1. Egyéni kutatómunka 1. (Szabari Mátyás)

1.1. von Neumann algebrák projekciói

1.1. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ egy von Neumann algebra $\mathcal{H}$ felett. Ekkor az $\mathcal{A}$ *centrumának* nevezzük a

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = A \cap \mathcal{A}'$$

halmazt, vagyis az olyan $\mathcal{A}$-beli operátorok halmazát, melyek minden egyéb $\mathcal{A}$-beli elemmel kommutálnak.

A centrum fogalma kulcsfontosságú szerepet játszik a von Neumann algebrák elméletében, ami maga is egy von Neumann algebra (természetesen kommutatív).

1.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ von Neumann algebra *faktor*, ha az $\mathcal{A}$ centruma egy dimenziós (vagyis az egység skalárszorosaiból áll).

A projekció egy másik olyan fogalom, ami fontos szerephez jut ezen algebrák vizsgálatában, mivel egy von Neumann algebra nagyon "gazdag" projekciókban (kicsit formálisabban az algebra projekciói által generált altér sűrű a norma-topológia szerint). Legyen $\mathcal{H}$ egy Hilbert tér, ekkor jelöljük $\mathcal{P}(\mathcal{A})$-val egy $\mathcal{A} \subset B(\mathcal{H})$ algebra projekcióit.

1.3. Állítás. *Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ egy von Neumann algebra $\mathcal{H}$ Hilbert tér felett. Ekkor $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ egy teljes hálót alkot az önadjungált operátorok definiált rendezés megszorításával.*

1.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy p egy $\mathcal{A}$-beli projekció *centrális projekció*, ha $p \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$.

Az, hogy p egy centrális projekció, az azt jelenti, hogy az $\mathcal{A}$ felírható direkt összeg alakban ($\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_p \oplus \mathcal{A}_{1-p}$, [ezt a jelölést később definiálom]).

1.5. Definíció. Hogy ha p és q egy $\mathcal{A}$-beli projekció és $pq = 0$ (ekvivalens módon $qp = 0$), akkor azt mondjuk, hogy p és q merőlegesek egymásra.

Ez a megfogalmazás természetesen ekvivalens azzal, hogy a p-hez és a q-hoz tartozó zárt alterek $\mathcal{H}$-ban merőlegesek egymásra. Ekkor $p + q$ megegyezik $p \vee q$-val (ahol $'\vee'$ az únió művelete a projekcióhálóban).

1.6. Állítás. *Legyen $\mathcal{A}$ egy Neumann algebra és $a \in \mathcal{A}$. Ekkor az olyan $p \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ projekcióknak, melyre $pa = a$ létezik legkisebb eleme. Ezt a projekciót az a centrális tartójának hívjuk, és $z(a)$-val jelöljük. A $z(a)$ megegyezik a $(\mathcal{A}a)\mathcal{H}$ zárt altérre vett projekcióval.*

Ha speciálisan egy $p \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$-t tekintünk, akkor $z(p)$ a legkisebb olyan centrális projekció, amire $p \leq z(p)$.

Abban az esetben, ha egy $a, b \in \mathcal{A}$ elemekre $z(a)z(b) = 0$ (vagyis $z(a)$ és $z(b)$) merőlegesek, azt mondjuk, hogy az a és a b centrálisan merőlegesek.

1.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ a *ekvivalens* projekciók, ha létezik egy olyan $u \in \mathcal{A}$ parciális izometria, hogy $p = uu^*$ és $q = u^*u$, ekkor a $p \sim q$ jelölést használjuk. Továbbá azt mondjuk, hogy a p-t *dominálja* a q, ha létezik olyan $p' \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, hogy $p' \sim p$ és $p' \leq q$. Ennek jelölése $p \preceq q$.

A $\sim$ reláció valóban egy ekvivalencia-reláció, a $\preceq$ pedig egy kvázirendezés (preorder) $\mathcal{P}(\mathcal{A})$-n. Ezek néhány alapvető tulajdonságai:

(1) Ha $p, q \in \mathcal{A}$-ra $p \sim q$ teljesül, akkor $z(p) = z(q)$.

(2) Ha $p \sim 0$, akkor $p = 0$.

(3) Ha $p \sim q$ és $r \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{A}))$, akkor $pr \sim qr$ (könnyen látható ur parciális izometriával).

