

# CSAVART KOSZORÚSZORZATOK RÉSZCSOPORTHÁLÓI

KÖRÖSI ÁKOS, PIGLER DONÁT  
TÉMAVEZETŐ: PÁLFY PÉTER PÁL

## BEVEZETÉS

Nagyvonalúan azt is mondhatnánk, hogy a kutatásunk kiinduló kérdése az univerzális algebra egy nyílt problémája volt, nevezetesen: igaz-e, hogy minden véges háló izomorf egy véges algebra kongruenciahálójával? Valójában Pálfy és Pudlák 1980-ban már megmutatták ([3]), hogy ez a kérdés ekvivalens ennek csoportelméleti megfogalmazásával:

**Kérdés.** Igaz-e, hogy minden véges háló izomorf egy véges csoport részcsoporthálójának intervallumával?

Vagyis a két kérdés ugyanakkor igaz, illetve hamis. Ez a probléma bár sokak érdeklődését felkeltette, azóta is megoldatlan. 1999-ben azonban Börner ([1]) ismét egy fokkal megközelíthetőbbé tette, ugyanis az általános csoportelméleti kérdést visszavezette két speciális csoport-típus esetére. Ehhez azonban előbb érdemes ezeket definiálnunk.

**Definíció.** Egy  $G$  csoportot **majdnem egyszerűnek** nevezünk, ha létezik olyan  $T \leq G$  egyszerű normálosztója, hogy  $C_G(T) = 1$ .

Más szóval olyan  $T \triangleleft G$  egyszerű részcsoporthálóját, hogy  $G \leq \text{Aut}(T)$ .

A másik – az elkövetkező tétel szempontjából – "érdekes" csoport a csavart koszorúszorzat, amely definíciója bár nehezen emészthető, a kutatás során azonban szerencsére elég volt egy a gyakorlatban lényegesen könnyebben átérthető formában tekinteni ezen csoportokra, amelyet majd később bemutatunk.

A csavart koszorúszorzat definiálásához szükségünk van két véges csoportra,  $D$ -re (domain) és  $T$ -re (target), illetve egy  $\varphi : D_0 \leq D \rightarrow \text{Aut}(T)$  homomorfizmusra. Osszuk fel  $D$ -t  $D_0$  szerinti jobboldali mellékosztályok diszjunkt uniójára:  $D = D_0x_1 \cup \dots \cup D_0x_m$ , illetve legyen

$$\text{Sdp}(D_0, \varphi) = \{f : D \rightarrow T \mid f(ax_i) = \varphi_a(t_i), a \in D_0, t_i \in T (i = 1, \dots, m)\}$$

Ez ellenőrizhetően egy szubdirekt szorzat  $T^D = T \times \dots \times T$ -ben (ahol  $T$ -t  $|D|$ -szer szorozzuk önmagával), vagyis  $\text{Sdp}(D_0, \varphi)$   $T^D$  bármely komponensére való vetítése szűrjektív. Sőt az is igaz, hogy ez a szubdirekt szorzat  $D$ -invariáns, ha  $D$  a természetes

eltolással hat  $T^D$ -n, vagyis  $f \in T^D$ -re (mint  $f : T \rightarrow D$  függvényre)  $f^d(x) = f(xd^{-1})$ , ahol  $x, d \in D$ .

**Definíció.**  $T$  és  $D$  csoportok  $D_0 \leq D$ -ra és  $\varphi : D_0 \rightarrow \text{Aut}(T)$ -re vonatkozó **csavart koszorúszorzatának** mondjuk a

$$\text{Twr}(D, T, D_0, \varphi) = \text{Sdp}(D_0, \varphi) \rtimes D$$

szemidirekt szorzatot.

A továbbiakban az  $\text{Int}(H, G)$  jelölést használjuk  $G$  részcsoporthálójának  $H \leq G$  fölé eső részhalójára, vagyis a  $H$  és  $G$  közötti intervallumra.

