Egyéni kutatómunka 2

Geng Máté

Témavezető: Prokaj Vilmos

Egy diszkrét idejű $\{X_n\}$ folyamat esetén, amely adaptált az $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ filtrációhoz, a legalapvetőbb példa megállási időre, egy Borel-halmazba való első belépés ideje, azaz $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \in B\}$. Folytonos idejű folyamatra ez az állítás már kevésbé nyilvánvaló, azaz hogy $\tau = \inf\{t : X_t \in B\}$ és nem is feltétlenül igaz, hogy $X_\tau \in B$ teljesül. Az általam feldolgozott cikk ezen állítással foglalkozik. Az alábbi állítás bizonyítása a feldolgozott cikk fő eredménye:

Tétel. Legyen A egy $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}$-mérhető halmaza $\mathbb{R}^+ \times \Omega$-nak, és legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ egy teljes valószínűségi mértéktér. Ekkor:
(i) A projekció $\pi_\Omega(A) := \{\omega \in \Omega : (t, \omega) \in A \text{ valamely } t \in \mathbb{R}^+\text{-re}\}$ $\mathcal{F}$-beli.
(ii) Létezik $\mathcal{F}$-mérhető valószínűségi változó $\Psi : \Omega \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, amelyre $\Psi(\omega) < \infty$ és $\big(\Psi(\omega), \omega\big) \in A$ $\pi_\Omega(A)$ majdnem minden pontjára, és $\Psi(\omega) = \infty$ minden $\omega \notin \pi_\Omega(A)$ pontra.
Az elkövetkezőkben mindig feltesszük ha egy halmazrendszerről beszélünk, hogy a halmazrendszer tartalmazza az üreshalmazt.

Definíció. Egy $\mathcal{X}$ halmaz részhalmazainak egy $\mathcal{D}$ családját $\cup c$-stabilnak hívjuk, ha zárt a megszámlálható unióra, illetve $\cup c$-stabilnak hívjuk, ha zárt a megszámlálható metszetre. Például a $\mathcal{D}$ elemeiből megszámlálható unióval képzett halmazok rendszere $\cup c$-stabil. Ezen halmazok rendszerét $\mathcal{D}_\sigma$-val jelöljük. Hasonlóan, a megszámlálható metszettel képzett halmazrendszer $\cap c$-stabil, és $\mathcal{D}_\delta$-val jelöljük.

Legyen T egy kompakt metrikus tér ellátva a T kompakt halmazaiból álló $\mathcal{K}(T)$ halmazrendszerrel, és a $\mathcal{B}(T)$ Borel-halmazokkal, amely halmazrendszert a $\mathcal{K}(T)$ generálja. A tétel bizonyításánál nekünk a $T = [0, \infty]$ tér fog kelleni. $\mathcal{K}(T) \times \mathcal{F} := \{K \times F : K \in \mathcal{K}(T), F \in \mathcal{F}\}$
Legyen $\mathcal{R}$ a $\mathcal{K}(T) \times \mathcal{F}$ elemeiből az összes lehetséges módon véges unióval képzett halmazrendszer.

Állítás 1. Tegyük fel, hogy $\emptyset \in \mathcal{S}$ $\cap c$-stabil halmazrendszer S-en. Legyen $\mathcal{S}_{\cup c}$ az $\mathcal{S}$ elemeiből képzett véges uniók rendszere. Ekkor $\mathcal{S}_{\cup c}$ $\cup c$-stabil és $\cap c$-stabil is.

$\square$

Az 1. Állítás miatt $\mathcal{R}$ $\cup c$-stabil, sőt mi több, ez a $\mathcal{K}(T) \times \mathcal{F}$ $\cup c$-stabil lezártja (legszűkebb olyan halmazrendszer, ami tartalmazza az előbbit és zárt a megszámlálható unióra). Így az 1. állítás miatt $\mathcal{R}$ $(\cup c, \cap c)$-stabil $T \times \Omega$-n.

Sok projekciókkal kapcsolatos mérhetőségi probléma abból adódik, hogy a projekciók nem őrzik meg olyan jól a halmazelméleti műveleteket: $\pi_\Omega(\cup_i A_i) = \cup_i \pi_\Omega(A_i)$, DE $\pi_\Omega(\cap_i A_i) \subseteq \cap_i \pi_\Omega(A_i)$. Ezen a problémán a keresztmetszetek kompaktsága fog segíteni, hogy a második képletben tartalmazás helyett egyenlőséget írhassunk.

Állítás 2. Tegyük fel, hogy $\mathcal{K}$ egy metrikus tér kompakt részhalmazainak rendszere, amelyre igaz, hogy bármely véges sok elemének a metszete nemüres. Ekkor $\mathcal{K}$ összes elemének metszete sem üres.