1.8. Állítás. *Ha $u \in \mathcal{A}$ egy parciális izometria, akkor u^*u egy $\mathcal{A}$-beli projekció* $\ker(u)^\perp$*-ra és uu^* pedig egy projekció* $\operatorname{im}(u)$*-ra.*

1.9. Állítás. *Legyen I egy indexhalmaz és $\{p_i\}_{i \in I}$ és $\{q_i\}_{i \in I}$ $\mathcal{A}$-beli projekciók egy-egy I-vel indexelt családja, melyre minden $i \in I$-re $p_i \sim q_i$. Ekkor*

$$\bigvee_{i \in I} p_i = \bigvee_{i \in I} q_i$$

1.10. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ egy von Neumann algebra $\mathcal{H}$ Hilbert tér felett és $p \in \mathcal{A}$ projekció. Ekkor a $p\mathcal{A}p$ algebrát *redukált von Neumann* algebrának nevezzük, és $\mathcal{A}_p$-vel jelöljük.

A definíció helyes, olyan értelemben, hogy $\mathcal{A}_p$ valóban egy von Neumann algebra. Könnyen látható, hogy $\mathcal{A}_p$ elemei azok az $\mathcal{A}$-beli elemek, melyek $\ker p$-t $\ker p$-be és $\operatorname{im} p$-t $\operatorname{im} p$-be küldik. Így $\mathcal{A}_p$ tekinthető egy von Neumann algebrának $\mathcal{H}_p = p\mathcal{H}$ felett (vannak szerzők akkik így is definiálják, vagyis $\mathcal{A}_p = p\mathcal{A}$, ami hat $\mathcal{H}_p$ felett).

1.11. Állítás. *Ha $p \sim q$ $\mathcal{A}$-beli izomorf projekciók, akkor $\mathcal{A}_p$ $*$-izomorf $\mathcal{A}_q$-val.*

A következő tétel egy hasznos eszköz projekciók vizsgálatához.

1.12. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy von Neumann algbra $\mathcal{H}$ Hilbert tér felett és p, q tetszőleges projekciók $\mathcal{A}$-ban. Ekkor a következő három állítás ekvivalens:*

(1) $z(p)$ és $z(q)$ nem merőlegesek.

(2) $e\mathcal{A}f \neq 0$.

(3) Léteznek olya, $p', q' \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ *projekciók, melyekre* $p' \sim q'$, *továbbá* $p' \leq p$ *és* $q' \leq q$.

1.13. Tétel (Összehasonlítási tétel)**.** *Tetszőleges* $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ *projekciókra létezik olyan* $r \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{A}))$ *centrális projekció, melyre*

$$pr \leq qr, \qquad \textit{és} \qquad p(1-r) \geq q(1-r).$$

A tétel következménye, hogy ha $\mathcal{A}$ egy faktor, akkor $\mathcal{P}(\mathcal{A})/\sim$ a $\preceq/\sim$ relációval teljesen rendezett.

1.2. von Neumann algebrák típusai

Először is definiáljuk projekciók speciális típusait, majd ezek segítségével definiáljuk a Neumann algebrák típusait.

1.14. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ egy Neumann algebra és $p \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ projekció.

- Azt mondjuk, hogy p *Abel típusú* vagy *kommutatív (abelian)*, ha az $\mathcal{A}_p$ redukált algebra kommutatív.
- Azt mondjuk p-re, hogy *véges*, ha bármely $q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$-ra $q \leq p$ és $q \sim p$ esetén $q = p$.
- Ha p nem véges, akkor azt mondjuk, hogy *végtelen.*
- A p *tisztán végtelen*, ha 0-n kívül nem létezik olyan $q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ projekció, amire $q \leq p$.
- A p *teljesen (/ténylegesen/valóban) végtelen* ('properly', nem tudom mi a megfelelő fordítása), ha $q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$-ra ha qp véges, akkor $qp = 0$.
- p *minimális*, ha $p \neq 0$ és $\mathcal{A}_p = \mathbb{C}p$ (vagy ekvivalens módon $q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, $q \leq p$ esetén $q = 0$ vagy $q = p$).

Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ *Abel típusú*, *véges*, *végtelen*, *tisztán végtelen*, *teljesen végtelen*, ha $1 \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ rendelkezik a megfelelő tulajdonsággal.