Ezek után már megfogalmazható Börner tétele:

**Tétel.** Minden véges háló izomorf egy véges csoport részcsoporthálójának intervallumával akkor és csak akkor, ha a következők egyike igaz:

- (a) Minden véges (egynél több elemet tartalmazó) háló izomorf egy majdnem egyszerű  $G$  csoport  $\text{Int}(H, G)$  intervallumával, ahol  $H \leq G$  magtalan (azaz  $\bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg = 1$ ) részcsoportháló.
- (b) Minden véges (egynél több elemet tartalmazó) háló izomorf egy  $G = \text{Twr}(T, D, D_0, \varphi)$  csavart koszorúszorzat  $\text{Int}(D, G)$  intervallumával, ahol  $T$  nemkommutatív véges egyszerű csoport,  $D$  véges csoport,  $D_0 < D$  részcsoportháló és  $\varphi : D_0 \rightarrow \text{Aut}(T)$ -re igaz, hogy  $\varphi(D_0) \geq \text{Inn}(T)$ .

Az általános kérdésre a matematikai közvélemény negatív választ vár, és mint számos véges csoportelméleti probléma esetén, úgy itt is kívánatos lenne, ha a majdnem egyszerű csoportokra tudnánk visszavezetni, immár a tétel segítségével. Szerencsére a hálók felől tekintve egyszerűbben is meg tudjuk ragadni a csavart koszorúszorzatokat, ugyanis igaz a következő

**Állítás.** Legyen  $T$  egy nemkommutatív véges egyszerű csoport, továbbá  $D_0 \leq D$ ,  $\varphi : D_0 \rightarrow \text{Aut}(T)$ , hogy  $\varphi(D_0) \geq \text{Inn}(T)$ . Ekkor  $\text{Sdp}(D_0, \varphi)$   $D$ -invariáns részcsoporthálójának hálóját  $\varphi$  összes  $D$ -beli  $D_0$ -t tartalmazó részcsoporthálóra való kiterjesztésének duális hálójával egy kiegészítő legfelső elem hozzávételével (ez felel meg az eredeti hálóban a triviális részcsoporthalónak).

## KUTATÁSI BESZÁMOLÓ

A kutatás során a csavart koszorúszorzat segítségével igyekeztünk minél előremutatóbb részcsoporthalókat konstruálni, figyelembe véve a legkisebb (elemszámú) olyan példákat is hálókra, amelyekhez ma még nem ismert hozzájuk tartozó részcsoportháló-intervallum. (W. DeMeo két hételemű kivétellel minden legfeljebb hételemű hálóra talált ilyen reprezentációt.) A keresést meghatározó másik irány a példák konstruálása során a szimmetrikus csoportok direkt szorzatainak vizsgálata volt. A kiindulási alapként szolgáló Pálfi cikkben ([2]) ugyanis egy kétkomponensű szorzat adta az

egyik "érdekes" részcsoporthálót (ld. Example 2.7). Elsőként megvizsgáltuk, hogy mi történik, ha a konstrukció egyszerű általánosításaként több komponens szorzatát vesszük, azonban az így keletkező hálók túlságosan szimmetrikusak voltak ahhoz, hogy a még kivételes hálókra megfelelő intervallumot szolgáltatassanak. Így olyan konstrukciókra tértünk át, ahol az ilyen típusú direkt szorzatokat szemidirekten beszorozzuk egy másik csoporttal, mely valamilyen módon "cserélgeti" a komponenseket. Rövid vizsgálódás után rájöttünk, hogy ha a direkt szorzat minden komponensén hatunk (tehát mindahány koordinátát cserélgetjük), akkor bár a keletkező hálók elemszáma nő, a kiküszöbölendő szimmetriái megmaradnak, ezért a szemidirekt hatást csak bizonyos koordinátákra szorítottuk meg.

