Bencze Tamás

Szürreális számok

(John H. Convay "On Numbers and Games" c. könyve alapján)

Definíció (játék):
1. ha L,R játékok halmazai, akkor (L, R) (L és R rendezett párja) játék
2. "minden játék így keletkezik"

L elemeit (L, R) balopcióinak hívjuk, R elemeit pedig a jobbopcióinak (együttesen opcióknak). Egy x játék generikus balopcióját x^L-el fogom jelölni (a jobbakat pedig x^R-el).

2. azt jelenti, hogy ha egy tulajdonságra teljesül, hogy valahányszor egy játék minden opciójára igaz, akkor magára a játékra is, akkor minden játékra igaz. Ez ekvivalens azzal, hogy nem létezik olyan sorozata játékoknak, amelyben minden elemnek opciója a következő elem.

Definíció ($\leq$, $<$, $=$):
$x \leq y$, ha nincs $y \leq x^L$, sem $y^R \leq x$
$x = y$, ha $x \leq y$ és $y \leq x$
$x < y$, ha $x \leq y$ és $x \neq y$

Definíció (szám):
x szám, ha játék, az opciói számok, és nincs $x^R \leq x^L$
(Innentől, ha nincs külön kiemelve, hogy nem, akkor x, y, z számokat jelölnek.)

Állítás: $x = x$

Bizonyítás indukcióval. (a 2. tulajdonság alapján)
Ha $x \neq x$, akkor van $x^L \geq x$ vagy $x^R \leq x$. De $x^L \geq x^L$ (indukció), tehát az első egyenlőtlenség definíció szerint nem igaz. (a másik ugyanígy.)

Állítás: ha $x \leq y$ és $y \leq z$, akkor $x \leq z$.

Ellenkező esetben lenne $x^L \geq z$, vagy $x \geq z^R$. De ha $x^L \geq z$ akkor $z \geq y$ miatt $x^L \geq y$ is igaz lenne (indukció), ami ellentmond $x \leq y$-nak.
($x \geq z^R$-re ugyanígy.)

Tehát $=$ ekvivalencia-reláció a számokon.

Állítás: $x^L < x$

$x^L \not\geq x$ (ezt korábban bizonyítottuk), tehát azt kell bizonyítani, hogy $x^L \leq x$.
De ha ez nincs így, akkor van $(x^L)^L \geq x$ vagy $x^R \leq x^L$.
Az első (mivel $(x^L)^L \leq x^L$) ellentmond annak, hogy $x^L \not\leq x$, a második pedig annak, hogy x szám.

Állítás: Tetszőleges x, y számokra $x \leq y$ vagy $y \leq x$.

Ha nem $x \leq y$, akkor van $x^L \geq y$ vagy $y^R \leq x$. De $x > x^L$ és $y < y^R$ miatt mindkét esetben $y \leq x$.

Tehát $\leq$ egy (teljes) rendezés a számok $=$ szerinti ekvivalencia-osztályain.

Állítás: Ha egy x játék opciói számok, és egyenlő egy y számmal, akkor szám.
$x^L < y$ (hiszen $x \leq y$) $y < x^R$ (hiszen $x \geq y$), tehát $x^L < x^R$, és ezt akartuk belátni.

Állítás (*): Ha x egy játék, y pedig egy szám, amire teljesül, hogy $x^L < y < x^R$ x összes opciójára, de y semelyik opciójára nem teljesül ugyanez, akkor $x = y$.
Ha $x \leq y$ nem teljesülne, akkor lenne $x^L \geq y$, vagy $x \geq y^R$. Az első ellentmond a feltevésnek, a másodikból pedig következik, hogy $x^R > (x \geq) y^R$. De $x^L < y < y^R$, tehát y^R-re teljesül a feltétel azon része, ami a feltevés szerint y egyik opciójára sem teljesülhetne, ellentmondás. ($x \ngeq y$ ugyanígy.)
Következmény: Ha $y > x$, akkor x-hez jobbopcióként hozzávéve y-t, a kapott játék egyenlő x-el. (Ez akkor is igaz, ha ilyen y-ok tetszőleges halmazát veszünk hozzá.)
Következmény: Ha $x_1^L \geq x_2^L$, akkor ha x balopciói közül elhagyjuk x_2^L-t, akkor a kapott szám egyenlő x-el. (Ez akkor is igaz, ha ilyenek tetszőleges halmazát hagyjuk el.)

