenti feltételrendszer egyértelmű megoldása az

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t}\eta_t$$

erősen stacionárius folyamat. Ha $\gamma \geq 0$ és $\omega \geq 0$, akkor nincs ilyen erősen stacionárius folyamat.

Theorem 2 *A GARCH(1,1) folyamat gyenge stacionaritása. Legyen $\omega > 0$. Ha $\alpha+\beta < 1$, akkor az $\epsilon_t = \sqrt{h_t}\eta_t$ folyamat gyengén stacionárius . Ha $\alpha+\beta \geq 1$, akkor nincs megfelelő gyengén stacionárius GARCH(1,1) folyamat.*

Az általános esethez tekintsük a következő reprezentációt:

$$\underline{z}_t = \underline{b}_t + A_t\underline{z}_{t-1},$$

ahol

$$\underline{b}_t = \underline{b}(\eta_t) = \begin{pmatrix} \omega\eta_t^2 \\ 0 \\ \vdots \\ \omega \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+q}, \quad \underline{z}_t = \begin{pmatrix} \epsilon_t^2 \\ \vdots \\ \epsilon_{t-q+1}^2 \\ \sigma_t^2 \\ \vdots \\ \sigma_{t-p+1}^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+q},$$

valamint

$$A_t = \begin{pmatrix} \alpha_1\eta_t^2 & & \cdots & & \alpha_q\eta_t^2 & \beta_1\eta_t^2 & & \cdots & & \beta_p\eta_t^2 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & 0 & 0 & & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 1 & 0 & 0 & & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & & \cdots & & \alpha_q & \beta_1 & & \cdots & & \beta_p \\ 0 & & \cdots & & 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & 0 & & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

egy $(p+q)\times(p+q)$ mátrix. Jelölje (A) az A mátrix spektrálsugarát. Továbbá tudjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} log||A^t|| = log(A).$$

Legyen

$$\gamma = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} E(log||A_t A_{t-1}..A_1||).$$

Theorem 3 *A GARCH(p,q) folyamat erős stacionaritása. Szükséges és elégséges feltétel a fent definiált γ-ra:*

$$\gamma < 0.$$

Ha $E(log^+||A_t||)$ véges, akkor

$$\lim_{t\to\infty} ||A_0 ... A_{-t}|| = 0 \Longrightarrow \gamma < 0$$

.

Theorem 4 *A GARCH(p,q) folyamat gyenge stacionaritása. A tétel a GARCH(1,1) esettel analóg módon kimondható. Legyen $\omega > 0$. Egy GARCH(p,q) folyamat akkor és csak akkor gyengén stacionárius, ha*

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1.$$

A GARCH (1,1) folyamat

A GARCH folyamatok gyakorlati alkalmazásában a legjelentősebb a GARCH (1,1), így ezen folyamat néhány tulajdonságát fogom ismertetni.

$\epsilon_t = \sigma_t \eta_t$, és

$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$, ahol $\omega, \alpha, \beta \geq 0$ definiál egy GARCH(1,1) folyamatot. Ekkor a következők teljesülnek:

$E(\epsilon_t) = 0$, a folyamat autokorrelálatlan és $E_{t-1}\epsilon_t^2 = \sigma_t$.

Továbbá teljesül, hogy ϵ_t^2 ARMA(1,1) folyamatot követ.

Legyen $\mu_i = E(\eta_t^i)$. Ekkor a GARCH (1,1) folyamat 4. momentuma:

$$E(\epsilon_t^4) = E(\sigma_t^4) E(\eta_t^4),$$

amit kifejtve:

$$E(\epsilon_t^4) = \frac{\omega^2 (1 + \alpha_1 + \beta_1) \mu_4}{(1 - \mu_4 \alpha_1^2 - \beta_1^2 - 2\alpha_1 \beta_1)(1 - \alpha_1 - \beta_1)}.$$

Tegyük fel, hogy $E(\epsilon_t^4)$ létezik és $E(\epsilon_t^4) < \infty$. Ekkor

$$Corr(\epsilon_t^2, \epsilon_{t-h}^2) = \frac{\alpha_1 (1 - \beta_1 (\alpha_1 + \beta_1)}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \alpha_1^2} (\alpha_1 + \beta_1)^{h-1}, \quad h \geq 1,$$

valamint

$$Cov(\epsilon_t^2, \epsilon_{t-h}^2) \geq 0, \ \ \forall h.$$

Az IGARCH(p,q) folyamat

Definition 3 *Ha*

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j = 1,$$

akkor a folyamatot integrált GARCH, röviden IGARCH folyamatnak nevezzük.

Theorem 5 *Az IGARCH(1,1) folyamat erős stacionaritása.*

Ha $P(\eta_t^2 = 1) < 1$ és $\alpha + \beta = 1$, akkor a folyamat erősen stacionárius.

GARCH(p,q) folyamatok ARCH(∞) reprezentációja

Definition 4 *Egy* (ϵ_t) *folyamatot ARCH(∞) folyamatnak nevezünk, ha létezik* (η_t) *valószínűségi változók sorozata, ahol* η_t *iid,* $E(\eta_t) = 0$ *és* $E(\eta_t^2) = 1$*, valamint nemnegatív* ϕ_i *konstansok sorozata, ahol* $\phi_0 > 0$*, hogy*

$$\epsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad \sigma_t^2 = \phi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \epsilon_{t-1}^2.$$

Theorem 6 *GARCH(p,q) folyamat ARCH(∞) reprezentációja.*

Ha (ϵ_t) *erősen stacionárius GARCH(p,q) folyamat, akkor létezik ARCH(∞) reprezentációja, a* ϕ_i *konstansok pedig:*

$$_0 = \frac{\omega}{B(1)}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i z^i = \frac{A(z)}{B(z)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad |z| \leq 1,$$

ahol $A(z) = \alpha_1 z + ... + \alpha_q z^q$ *és* $B(z) = 1 - \beta_1 z - ... - \beta_p z^p$.

Forrás

Francq, Christian, and Jean-Michel Zakoian. GARCH models: structure, statistical inference and financial applications. John Wiley Sons, 2019.