Az ilyen típusú konstrukció már a legkisebb értelmes  $(S_n \times S_n \times S_n) \rtimes Z_2$  esetben is óriási részcsoporthálót ad. Ezt a kutatás során meghatároztuk, de itt helyszűke miatt az  $(S_n \times S_n \times A_n) \rtimes Z_2$  esetet prezentáljuk, ami már jóval áttekinthetőbb hálót származtat.

Formálisan tehát az alábbi kérdéssel foglalkozunk. Tekintsük a  $G = (S_n \times S_n \times A_n) \rtimes Z_2$  csoportot, ahol  $Z_2$  generátoreleme ( $g$ ) az első két koordináta cseréjével hat az  $S_n \times S_n \times A_n$  csoporton. Ebben a szorzatban tekintsük az  $(a, a, a, 1)$  ( $a \in A_n$ ) alakú elemekből álló "diagonális"  $D_0$  részcsoporthálót. Képezzük a természetesen adódó  $\varphi : D_0 \rightarrow S_n$  homomorfizmust, melyet az  $(a, a, a, 1) \mapsto a$  leképezési szabály ad meg. Kérdésünk tehát, hogy  $\varphi$  kiterjesztései  $G$  részcsoporthálójaira milyen hálót szolgáltatnak.

Ehhez először azt határozzuk meg, hogy  $G$  részcsoporthálójának a  $D_0$  feletti (azt tartalmazó részcsoporthálóból álló) intervalluma hogyan néz ki.

Ebben az alábbi általános csoportelméleti megfontolás segít: először tekintsük az  $N = A_n \times A_n \times A_n \times \{1\}$  részcsoporthálót. Látható, hogy ez  $G$ -nek normálosztója. Ekkor bármely  $H \leq G$  részcsoporthálóra:

$$H \cap N \leq H \leq N_G(H \cap N)$$

Az első tartalmazás magától értetődő, a másodikonál is világos, hogy  $H$  normalizálja önmagát, és persze  $N$ -et is (hiszen azt az egész  $G$  normalizálja), így ezek metszetét is.

Ezt a megfigyelést úgy fogjuk felhasználni, hogy meghatározzuk, milyen részcsoporthálók fordulhatnak elő  $H \cap N$  alakban, és mik a normalizátoraik. Ezek után már csak azt kell áttekintenünk, hogy milyen részcsoporthálók vannak az  $N \cap H$  részcsoporthálók és azok normalizátorai közti intervallumokban – hiszen a fentiek szerint  $G$  összes részcsoporthálójára előáll ilyen módon.

Itt a  $H \cap N$  szerepét nyilván az  $N = A_n \times A_n \times A_n$  részcsoporthálójai tölthetik be. Azonban vegyük észre, hogy mivel az  $A_n$  diagonálisát tartalmazó részcsoporthálót vizsgálunk, azért minden koordinátára való vetítés szürjektív, tehát egy szubdirekt szorzattal van dolgunk. Ezeket a fentiekben meghatároztuk: tudjuk hogy lényegében izomorfak  $(A_n)^m$

alakó csoportokkal, mégpedig úgy, hogy minden koordinátához megadunk egy automorfizmust  $(A_n)^m$  valamelyik komponenséről.

Vegyük számba, hogy  $m$  mi lehet. Ha  $m = 1$ , akkor ez lényegében azt jelenti, hogy a második két komponens egy-egy automorfizmus szerint függ az elsőtől: tehát az  $(a, \psi(a), \chi(a))$  alakú elemek alkotják. Azonban mivel csoportunknak tartalmaznia kell a diagonálist, azért  $\psi, \chi$  egyaránt identikus kell hogy legyen. Ebben az esetben tehát maga a  $\text{diag } A_n = \{(a, a, a)\}$  diagonális lehet csak a részcsoporthunk.

Ha  $m = 3$ , akkor  $A_n \times A_n \times A_n$ -ben egy  $A_n \times A_n \times A_n$ -nel izomorf részcsoporthal van dolgunk, ami nyilván csak a teljes csoport lehet.

