Első áthaladási perkoláció

Szepessy Luca

Témavezető: Maga Balázs

A modell

- Cél: folyadékok porózus közegen történő átszivárgásának modellezése
- Porózus közeg: $\mathbb{Z}^d$ rács
- Éleken: τ_e i.i.d. valószínűségi változók, melyek megadják az áthaladási időt
- Út hossza: $T(\Gamma) = \sum_{e \in \Gamma} \tau_e$
- Pontok távolsága: $T(x, y) = \inf_{\Gamma} T(\Gamma)$ ($x, y \in \mathbb{Z}^d$)

  Kiterjeszthető $\mathbb{R}^d$ pontjaira: $T(x, y) := T(x', y')$, ahol x' és $y' \in \mathbb{Z}^d$, $x \in x' + [0, 1)^d, \; y \in y' + [0, 1)^d$
- ($\mathbb{Z}^d, T(., .)$) metrikus tér, ha $F(0) = 0$

Az időkonstans

Kérdés: $T(x,y)$ viselkedése, ha $|x-y|_1 \to \infty$

Tétel

Jelölje e_1 az első koordinátavektort, és legyenek $t_1, ..., t_{2d}$ azonos eloszlású, független valószínűségi változók az élek közös eloszlásából. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(\min[t_1, ..., t_{2d}]) < \infty$. Ekkor létezik egy időkonstansnak nevezett $\mu(e_1) \in [0, \infty)$ érték, melyre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T(0, n\cdot e_1)}{n} = \mu(e_1)$$

1 valószínűséggel és L^1-ben.

Az időkonstans tulajdonságai

- minden racionális irányra bizonyítható a létezése
- $\mu(e_1) \leq \mathbb{E}(\tau_e)$, és $\mu(e_1) < \mathbb{E}(\tau_e)$, ha τ_e eloszlása nem triviális
- $\mu(x+y) \leq \mu(x) + \mu(y)$
- $\mu(cx) = |c| \cdot \mu(x)$
- μ invariáns $\mathbb{Z}^d$ origót fixen hagyó szimmetriáira
- μ egyenletesen folytonos és Lipschitz $\mathbb{Q}^d$ korlátos részhalmazain
  $\Longrightarrow$ μ-nek egyértelműen létezik folytonos kiterjesztése $\mathbb{R}^d$-re

Az időkonstans tulajdonságai

Tétel

Legyen F_n a τ_e különböző eloszlásaihoz tartozó eloszlásfüggvények egy sorozata. Tegyük fel, hogy $F_n \to F$ gyengén. Ekkor $\lim_{n\to\infty} \mu_n(e_1) = \mu(e_1)$, ahol $\mu_n(e_1), \mu(e_1)$ jelöli az e_1 vektor időkonstansát az F_n, F eloszlásfüggvények eloszlásai mellett.

A határalakzat

- $B(t) = \{y \in \mathbb{R}^d : \ T(0, y) \leq t\}$
- Cél: $\frac{B(t)}{t}$ leírása $t \to \infty$ esetén

Előkészítés: kötésperkoláció
Modell:

- $\mathbb{Z}^d$ rács
- minden él p valószínűséggel nyitva van, $1 - p$ valószínűséggel zárva
- Kritikus valószínűség: $p > p_c(d)$-re 1 valószínűséggel létezik végtelen komponens

Cox és Durrett tétele

Tétel

Legyen $\mathcal{M}_d$ azon, $[0,\infty)$-en értelmezett valószínűségi Borel-mértékek halmaza, melyekre a következők teljesülnek:

- $\mathbb{E}(\min[t_1, ..., t_{2d}]) < \infty$, *ahol* $t_1, ..., t_{2d}$ *azonos eloszlású, független valószínűségi változók az adott eloszlásból*
- *az eloszlásfüggvényeikre* $F(0) < p_c(d)$ *teljesül .*

Ekkor minden $\nu \in \mathcal{M}_d$*-re létezik egy determinisztikus, konvex, kompakt* $\mathcal{B}_\nu \subset \mathbb{R}^d$ *halmaz, melyre minden* $\varepsilon > 0$*-ra*

$$\mathbb{P}\left((1-\varepsilon)\mathcal{B}_\nu \subset \frac{B(t)}{t} \subset (1+\varepsilon)\mathcal{B}_\nu \textit{, elég nagy t-re}\right) = 1.$$

Sőt, $\mathcal{B}_\nu$ *szimmetrikus* $\mathbb{R}^d$ *tengelyeire, és a belseje nem üres.*

Milyen konvex, kompakt halmaz áll elő határalakzatként?

Metrikus terek konvergenciája

Definíció

Egy (X, d) metrikus tér $S \subseteq X$ részhalmazát ε-sűrűnek nevezzük, ha X minden pontja S ε-környezetében van.

Definíció

Egy (X_1, d_1) és (X_2, d_2) metrikus tér között $R \subset X_1 \times X_2$ ε-reláció, ha R X_1-re és X_2-re vett vetülete is ε-sűrű, illetve $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R$ esetén $|d_1(x_1, y_1) - d_2(x_2, y_2)| < \varepsilon$.

Definíció

(X_1, d_1) és (X_2, d_2) metrikus terek D_H Gromov-Hausdorff távolságán azon ε-ok infimumát értjük, melyekre a két tér valamely $R \subset X_1 \times X_2$-re ε-relációban áll egymással.

Definíció

$(X_n, d_n) \to (X, d)$, ha $D_H((X_n, d_n), (X, d)) \to 0$.

Pontozott metrikus terek konvergenciája

Definíció

Egy (X, d) *metrikus tér és* $x \in X$ *esetén* (X, d, x)*-et pontozott metrikus térnek nevezzük, az* x *bázisponttal.*

Definíció

Az $((X_n, d_n, x_n))_{n \geq 0}$ *pontozott metrikus terek egy sorozata konvergál az* (X, d, x) *pontozott metrikus térhez, ha minden* $r > 0$*-ra* $\overline{B}(x_n, r)$ *sorozat (az indukált metrikákkal) a Gromov-Hausdorff metrikában konvergál* $\overline{B}(x, r)$*-hez.*

Határalakzat tétel metrikus terek konvergenciájával

- Valószínűségi mező: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- Minden $\omega \in \Omega$-ra készítünk egy sorozatot:

$$(X_n, d_n(x, y)) := \left(\frac{1}{n}\mathbb{Z}^d, \frac{T(nx, ny)}{n}\right)$$

- $d(x, y) := \mu(x - y)$, $(\mathbb{R}^d, d(x, y))$ metrikus tér

Tétel

Tegyük fel, hogy $F(0) < p_c(d)$, és valamely $\alpha > 0$-ra $\int e^{\alpha x} d\nu < \infty$. Ekkor a $(X_n, d_n, 0)$ sorozat konvergál a pontozott Gromov-Hausdorff konvergencia szerint $(\mathbb{R}^d, \mu, 0)$ pontozott metrikus térhez 1 valószínűséggel.

Köszönöm a figyelmet!