Galois-leszállás algebrai varietásokra

Mogyorosi Bálint

Konzulens: Zábrádi Gergely

Alapok

Definíció

Egy algebrai bővítése k-nak L, Galois bővítés, ha L azon elemei amik az Aut(L|k) hátásra fixen maradnak pontosan k. Ebben az esetben Aut(L|k) csoportot Gal(L|k)-val jelöljük, és az L k fölötti Galois csoportjának nevezzük.

Galois elmélet főtétele

Legyen L|k egy véges Galois bővítés G Galois csoporttal. Ekkor:
$M \mapsto H := \mathrm{Aut}(L|M)$ és $H \mapsto M := L^H$
egy tartalmazást fordító bijekció az $L \supset M \supset k$ és $H \subset G$ részcsoport. Az L|M bővítés mindig Galois. Az M|k bővítés akkor és csak akkor Galois, ha H normálosztója G-nek, ebben az esetben $Gal(M|k) \cong G/H$

Galois fedések

Definíció

Legyen p: $Y \to X$ egy fedés, ezek automorfizmusai Y mint egy tér X felett automorfizmusai, vagyis azon topologikus automorfizmusok amik kompatibilisek p projekcióval.Ezek egy csoportot alkotnak a kompozícióra nézve: Aut(Y|X).

Megjegyzés

Minden $x \in X$, Aut(Y|X) a $p(x)^{-1}$ fibrumot önmagára képezi, így $p(x)^{-1}$ el van látva Aut(Y|X) hatással.

Galois fedések

Tétel

Legyen p : $Y \to X$ Galois fedés. G = Aut(Y|X) minden H részcsoportra a p projekció indukál egy $\overline{p}_H : H\backslash Y \to X$ leképezést, ami $H\backslash Y$-t X fedésévé alakítja.
Vagyis ha $Z \to X$ egy összefüggő fedés, akkor f: $Y \to Z$ egy Galois fedés és $Z \cong H\backslash Y$ a H = Aut(Y|Z), G részcsoportra. A $H \mapsto H\backslash Y, Z \mapsto Aut(Y|Z)$ hozzárendelések megadnak egy bijekciót G részcsoportjai és Y és X között lévő köztes Z fedések között. A fedés $q : Z \to X$ Galois akkor és csak akkor ha H egy normálosztó G-ben, ekkor $Aut(Z|X) \cong G/H$

Véges Étale algebrák mint nulla dimenziós varietások

Definíció

Egy véges dimenziós k-algebra A-t, diagonalizálhatónak nevezünk ha izomorf valamely n-re k^n-nel, étale-nak nevezük k felett,ha $A \otimes L$ diagonalizálható valamely L testbővítésre.

Galois elmélet főtétele - Grothendieck féle

Legyen k egy test, ekkor a funktor ami a véges étale k-algebrát A-t a véges $Hom_k(A, k_s)$-be képezi egy anti-ekvivalenciát ad a véges étale k-algebrák katergóriájából a folytonos bal Gal(k)-hatással rendelkező véges halmazok kategóriájába.

Bizonyítás: $A = \prod L_i$ A egy felbontása és egy $\Phi \in Hom_k(A, k_s)$, ez a leképezés indukál egy inklúziót pontosan egy L_i-t képez bele k_s-be.
Valóban, ha $\Phi(L_i) \neq 0$ test lévén L_i beágyazódik k_s-be másfelől, a szozrat $L_i \times L_j$ nem ágyazódhat k_s-be hisz nullosztó mentes.
Ezek alapján $Hom_k(A, k_s)$ felbontható diszjunkt $Hom_k(L_i, k_s)$ únióra, ez egyben a Gal(k)-pályákra való felbontása.

Tétel

A funktor $A \rightsquigarrow F(A)$ egy kontravariáns ekvivalencia az L által hasított étale k-algebrák kategóriájából a véges G-halmazokba.

Megjegyzés

Az $A \rightsquigarrow Spec(A)$ egy kontravariáns ekvivalencia a k feletti étale algebrák kategóriájából a nulla-dimenziós F feletti algebrai varietások kategóriájába. Ha V = Spec(A), akkor:

$$Hom_{F-algebra}(A, L) \cong Hom_{Spec(F)}(Spec(L), V) = V(L)$$

Utolsó egyenlőség definíció miatt teljesül.

Tétel

A funktor $V \rightsquigarrow V(L)$ egy ekvivalencia a nulla-dimenziós k feletti algebrai varietások kategóriájából a véges folytonos G-halmazok kategóriájába. Ebben a megfeleltetésben az összefüggő varietások megfelelnek a tranzittív hatásnak.

Severi-Brauer varietások

Definíció

Egy Severi-Brauer vareitás egy k test fölött egy projektív algebrai varietás X egy k test fölött, úgy hogy a bővítés $X_K = X \otimes_k K$ izomorf lesz P_K^{n-1}-gyel valamilyen K|k testbővítésre. Ekkor azt mondjuk hogy X hasad K felett.

Tétel

Legyen X egy Severi-Brauer n-1 dimenziós vareitás k felett. Ekkor a következők ekvivalensek:

1. X izomorf a P_K^{n-1} projektív térrel k felett.
2. X-nek van k-racionális pontja.

Severi-Brauer varietások

Következmény

Egy Severi-Brauer vareitás X mindig hasad k egy véges bővítése felett.

Következmény

Egy Severi-Brauer vareitás X mindig hasad k egy véges Galois bővítése felett.