Maradt az  $m = 2$  eset vizsgálata. Ebben az esetben van két független komponensünk a háromból, és a harmadik egy automorfizmussal függ a másik kettőtől valamelyikétől. Ám az előzőekben meg gondoltakkal analóg módon ez az automorfizmus csakis identikus lehet, mert különben a részcsoporthunk nem tartalmazná a diagonálist.

Azt kapjuk tehát, hogy az  $A_n \times A_n \times A_n$  csoportnak a  $\text{diag } A_n$ -et tartalmazó részcsoporthajai éppen az alábbiak. Egyfelől, ilyen maga a  $\text{diag } A_n$  részcsoporthunk (ez az  $m = 1$  eset). Az  $m = 2$  esetben a kapott karakterizációt az  $\{(a, a, b) : a, b \in A_n\}, \{(a, b, a) : a, b \in A_n\}, \{(a, b, b) : a, b \in A_n\}$  részcsoporthok elégítik ki. Végül  $m = 3$  esetén megkapjuk a  $A_n \times A_n \times A_n$  csoportot.

Ezzel befejeztük annak meghatározását, hogy milyen részcsoporthok választhatók  $H \cap N$  szerepére. Most az ilyen alakú részcsoporthok normalizátorait kell meghatároznunk – immár a teljes  $G = (S_n \times S_n \times A_n) \rtimes Z_2$  csoportban dolgozva.

Az  $A_n \times A_n \times A_n \times \{1\}$  részcsoporthunk normálosztó, tehát normalizátora az egész csoport.

Vizsgáljuk most az  $\{(a, a, b, 1) : a, b \in A_n\}$  részcsoporthunkot. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezt az  $\{(s, s, c, z) : s \in S_n, c \in A_n, z \in Z_2\}$  alakú elemek normalizálják. Bővebb részcsoporthunk azonban nem normalizálhatja, hiszen ha a részcsoporthunkban van  $(s, p, c, z)$  alakú elem ahol  $s \neq p$ , akkor kereshetünk olyan  $a \in A_n$  elemet, amelyet  $s$  és  $p$  más elembe konjugál (ilyen  $a$  nyilván létezik), és ekkor triviális számolás mutatja, hogy  $(s, p, c, z)$  nem normalizálja az  $(a, a, b, 1)$  elemet tetszőleges  $b$ -re.

Most tekintsük az  $\{(a, b, a, 1) : a, b \in A_n\}$  részcsoporthunkot. Állítjuk, hogy ennek normalizátora az  $\{(a, p, a, 1) : a \in A_n, p \in S_n\}$  részcsoporthunk, Világos, hogy ez valóban normalizálja azt. Bizonyítandó még, hogy bővebb csoport viszont nem normalizálhatja. Ehhez számoljuk ki egy általános  $(s, p, c, z)$  elemmel való konjugálását egy részcsoporthunk elemnek. Ez  $z = 1$  esetén egyszerűen a koordinátánkénti konjugálás. Világos, hogy egy  $z = 1$ -s normalizátorelemben az első és a harmadik koordináta megegyezik, hiszen másképpen találhatnánk olyan  $a \in A_n$  elemet, amelyet más elembe konjugálnak, és ez demonstrálná, hogy  $(s, p, c, z)$  nem normalizálja a tekintett részcsoporthunkot. A  $z = g$  esetben egyszerű számolás mutatja, hogy a konjugált egy általános  $(s, p, c, z)$  elemmel  $(s^{-1}bs, p^{-1}ap, c^{-1}ac, 1)$  lesz. Nyilvánvaló, hogy  $a, b$  itt is megválasztható oly módon, hogy

az első és második koordináta ne egyezzen az eredetiekkel, vagyis az ilyen elemek sem lehetnek a normalizátorban. Tehát valóban az  $\{(a, p, a, 1) : a \in A_n, p \in S_n\}$  részcsoport lesz itt a normalizátor.