Egy projekcióra teljesülnek a következő implikációk:

$$\text{minimalitás} \Longrightarrow \text{kommutativitás} \Longrightarrow \text{végesség} \Longrightarrow \text{nem tisztán végtelenség}$$

illetve

$$\text{tisztán végtelenség} \Longrightarrow \text{teljesen végtelenség.}$$

Továbbá látható az is, hogy ha p véges, illetve Abel, és $q \leq p$ akkor q is véges, illetve Abel.

1.15. *Példa.* Legyen s a shift/eltolás operátor $l_2(\mathbb{N})$ Hilbert téren. Ekkor $s^*s \sim ss^*$ és $ss^* \leq s^*s = 1$, ezért $s^*s = 1$ végtelen.

1.16. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ egy von Neumann algebra $\mathcal{H}$ Hilbert tér felett. Ekkor

- $\mathcal{A}$ *féligvéges*, ha minden $p \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{A}))$ centrális projekcióhoz létezik $q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ nem-nulla véges projekció, hogy $q \leq p$.

- $\mathcal{A}$ *I-típusú*, ha minden $p \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{A}))$ centrális projekcióhoz létezik $q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ nem-nulla Abel-projekció, hogy $q \leq p$.

- $\mathcal{A}$ *II-típusú*, ha féligvéges és nem tartalmaz nem-nulla Abel-projekciót.

- $\mathcal{A}$ *III-típusú*, ha nem tartalmaz nem-nulla Abel-projekciót.

Továbbá:

- $\mathcal{A}$ I_{fin}*-típusú*, ha véges és I-típusú.

- $\mathcal{A}$ I_∞*-típusú*, ha végtelen és I-típusú.

- $\mathcal{A}$ II_{fin}*-típusú*, ha véges és II-típusú.

- $\mathcal{A}$ II_∞*-típusú*, ha végtelen és II-típusú.

Szokták még a következő definíciókat is használni:

- $\mathcal{A}$ *diszkrét*, ha I-típusú.

- $\mathcal{A}$ *folytonos*, ha II-típusú vagy III-típusú.

A következő tétel pedig egy nagyon fontos tétel a von Neumann algebrák témakörében, ugyanis azt mondja ki, hogy az imént definiált típusokkal klasszifikálni lehet a Neumann algebrákat.

1.17. Tétel (Klasszifikációs tétel)**.** *Legyen $\mathcal{A}$ egy von Neumann algebra a $\mathcal{H}$ Hilbert tér felett. Ekkor léteznek egyértelműen olyan p_i centrális projekciók $\mathcal{A}$-ban*

($i = 1, 2, 3, 4, 5$), hogy $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$, továbbá:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{A}_{p_1} & I_{fin}\text{-típusú} \\ \mathcal{A}_{p_2} & I_{\infty}\text{-típusú} \\ \mathcal{A}_{p_3} & II_{fin}\text{-típusú} \\ \mathcal{A}_{p_4} & II_{\infty}\text{-típusú} \\ \mathcal{A}_{p_5} & III\text{-típusú} \end{array}$$

1.18. Következmény. *A tétel közvetlen következménye, hogy egy $\mathcal{A}$ von Neumann algebra felbontható a fenti típusok direkt összegére.*

Továbbá egy másik következmény, mely igen hasznos:

1.19. Következmény. *Ha az $\mathcal{A}$ von Neumann algebra egy faktor, akkor I_{fin}, I_{∞}, II_{fin}, II_{∞} vagy III-típusú.*

1.3. Direkt integrál felbontás

1.20. Definíció. Legyen (Γ, μ) egy σ-véges mértéktér és $\{\mathcal{H}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ szeparábilis Hilbert terek egy Γ-val indexelt családja. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{H} \subset \prod_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{H}_\gamma \big/ \{\mu = 0\}$ a $\{\mathcal{H}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *direkt integrálja* (Γ, μ) szerint, ha teljesülnek a következő tulajdonságok:

(1) Minden $\xi, \zeta \in \mathcal{H}$-ra a $\gamma \mapsto \langle \xi(\gamma), \zeta(\gamma)\rangle$ μ-integrálható és $\langle \xi, \zeta\rangle = \int_\Gamma \langle \xi(\gamma), \zeta(\gamma)\rangle d\mu(\gamma)$.

