Egyéni kutatómunka 1: Neumann-algebrák és klasszifikációjuk

Szabari Mátyás

2021. május 20.

Áttekintés

Motiváció

- **Belső motiváció** (funkcionálanalízisből)
  - Általános C*-algebrákban nem biztos, hogy vannak projekciók
  - Spektráltétel
- **Külső motiváció**
  - Fizika (főleg kvantumfizika)
  - Ergodelmélet
  - Nem-kommutatív geometria, csomóelmélet, differenciálható sokaságok, stb...

Neumann algebrák projekciói

Definíció

Legyen $\mathcal{A}$ egy von Neumann algebra $\mathcal{H}$ felett. Ekkor az $\mathcal{A}$ centrumának nevezzük a

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$$

halmazt (ahol $\mathcal{A}'$ az $\mathcal{A}$ kommutánsa).

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ von Neumann algebra faktor, ha az

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}) \simeq \mathbb{C}.$$

Projekciók tulajdonságai I.

Állítás

Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ egy von Neumann algebra $\mathcal{H}$ Hilbert tér felett. Ekkor $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ egy teljes hálót alkot az önadjungált operátorok definiált rendezés megszorításával.

Definíció

Azt mondjuk, hogy p egy $\mathcal{A}$-beli projekció centrális projekció, ha $p \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$.

Projekciók ekvivalenciája

Definíció

Azt mondjuk, hogy a $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ *a ekvivalens projekciók, ha létezik egy olyan* $u \in \mathcal{A}$ *parciális izometria, hogy* $p = uu^*$ *és* $q = u^*u$ *(jel.:* $p \sim q$*).*

Definíció

Azt mondjuk, hogy a p*-t dominálja a* q*, ha létezik olyan* $p' \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$*, hogy* $p' \sim p$ *és* $p' \leq q$*. Ennek jelölése* $p \preceq q$*.*

Projekciók ekvivalenciája: tulajdonságok

Állítás

Ha $u \in \mathcal{A}$ egy parciális izometria, akkor u^*u egy $\mathcal{A}$-beli projekció $\ker(u)^\perp$-ra és uu^* pedig egy projekció $\operatorname{im}(u)$-ra.

Állítás

Legyen I egy indexhalmaz és $\{p_i\}_{i\in I}$ és $\{q_i\}_{i\in I}$ $\mathcal{A}$-beli projekciók egy-egy I-vel indexelt családja, melyre minden $i \in I$-re $p_i \sim q_i$. Ekkor

$$\bigvee_{i\in I} p_i \sim \bigvee_{i\in I} q_i$$

Neumann algebrák típusai I.

Definíció

Legyen $\mathcal{A}$ egy Neumann algebra és $p \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ projekció. Ekkao p-re azt mondjuk, hogy

- *Abel típusú/kommutatív: ha az $\mathcal{A}_p$ redukált algebra kommutatív.*
- *véges: ha bármely $q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$-ra $q \leq p$ és $q \sim p$ esetén $q = p$.*
- *végtelen: ha nem véges.*
- *tisztán végtelen: ha 0-n kívül nem létezik olyan $q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ véges nem-nulla projekció, amire $q \leq p$.*
- *teljesen végtelen: ha $q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$-ra ha qp véges, akkor $qp = 0$.*
- *minimális: ha $p \neq 0$ és $\mathcal{A}_p \simeq \mathbb{C}$ (vagy ekvivalens módon $q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, $q \leq p$ esetén $q = 0$ vagy $q = p$).*

Neumann algebrák típusai II.

Definíció

Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ Abel típusú, véges, végtelen, tisztán végtelen, teljesen végtelen, ha $1 \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ rendelkezik a megfelelő tulajdonsággal.

$$\text{minimalitás} \implies \text{kommutativitás} \implies \text{végesség} \implies$$

$$\implies \text{nem tisztán végtelenség}$$

Illetve:

$$\text{tisztán végtelenség} \implies \text{teljesen végtelenség.}$$

Neumann algebrák típusai III.

Definíció

Legyen $\mathcal{A}$ egy von Neumann algebra $\mathcal{H}$ Hilbert tér felett. Ekkor

- *$\mathcal{A}$ féligvéges, ha minden $p \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{A}))$ centrális projekcióhoz létezik $q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ nem-nulla véges projekció, hogy $q \leq p$.*
- *$\mathcal{A}$ I-típusú, ha minden $p \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{A}))$ centrális projekcióhoz létezik $q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ nem-nulla Abel-projekció, hogy $q \leq p$.*
- *$\mathcal{A}$ II-típusú, ha féligvéges és nem tartalmaz nem-nulla Abel-projekciót.*
- *$\mathcal{A}$ III-típusú, ha nem tartalmaz nem-nulla véges projekciót.*

Neumann algebrák típusai IIII.

Definíció

Legyen $\mathcal{A}$ egy von Neumann algebra $\mathcal{H}$ Hilbert tér felett. Ekkor

- *$\mathcal{A}$ I_{fin}-típusú, ha véges és I-típusú.*
- *$\mathcal{A}$ I_{∞}-típusú, ha végtelen és I-típusú.*
- *$\mathcal{A}$ II_1-típusú, ha véges és II-típusú.*
- *$\mathcal{A}$ II_{∞}-típusú, ha végtelen és II-típusú.*

- $\mathcal{A}$ *diszkrét*, ha I-típusú.
- $\mathcal{A}$ *folytonos*, ha II-típusú vagy III-típusú.

Neumann algebrák típusai: Klasszifikáció

Tétel (Klasszifikációs tétel)

Legyen $\mathcal{A}$ egy von Neumann algebra a $\mathcal{H}$ Hilbert tér felett. Ekkor léteznek egyértelműen olyan p_i centrális projekciók $\mathcal{A}$-ban $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, hogy $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$, továbbá:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{A}_{p_1} & I_{fin}\text{-típusú} \\ \mathcal{A}_{p_2} & I_{\infty}\text{-típusú} \\ \mathcal{A}_{p_3} & II_1\text{-típusú} \\ \mathcal{A}_{p_4} & II_{\infty}\text{-típusú} \\ \mathcal{A}_{p_5} & III\text{-típusú} \end{array}$$

Kommutatív von Neumann algebrák

Tétel

*Legyen $\mathcal{A}$ egy kommutatív von Neumann algebra egy szeparábilis Hilbert tér felett. Ekkor létezik egy olyan Γ kompakt, M_2, Hausdorff topologikus tér és egy olyan pozitív mérték Γ-n, hogy az $\mathcal{A}$ *-izomorf $L_\infty(\Gamma, \mu)$-vel.*

Direkt integrál (informálisan)

- Mértéktér, rajta Hilbert terek egy mezeje → mérhető, integrálható szelések (ekv. osztájainak) Hilbert tere → Direkt integrál
- Felbontható, diagonalizálható operátorok
- von Neumann algebrák direkt integrálja
- von Neumann algebra felbontása faktorok direkt integráljára

Hivatkozások

- Murphy, G. J. *C*-algebras and operator theory*, Academic Press, Inc. 1990.
- Kadison, R. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, Springer, 1991.
- Stratila, S-V., Zsidó, L. *Lectures on von Neumann Algebras*, Cambridge University Press, 2009.
- Jacobs, E.L. *Types of von Neumann Algebras*, elektronikus forrás, 2011.

Köszönöm a figyelmet!