Ugyanez a gondolatmenet átültethető az  $\{(a, b, b, 1) : a, b \in A_n\}$  részcsoport esetére is, ahol kapjuk, hogy az  $\{(s, b, b, 1) : s \in S_n, b \in A_n\}$  lesz a normalizátor.

Végül az  $\{(a, a, a, 1) : a \in A_n\}$  diagonális részcsoport normalizátorát keressük meg. Állítjuk, ez a  $\text{diag } A_n \rtimes Z_2$  részcsoport, vagyis az  $(a, a, a, z)$  alakú elemek halmaza. Ezek valóban normalizálják a diagonálist. Ha adott egy  $(p, q, c, z)$  elem, ahol  $p = q = c$  nem áll fenn, akkor van olyan  $a \in A_n$ , melyet különböző elemekbe konjugálnak, ekkor  $(a, a, a, 1)$  konjugáltja nem lesz a diagonálisban, vagyis az ilyen  $(p, q, c, z)$ -k nincsenek a normalizátorban. Persze  $p = q = c$  csakis az  $A_n$ -ből kerülhet ki, mert  $c$  eleme  $A_n$ -nek. Ezért a normalizátor valóban  $\text{diag } A_n \rtimes Z_2$ .

Meghatároztuk tehát a  $H \cap N$  alakú részcsoportok normalizátorait is. Most át kell tekintenünk, hogy hogyan néznek ki az egyes részcsoportok és normalizátoraik közé eső részcsoportháló-intervallumok.

Az  $\{(a, b, b, 1) : a, b \in A_n\}$  és  $\{(s, b, b, 1) : b \in A_n, s \in S_n\}$  pár, illetve az  $\{(a, b, a, 1)_{a, b \in A_n}\}$  és  $\{(a, p, a, 1) : a \in A_n, p \in S_n\}$  párok esetén könnyű dolgunk van. Itt ugyanis a két kisebb részcsoport indexe a tekintett normalizátorokban 2, azaz nem lehet valódi köztes részcsoport.

A másik két intervallum leírása kevésbé triviális, azonban egyszerű csoportelméleti megfontolásokkal ez is megkönnyíthető. Közismert csoportelméleti tény, hogy ha adott egy  $G$  csoport, és annak egy  $N$  normálosztója, akkor a  $G/N$  faktor részcsoportjai, illetve a  $G$ -beli,  $N$ -et tartalmazó részcsoportok bijektíven megfelelnek egymásnak. Ezen észrevételt kihasználva pontosan tudjuk hogy hány darab részcsoportot várunk az intervallumban, és milyen tartalmazásstruktúrával, ami lényegesen megkönnyíti a dolgunkat.