$\square$

Következmény. Tegyük fel, hogy $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ csökkenő sorozata $T \times \Omega$ részhalmazainak úgy, hogy
$K_i(\omega) := \{t \in T : (t, \omega) \in A_i\}$ kompakt. Ekkor $\pi_\Omega\big(\cap_{i\in\mathbb{N}} A_i\big) = \cap_{i\in\mathbb{N}}\ \pi_\Omega(A_i)$

$\square$

Következmény. Ha $R_i \in \mathcal{R}$ mellett $B = \cap_{i\in\mathbb{N}} R_i$, akkor $\pi_\omega B = \cap_{i\in\mathbb{N}}\pi_\Omega R_i \in \mathcal{F}$.

$\square$

Definíció. Egy $A \subseteq \Omega$ halmaz külső mértékét az alábbi módon definiáljuk: $\overline{\mathbb{P}}(A := \inf\{\mathbb{P}(F) : A \subseteq F : F \in \mathcal{F}\}$
Állítás 3.
(i) Ez az infimum egyben minimum is, azaz $\exists F \in \mathcal{F}$, amire $A \subseteq F$ és $\mathbb{P}(F) = \overline{\mathbb{P}}(A)$
(ii) Tegyük fel, hogy $\{D_i : i \in \mathbb{N}\}$ Ω részhalmazainak növő sorozata, amelyek nem feltétlen elemei az $\mathcal{F}$ szigma-algebrának és $D = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i$ Ekkor igaz, hogy $\lim_{i\to\infty} \overline{\mathbb{P}}(D_i) = \sup_{i\in\mathbb{N}}\{\overline{\mathbb{P}}(D_i)\} = \overline{\mathbb{P}}(D)$
(iii) Tegyük fel, hogy D egy részhalmaza Ω-nak, amelyre
$\overline{\mathbb{P}}(D) = \sup\{\overline{\mathbb{P}}(F) : F \subseteq D, F \in \mathcal{F}\}$. Ekkor D benne van a $\mathbb{P}$ teljessé tételével kapott szigma-algebrában.

$\square$

Mely $B \in \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$ halmazokra lesz igaz, hogy $\pi_\Omega(B) \in \mathcal{F}$? A következményből tudjuk már, hogy ez igaz például a $B \in R_\delta$ esetben.
Legyen minden $D \subseteq T \times \Omega$ esetén $\overline{\Psi}(D) := \overline{\mathbb{P}}(\pi_\Omega(D))$, a D vetületének Ω-ra vett külső mértéke. Ha a D_i növő halmazrendszer uniója D, akkor a $\pi_\Omega(D_i)$ növő halmazrendszer uniója $\pi_\Omega(D)$. Ha $R_i \in \mathcal{R}$ és R_i egy csökkenő halmazrendszer, aminek a metszete B, akkor $\pi_\Omega(R_i)$ is csökkenő halmazrendszer aminek a metszete $\pi_\Omega(B) \in \mathcal{F}$.

$\overline{\mathbb{P}}$ tulajdonságai öröklőnek $\overline{\Psi}$-re:
(i) Ha $D_1 \subseteq D_2$, akkor $\overline{\Psi}(D_1) \subseteq \overline{\Psi}(D_2)$
(ii) Ha $\{D_i : i \in \mathbb{N}\}$ egy monoton növő halmazsorozat, akkor $\lim_{i\to\infty} \overline{\Psi}(D_i) = \sup_{i\in\mathbb{N}}\{\overline{\Psi}(D_i)\} = \overline{\Psi}(\cup_{i\in\mathbb{N}} D_i)$
(iii) Ha $\{R_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{R}$ egy monoton csökkenő halmazsorozat, akkor $\lim_{i\to\infty} \overline{\Psi}(R_i) = \inf_{i\in\mathbb{N}}\{\overline{\Psi}(R_i)\} = \overline{\Psi}(\cap_{i\in\mathbb{N}} R_i)$

Ezekkel a tulajdonságokkal megmutathatjuk, hogy π_Ω jól viselkedik egy jóval nagyobb halmazrendszeren, mint $\mathcal{R}$.

Lemma. Ha $A \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$, akkor $\overline{\Psi}(B) = \sup\{\overline{\Psi}(B) : B \in R_\delta\}$. Következésképpen $\pi_\Omega \in \mathcal{F}$.

A 3. állításból következik, hogy $\pi_\Omega \in \mathcal{F}$.

Definíció. Tegyük fel, hogy $\mathcal{S}$ egy burkolás az S halmazon. A $\Psi : \mathcal{P}(S) \to [-\infty, +\infty]$ függvényt *Choquet $\mathcal{S}$-kapacitásnak* hívjuk, ha teljesíti a következő 3 tulajdonságot:
(i) Ha $D_1 \subseteq D_2 \subseteq S$, akkor $\Psi(D_1) \leq \Psi(D_2)$
(ii) Ha $\{D_i : i \in \mathbb{N}\}$ egy monoton növő halmazsorozat S-ből, akkor $\lim_{i\to\infty} \Psi(D_i) = \Psi(\cup_{i\in\mathbb{N}} D_i)$
(iii) Ha $\{S_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{S}$ egy monoton csökkenő halmazsorozat, akkor $\lim_{i\to\infty} \Psi(S_i) = \Psi(\cap_{i\in\mathbb{N}} S_i)$

Például a korábban konstruált $\overline{\mathbb{P}}$ külső mérték egy Choquet $\mathcal{F}$-kapacitás Ω részhalmazain. Hovatovább, ha bármileyn Choquet $\mathcal{F}$-kapacitásunk van Ω részhalmazain, akkor $\overline{\Psi}(D) := \Psi(\pi_\Omega(D))$ egy Choquet $\mathcal{R}$-kapacitás $T \times \Omega$ részhalmazain.

