(φ, Γ)-modulusok

Egyéni kutatómunka

Anderlik Csaba

Témavezető:
Zábrádi Gergely
egyetemi docens

Algebra és Számelmélet Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem

Budapest, December 2022

Motiváció és Alkalmazások:

1. Az egyik legfontosabb alkalmazása a (φ, Γ)-modulusnak, amely egyben talán Fontaine-ék alapmotivációja is volt, ami az abszolút Galois csoport repezentációinak jobb megértése.
2. Az Iwasawa elméletben is használják (φ, Γ)-modulusokat, hogy segítségükkel p-adikus L-függvényeket konstruáljanak, amik p-adikus Galois reprezentációk segítségével generálhatók.

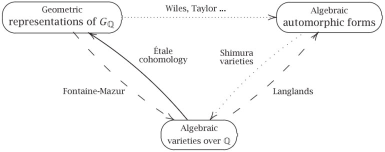

Figure: Modularitási sejtések, Kisin [June/July 2007]

Út a (φ, Γ)-modulus definiálásáig 1.

Legyen V egy $\mathbb{Z}_p$-reprezentációja H_K-nak, ahol $H_K = \mathrm{Gal}(E^s/E) = \mathrm{Gal}(\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}/\mathcal{E})$, és E egy p-adikus test és $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-vel jelöljük E-nek a Cohen-gyűrűjét.

φ-modulus

M, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ vektorteret, akkor nevezzük φ-modulusnak, ha létezik egy φ leképezés M-en, amely szemi-lineáris és $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-re megszorítva megegyezik az abszolút Frobenius leképezéssel.

étale φ-modulus

M, mint $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ feletti φ-modulust, akkor nevezzük étale-nak, ha $\Phi : M_\varphi \to M$ leképezés izomorfizmus, ahol $\Phi(\lambda \otimes x) := \lambda\varphi(x)$, $x \in M$, $\lambda \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, és ha $\dim_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} M$ véges.

Az $\mathcal{M}_\varphi^{\text{ét}}$-val jelöljük az étale φ-modulus kategóriáját, és $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G)$ a G csoport $\mathbb{Z}_p$-reprezentációinak kategóriáját.

Út a (φ,Γ)-modulus definiálásáig 2.

Ekvivalencia tétele

1. A $\mathbf{M}_{\mathbb{Z}_p} : \mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G) \longrightarrow \mathcal{M}_{\varphi}^{\text{ét}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ funktor megad egy ekvivalenciát a két kategória között és $\mathbf{V}_{\mathbb{Z}_p} : \mathcal{M}_{\varphi}^{\text{ét}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}) \longrightarrow \mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G)$ funktor kvázi-inverze $\mathbf{M}_{\mathbb{Z}_p}$-nek.
2. A $\mathbf{M}_{\mathbb{Q}_p} : \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G) \longrightarrow \mathcal{M}_{\varphi}^{\text{ét}}(\mathcal{E})$ funktor megad egy ekvivalenciát a két kategória között és $\mathbf{V}_{\mathbb{Q}_p} : \mathcal{M}_{\varphi}^{\text{ét}}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G)$ funktor kvázi-inverze $\mathbf{M}$-nek.

(18.-as tétel)

A tétel jelölései

1. $\mathbf{M}_{\mathbb{Z}_p} : V \longmapsto (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{ur}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{H_K}$, $\mathbf{V}_{\mathbb{Z}_p} : D \longmapsto (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{ur}}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D)_{\varphi=1}$
2. $\mathbf{M}_{\mathbb{Q}_p} : V \longmapsto (\widehat{\mathcal{E}^{\text{ur}}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{H_K}$, $\mathbf{V}_{\mathbb{Q}_p} : D \longmapsto (\widehat{\mathcal{E}^{\text{ur}}} \otimes_{\mathcal{E}} D)_{\varphi=1}$

(φ, Γ)-modulus

(φ, Γ)-modulus definíciója:

A D étale φ-modulust $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ (vagy $\mathcal{E}$) felett (φ, Γ)-modulusnak nevezzük, ha létezik egy csoporthatás Γ_K-n, amely szemi-lineáris, és felcserélhető (φ) az abszolút Frobenius leképezéssel. Továbbá D étale (φ, Γ)-modulus, ha a csoporthatás Γ_K-n folytonos.