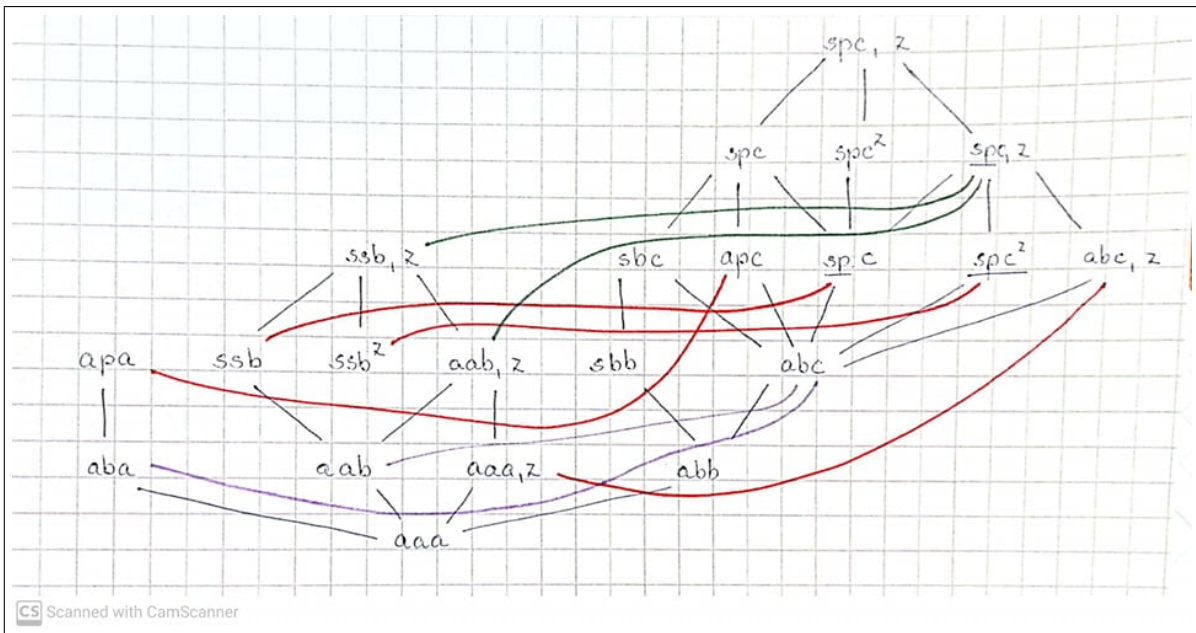
Tekintsük át elsőként az  $\{(a, a, b, 1) : a, b \in A_n\}$  részcsoport és annak  $\{(s, s, b, z) : s \in S_n, b \in A_n\}$  normalizátora közötti intervallumot. A két csoport faktorcsoportja jól láthatóan  $Z_2 \times Z_2$ , ezért 3 részcsoportot várunk. Ezek könnyedén megtalálhatók: az egyik  $\{(s, s, b, 1) : s \in S_n, b \in A_n\}$ , a második  $\{a, a, b, z : a \in A_n, b \in A_n\}$  a harmadikat pedig olyan  $(s, s, b, z)$  elemek alkotják, ahol  $z = 1$ , ha  $s$  páros permutáció és  $z = g$ , ha páratlan.

Most határozzuk meg az  $A_n \times A_n \times A_n$  részcsoport és normalizátora, azaz a teljes  $(S_n \times S_n \times A_n) \rtimes Z_2$  csoport közötti intervallumot. A faktorcsoport itt a  $D_4$  diédercsoport lesz - a koordinátánkénti  $Z_2$  faktorokról ellenőrizhető, hogy ezt generálják. Tehát 8 köztes valódi részcsoportot kell találnunk (ennyi nemtriviális részcsoporttal rendelkezik  $D_4$ ). Ezek rendezésstruktúráját is ismerjük. A köztes részcsoportok az alábbiak lesznek. Elsőként  $\{(s, b, c, 1) : s \in S_n, b \in A_n, c \in A_n$ , másodikként  $\{(a, p, c, 1) : a \in A_n, p \in$

$S_n, c \in A_n$ , harmadikként az olyan  $(s, p, c, 1) : s \in S_n, p \in S_n, c \in A_n$  alakú elemek halmaza, ahol  $s, p$ -ről kikötjük, hogy azonos paritású permutációk. Negyedik az olyan  $(s, p, c, z) : s \in S_n, p \in S_n, c \in A_n, z \in Z_2$  elemek halmaza, ahol egyfelől kikötjük, hogy  $s, p$  legyenek azonos paritású permutációk, másfelől ha  $s, p$  páros, akkor  $z = 1$ , és ha páratlanok, akkor pedig  $z = g$ . Ötödik az  $\{(a, b, c, z) : a \in A_n, b \in A_n, c \in A_n, z \in Z_2\}$  csoport. Hatodik az  $\{(s, p, c, 1) : s \in S_n, p \in S_n, c \in A_n\}$ . Hetedik az olyan  $(s, p, c, z) : s \in S_n, p \in S_n, c \in A_n, z \in Z_2$  elemek által alkotott részcsoporthalmaz, ahol  $z = 1$ , ha  $sp$  páros permutáció és  $z = g$ , ha páratlan. Végül a nyolcadik részcsoporthalmaz az olyan  $(s, p, c, z) : s \in S_n, p \in S_n, c \in A_n, z \in Z_2$  elemekből áll, ahol  $s, p$  azonos paritású.