Definíció. Legyen $\emptyset \in \mathcal{S}$ S részhalmazainak egy rendszere. Egy $A \subseteq S$ halmazra azt mondjuk, hogy $\mathcal{S}$-analitikus, ha létezik kompakt metrikus tér E és annak $D \subseteq (\mathcal{K} \times \mathcal{S})_{\sigma\delta}$ részhalmaza, amire $A = \pi_S(D)$. Jelöljük $\mathcal{A}(\mathcal{S})$-lal S $\mathcal{S}$-analitikus részhalmazait.

Megjegyzés. Lehet találni egyetlen olyan E teret, amely már egymagában definiálja az összes $\mathcal{S}$-analitikus halmazt, de erre nincs szükségünk.

Állítás 4. Tegyük fel, hogy $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{S})$. Ekkor $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ és $\cap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$. (Ez azon az állításon múlik, hogy megszámlálható sok kompakt metrikus tér szorzata is kompakt metrikus.)

$\square$

A fenti állítás lényegében azt állítja, hogy $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ egy $(\cup c, \cap c)$-stabil halmazrendszer.

Állítás 5. Tegyük fel, hogy $\mathcal{S}$ egy $(\cup c, \cap c)$ burkolás az S halmazon és legyen Ψ egy Choquet $\mathcal{S}$-kapacitás S-en. Ekkor $\Psi(A) = \sup\{\Psi(B) : B \subseteq A\ B \in \mathcal{S}_\delta\}$ minden $A \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$-ra.

$\square$

A fő tétel második részének bizonyításához az 5. állítást használhatjuk. Legyen A a $T \times \Omega$-nak egy $\mathcal{R}$-analitikus részhalmaza, ahol $T = [0, \infty]$. Az állítás triviális, ha $\alpha_1 := \overline{\mathbb{P}(\pi_\Omega(A))} = 0$, így feltehetjük, hogy $\alpha_1 > 0$. Az $\mathcal{R}$-kapacitás az alábbi módon volt definiálva: $\overline{\Psi}(D) = \mathbb{P}(\pi_\Omega)(D)$. Keressünk egy olyan $B_1 \subseteq A$, $B \in \mathcal{R}_\delta$ és $\mathbb{P}(\pi_\Omega(B_1))$ halmazt, amelyre $\overline{\Psi}(B_1) \geq \frac{\alpha_1}{2}$. Legyen $\psi_1(\omega) := \inf\{\in \mathbb{R}^+ : (t, \omega) \in B_1\}$. Mivel B_1-nek kompaktak a keresztmetszetei, az infimum igazából el is érődik minden $\omega \in \pi_\Omega(B_1)$-re. $\omega \notin \pi_\Omega(B_1)$ esetén az infimum ∞ lesz. Legyen $A_2 := \{(t, \omega) \in A : \omega \notin \pi_\Omega(B_1)\} = A \cap (T \times (\pi_\Omega(B_1))^c)$ Vegyük észre, hogy $A_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ és $\alpha_2 := \mathbb{P}(\pi_\Omega(A_2)) \leq \frac{\alpha_2}{2}$. Feltehető, hogy $\alpha_2 > 0$. keressünk egy olyan $B_2 \subseteq A_2$, $B \in \mathcal{R}_\delta$ részhalmazt, amelyre $\overline{\Psi}(B_2) \geq \frac{\alpha_2}{2}$. Legyen $\psi_2(\omega)$ a ψ_1-hez hasonlóan a B_2 első elérése...stb. Ezeket a lépéseket ismételgetve kapjuk A_i-t, B_i-t, $_i$-t és ψ_i-t. A $\{\pi_\Omega(B_i) : i \in \mathbb{N}\}$ halmazrendszer páronként diszjunkt halmazokból áll a konstrukció miatt. $F := \cup_{i\in\mathbb{N}} \pi_\Omega(B_i)$-re $F \subseteq \pi_\Omega(A)$. A konstrukció miatt α_i szigorú monoton csökkenően tart 0-hoz, amiből $\mathbb{P}(\pi_\Omega(A) \setminus F) = 0$. Legyen $\psi := \inf_{i\in\mathbb{N}} \psi_i$. Erre a ψ függvényre teljesülni fog B-n, hogy $(\psi(\omega), \omega) \in A$.

$\square$