(2) Tetszőleges $\xi_\gamma \in \mathcal{H}_\gamma$ esetén (minden $\gamma \in \Gamma$-ra), ha minden $\zeta \in \mathcal{H}$-ra a $\gamma \mapsto \langle \xi_\gamma, \zeta\rangle$ függvény integrálható, akkor létezik $\xi \in \mathcal{H}$, melyre $\xi(\gamma) = \xi_\gamma$ μ-majdnem mindenütt.

Ez esetben az $\int_\Gamma^\oplus \mathcal{H}_\gamma d\mu(\gamma) = \mathcal{H}$ jelölést használjuk, és ezt (ill. $\gamma \mapsto \xi(\gamma)$-t) a $\mathcal{H}$ (ill. ξ) direkt integrál felbontásának nevezzük.

Az előző definícióhoz hasonlóan, az integrálhatóságot mérhetőségre felcserélve, definiálható a $\{\mathcal{H}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ Hilbert terek *mérhető mezeje*, melynek az integrálhatóság speciális esete.

1.21. *Példa.* Az $L_2(\Gamma, \mu)$ Hilbert tér a direkt integrálja a $\mathbb{C}_\gamma$ egy dimenziós (komplex) Hilbert terek mezejének.

1.22. *Példa.* Egy Γ-val indexelt Hilbert terek családjának direkt összege a $\{\mathcal{H}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ direkt integrálja (Γ, μ) szerint, ahol μ a számláló mérték Γ-n.

Előfordulhat, hogy a különböző $\mathcal{H}_\gamma$-ák dimenziója eltér. Azonban belátható, hogy $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ esetén a $\Gamma_n = \{\gamma \in \Gamma | \dim(\mathcal{H}_\gamma) = n\}$ mérhető részhalmaza Γ-nak. Továbbá ennek segítségével, egy $\int_\Gamma^\oplus \mathcal{H}_\gamma d\mu(\gamma)$ direkt integrál esetén teljesül az, hogy

$$\int_\Gamma^\oplus \mathcal{H}_\gamma d\mu(\gamma) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}\cup\infty} \int_{\Gamma_n}^\oplus \mathcal{H}_\gamma d\mu(\gamma).$$

Így elegendő olyan Hilbert tér mezők vizsgálatára szortkozni, melyben a Hilbert terek dimenziója konstans. Így létezik olyan $\mathcal{H}_0$ Hilbert tért, hogy minden $\gamma \in \Gamma$-ra $\mathcal{H}_\gamma \simeq \mathcal{H}_0$. Ekkor $\int_\Gamma^\oplus \mathcal{H}_\gamma d\mu(\gamma)$ természetesen izomorf a négyzetesen (Bochner értelemben) integrálható $\mathcal{H}_0$ értékű függvények terével Γ-n.

1.23. Definíció. Legyen $\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ operátorok egy olyan családja, melyre $\forall\gamma \in \Gamma$: $a_\gamma \in B(\mathcal{H}_\gamma)$, és $\{\|a_\gamma\|\}_{\gamma\in\Gamma}$ függvény μ-majdnem korlátos. Ekkor azt mondjuk, hogy ez az operátorcsalád mérhető ha teljesül, hogy minden $\xi \in \int_\Gamma^\oplus \mathcal{H}_\gamma d\mu(\gamma)$-ra $\{a_\gamma \xi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \in \int_\Gamma^\oplus \mathcal{H}_\gamma d\mu(\gamma)$. Az így kapott folytonos lineáris operátort ($a =$) $\int_\Gamma^\oplus a_\gamma d\mu(\gamma)$ -val jelöljük.

Definiálhatunk $B\big(\int_\Gamma^\oplus \mathcal{H}_\gamma d\mu(\gamma)\big)$-ban két speciális operátor-családot, melyek fontos szerephez jutnak a direkt integrál felbontásban, és melyekről belátható, hogy maguk is Neumann algebrákat alkotnak, továbbá speciális kapcsolatban állnak egymással.

1.24. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $a \in B\big(\int_\Gamma^\oplus \mathcal{H}_\gamma d\mu(\gamma)\big)$ operátor *felbontható*, ha létezik olyan $\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ operátorok egy mérhető mezeje, hogy $a = \int_\Gamma^\oplus a_\gamma d\mu(\gamma)$. Továbbá ha teljesül, hogy minden a_γ egy skalárszoroza a $\mathcal{H}_\gamma$ identitásának, akkor azt mondjuk, hogy a *diagonalizálható*.