Megtaláltunk tehát nyolc darab részcsoporthalmazt, a fentebbi megfontolások szerint több nem lehet. Ellenőrizhető az is, hogy a részcsoporthalmazok valóban a  $D_4$  hálójának megfelelően tartalmazzák egymást.

A felsorolt részcsoporthalmazok az alábbi háló szerint tartalmazzák egymást. Az 1. ábrán szereplő jelölések a számolások során alkalmazott konvenciók szerint értelmezendők. Tehát  $a, b, c$  mindig  $A_n$ -beli elemeket jelölnek,  $s, p, q$  pedig  $S_n$ -belieket. A  $z$  jelöli a  $Z_n$  elemét (precízebben, hogy az a komponens nem triviális a csoport minden elemében), ha ez vesszővel elválasztva van a más elemek után feltüntetve, akkor azoktól függetlenül megválasztható, míg ha hatványkitevőbe van írva, akkor az első két koordináta paritásától függ a tárgyalt módon (az ábra föltről második sorában szereplő esetben a paritásszorozattól, minden más esetben az első két koordináta közös paritásától). Az aláhúzás azt jelöli, hogy az első két komponens paritásának meg kell egyeznie a tekintett részcsoporthalmazban.

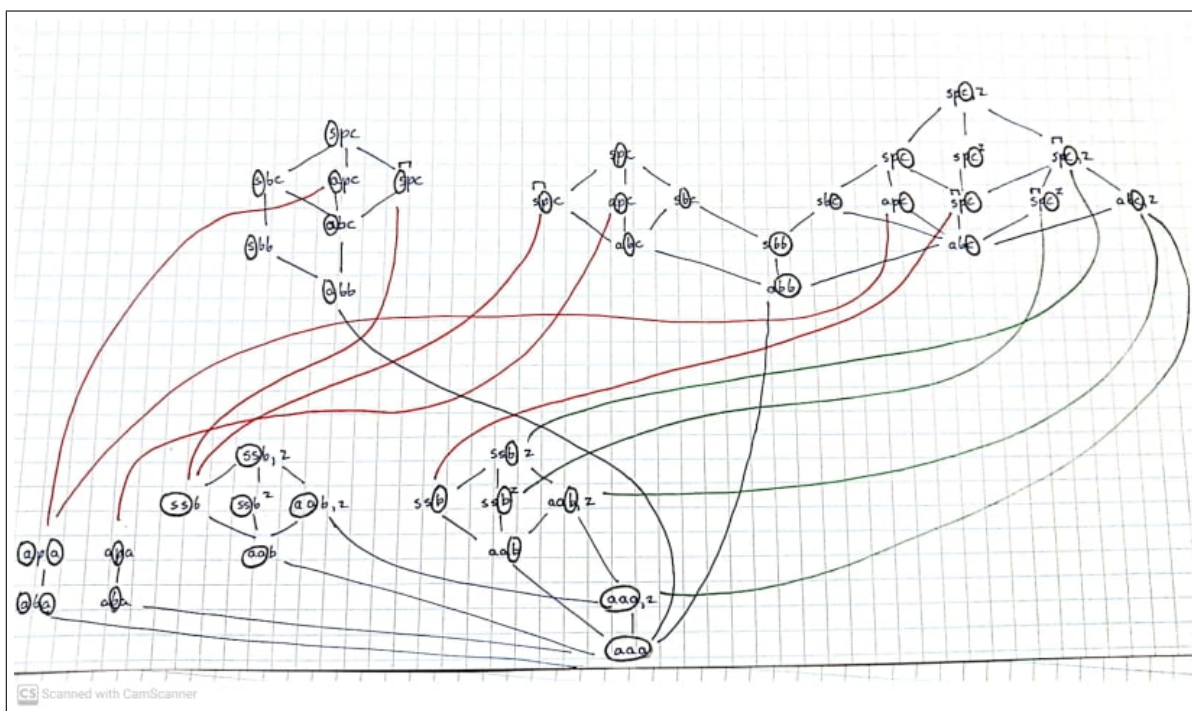


1. ábra. Az  $\text{Int}[D_0, G]$  részcsoportháló-intervallum

A részcsoportháló meghatározása után áttérhetünk annak vizsgálatára, hogy a kiinduláskor vett  $\varphi$  homomorfizmus (vetítés) mely részcsoporthálóra terjed ki és milyen módon. Ez nem nehéz feladat a részcsoportháló ismeretében. Egy kiterjesztésnek az  $(s, p, c, z)$  elemhez szükségképpen  $s, p, c$  valamelyikét kell rendelnie, különben nem lenne a  $\varphi$  kiterjesztése. Tekintsük az  $(s, 1, 1, z)$ ,  $(1, p, 1, z)$  és  $(1, 1, c, z)$  alakú elemek képeit. Állítjuk, legfeljebb egy kivétellel az ilyenek mind a kiterjesztés magjában vannak. Valóban, tegyük fel, hogy két különböző osztályban is van magon kívüli elem, például az  $(s, 1, 1, z_1)$ ,  $(1, p, 1, z_2)$  osztályokban. Világos, hogy ehhez a két elemhez rendre  $s$ -et, és  $p$ -t kell rendelni (ha nem  $1$ -et), hiszen úgy lesz a diagonálison vett vetítés kiterjesztése. Ám ekkor szorzatukhoz, amely a  $z_2$  értékétől függően  $(s, p, 1, z_1 z_2)$  vagy  $(p, s, 1, z_1 z_2)$  alakú, az  $sp$  szorzatot kell rendelnünk, ami ellentmond annak, hogy a diagonálisról vett vetítést kiterjeszti a homomorfizmusunk.