Az előző tétel szerint, ha V egy $\mathbb{Z}_p$- vagy $\mathbb{Q}_p$-reprezentáció, akkor az $\mathbf{M}(V)$ egy étale (φ, Γ)-modulus lesz az előző tétel szerint. Továbbá így az előző tétel szerint az $\mathbf{M}$ funktor meg ad egy ekvivalenciát a $\mathbb{Z}_p$- vagy $\mathbb{Q}_p$-reprezentációk és az étale (φ, Γ)-modulusok között.

Galois-bővítés hálók

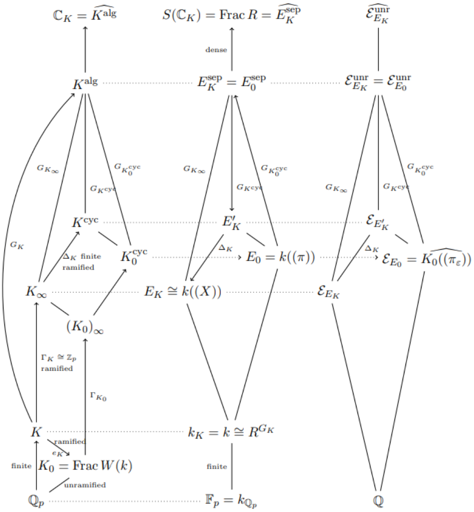

Figure: Galois bővítések, Szabó [2015]

A ψ operátor

ψ operátor

A $\psi : \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{ur}}}}$ operátort definiáljuk úgy, hogy

$$\psi : \sum_{i=0}^{p-1} [\epsilon]^i \varphi(x_i) \longmapsto x_0.$$

Állítás:

1. $\psi\varphi = \mathrm{Id}$.
2. ψ felcserélhető G_K általi csoporthatással.

A bizonyítása megtalálható Fontaine and Ouyang 84. oldalán.

Állítás ψ operátorral kapcsolatban

Állítás:

1. Ha V egy $\mathbb{Z}_p$-reprezentációja G_K-nak, akkor egyértelműen létezik egy ilyen $\psi : \mathbf{M}_{\mathbb{Z}_p}(V) \to \mathbf{M}_{\mathbb{Z}_p}(V)$ operátor, amelyre teljesül, hogy

$$\psi(\varphi(a)x) = a\psi(x), \quad \psi(a\varphi(x)) = \psi(a)x.$$

   Ahol $a \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathcal{K}}}$, és $x \in \mathbf{M}_{\mathbb{Z}_p}(V)$ sőt, mi több ψ kommutál Γ_K-val.

2. Ha D egy étale (φ, Γ)-modulus $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ vagy $\mathcal{E}_K$ felett, akkor egyértelműen létezik egy olyan $\psi : D \to D$ operátor, amelyre az elsőrészben teljesültek igazak. Továbbá minden $x \in D$-re teljesül, hogy $x = \sum_{i=0}^{p^n-1} [\epsilon]^i \varphi^n(x_i)$, ahol $x_i = \psi^n([\epsilon]^{-i}x)$.

A bizonyítása megtalálható Fontaine and Ouyang 84. oldalán.

Bibliográfia

J.-M. Fontaine and Y. Ouyang. Theory of p-adic Galois Representations. Elérhető: https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~fontaine/galoisrep.pdf.

M. Kisin. What is ... a Galois Representation?, June/July 2007. Elérhető: https://www.ams.org/notices/200706/tx070600718p.pdf.

D. Szabó. p-adic Galois representations and (φ, Γ)-modules, 2015. Elérhető: https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/msc_mat/2015/szabo_david.pdf.