Könnyű látni, hogy ha a és b két felbontható operátor, akkor $\alpha a + b, ab, a^*$ is felbontható, továbbá az identiás is az (természetesen az egyes terek identitására). Speciálisan μ-majdnem mindenhol:

(1) $\alpha a + b = \int_\Gamma^\oplus (\alpha a_\gamma + b_\gamma) d\mu(\gamma)$

(2) $ab = \int_\Gamma^\oplus a_\gamma b_\gamma d\mu(\gamma)$

(3) $a^* = \int_\Gamma^\oplus a_\gamma^* d\mu(\gamma)$.

Ha pedig $\forall\gamma \in \Gamma : a_\gamma \le b_\gamma$ μ-majdnem mindenhol, akkor $a \le b$ (fetéve az önadjungáltságot).

$\mathcal{H} = \int_\Gamma^\oplus \mathcal{H}_\gamma d\mu(\gamma)$ esetén a felbontható operátorok algebráját $M(\mathcal{H})$-val jelöljük és a diagonalizálható operátorok algebráját pedig $D(\mathcal{H})$-val. Ezek egy-egy Neumann algebrát alkotnak $B\big(\int_\Gamma^\oplus \mathcal{H}_\gamma d\mu(\gamma)\big)$-ban, továbbá teljesül rájuk a következő tétel.

1.25. Tétel. *A felbontható operátorok algebrája a diagonalizálható operátorok algebrájának kommutáns algebrája. Vagyis teljesül, hogy*

$$M(\mathcal{H}) = D(\mathcal{H})'$$

.

1.26. *Példa.* $L_2(\Gamma, \mu)$ Hilbert tér esetében a felbontható és a diagonalizálható operátorok algebrája egybe esik, és ez a μ-majdnem korlátos függvényekkel való szorzásoperátorok algerája lesz ($L_\infty(\Gamma, \mu)$).

1.27. *Példa.* Az *1.22. Példa* alapján, ha $\mathcal{H}$ egy $\{\mathcal{H}_\gamma\}$ Hilbert tér család direkt összege, akkor egy felbontható operátornak $\mathcal{H}$-n megeleltethető egy $\{a_\gamma\}$ (ahol $a_\gamma \in B(\mathcal{H}_\gamma)$) operátor-család direkt összege, melyre $\sup_{\gamma\in\Gamma} \|a_\gamma\| \le \|a\|$ (megszámlálható egyenlőség). Ha a még diagonalizálható is, akkor akkor minden a_γ egy skkalárral való szorzás $\mathcal{H}_\gamma$-n.

1.28. Definíció. Legyen $\{\mathcal{A}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ szeparábilis Hilbert terek feletti Neumann algebrák egy családja egy (Γ, μ) σ-véges mértéktérrel indexelve. Azt mondjuk, hogy $\{\mathcal{A}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ mérhető, ha létezik olyan $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mérhető operátormezők családja, melyre majdnem minden γ-ra $\{(a_n)_\gamma\}_{n\in\mathbb{N}}$ generálja $\mathcal{A}_\gamma$-t.

1.29. Definíció. Ha $\{\mathcal{A}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ Neumann algebrák egy mérhető családja, akkor $\{\mathcal{A}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ direkt integrálja az az

$$\mathcal{A} \subset M\Big(\int_\Gamma^\oplus \mathcal{H}_\gamma d\mu(\gamma)\Big)$$

algebra, melyre majdnem minden γ-ra $a \in \mathcal{A}$ esetén $a_\gamma \in \mathcal{A}_\gamma$.

Az, hogy $\mathcal{A}$ algebra, az nyilvánvaló, de elvárt módon az is teljesül, hogy $\mathcal{A}$ Neumann algebra, az *1.25* tétel következtében.

...

1.30. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy von Neumann algebra egy $\mathcal{H}$ szeparábilis Hilbert tér felett. Ekkor létezik olyan (Γ, μ) mértéktér, és $\{\mathcal{A}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ von Neumann algebrák egy mérhető mezeje, melyre minden $\gamma \in \Gamma$-ra $\mathcal{A}_\gamma$ faktor, továbbá:*

$$\mathcal{A} \subset \int_\Gamma^\oplus \mathcal{A}_\gamma d\mu(\gamma).$$