Röviden tehát, a homomorfizmus csakis egy vetítés lehet az első három koordináta valamelyikére. Ám azt is vegyük észre, hogy amennyiben a részcsoportháló vetülete az utolsó koordinátára nemtriviális, akkor nem vetíthetünk az első két koordinátára, kivéve ha azok mindig egyenlők a tekintett részcsoporthálóban. Valóban, ha az első két koordinátában állhatnak különböző elemek, és emellett a csoport tartalmaz olyan elemeket, melyek permutálják e két koordinátát, akkor az első két koordinátára való vetítés nem lesz homomorfizmus.

Az nyilvánvaló, hogy minden más esetben a vetítések valóban homomorfizmust adnak.



2. ábra. A kiterjesztések hálóját

Az itt tárgyaltak ismeretében már könnyen meghatározható a kiterjesztések által alkotott háló. Ez látható a mellékelt 2. ábrán. A jelölések hasonlóak a részcsoporthálónál használatkhoz, mindössze annyi változott, hogy aláhúzás helyett összekapcsolással jelöltük, ha az első két koordinátáról kikötjük, hogy egyező paritásúak legyenek. A megfelelő koordináta bekarikázásával jelöltük, hogy melyikre való vetítést tekintjük, ez persze több koordináta is lehet, ha az adott koordináták értéke mindig azonos a részcsoportban.

#### HIVATKOZÁSOK

- [1] F. Börner, *A remark on the finite lattice representation problem. In Contributions to General Algebra, 11* (Verlag Johannes Heyn, klagenfurt, 1999), 5-38.
- [2] P. P. Pálffy, *Subgroups of Twisted Wreath Products. In C. Campbell, C. Parker, M. Quick, E. Robertson, & C. Roney-Dougal (Eds.), Groups St Andrews 2017 in Birmingham*, (London Mathematical Society Lecture Note Series, pp. 455-468) Cambridge: Cambridge University Press, (2019).
- [3] P. P. Pálffy and P. Pudlák, *Congruence lattices of finite algebras and intervals in subgroup lattices of finite groups. In Algebra Universalis*, 11 (1980), 22-27.