Definíció: x rendszám, ha minden opciója rendszám, és nincs jobbopciója.

Állítás: Az x-nél kisebb rendszámok halmazt alkotnak.
Ha $y \ngeq x$ rendszám, akkor $y \leq x^L$ (hiszen y^R nincs).
De {y|$y \leq x^L$, y rendszám} halmazt alkot minden x^L-re (indukció), így ezek uniója is halmaz.

Állítás: Ha x rendszám, akkor $x = (\{y|y < x \text{ rendszám}\}, \emptyset)$
(következik az előző 2 állításból)

Állítás: Ha x-nek nincs jobbopciója, akkor egyenlő $(\{y|y < x$ rendszám$\}, \emptyset)$-vel; tehát rendszám.
Mivel $y < x$, ezért létezik $x^L \geq y$ (hiszen $y^R \leq x$ nem lehet), tehát $(\{y|y < x \text{ rendszám}\}, \emptyset)$-re teljesülnek * állítás feltételei, így egyenlő x-el.

Állítás: $f(x) = \inf\{y|y > f(x^L) \text{ minden } x^L\text{-re}\}$ egy rendezéstartó bijekció a rendszámok és a Neumann-rendszámok között.
Azt kell bizonyítani, hogy f jóldefiniált, rendezéstartó, és minden N-rendszámnak van őse. Mindegyik triviális.

Mj.:$f((\{y|y < x \text{ rendszám}\}, \emptyset)) = \{f(y)|y < x\}$

Állítás: $b(w) = \inf\{\inf\{y|y \text{ rendszám, } y > b(z) \ x \text{ minden } z$ opciójára$\}|x = w\}$ egy jóldefiniált leképezés a számokról a rendszámokra.
Indukció.

$b(x)$-et x születésnapjának hívják.

Állítás: $O_\alpha = \{x|b(x) < \alpha\}$ halmaz. (trivi)

Állítás: $x = (\{y|y \in O_{b(x)}, y < x\}, \{y|y \in O_{b(x)}, y > x\})$ (* állítás miatt)
Következmény: ha $b(x) = b(y)$, $x < y$, akkor létezik $x < z < y$, amire $b(z) < b(x)$

Definíció (sign-expansion):Legyen
$k(x, z) = (\{y|y \in O_z, y < x\}, \{y|y \in O_z, y > x\})$, egy leképezés a számok és rendszámok párjairól a számokba. Egy x szám sign-expansion-jén azt az e_x leképezést értjük a rendszámokból a $\{-, 0, +\}$-ba, amire $e_x(y) = -$, ha $k(x, y) > x$, 0, ha $k(x, y) = x$, és $+$, ha $k(x, y) < x$.
Mj.:Látható, hogy $e_x(y) = 0 \Leftrightarrow b(x) \leq y$

Legyen ezeken a rendezés a lexikografikus rendezés, és $- < 0 < +$.
Állítás: $x \leq y \Rightarrow e_x \leq e_y$
Legyen t az első hely, ahol eltérnek. Ekkor $k(x, t) = k(y, t) = K$ (indukció t-ben, használva a legutóbbi következményt), és K sign-expansion-je$t$-ig megegyezik x-ével, utána 0. Alkalmazva az állítást (indukció) x-re és K-ra, majd K-ra és y-ra, azt kapjuk, amit vártunk.

Tehát $x \to e_x$ rendezéstartó (így injektív).

Állítás: Ez a leképezés szürjektív(-en képez azon a rendszámokból a $\{-, 0, +\}$-ba képező leképezésekbe, amelyek egy ponttól kezdve azonosan 0-k, előtte meg sehol sem 0-k).
Ha s egy ilyen leképezés, akkor legyen $f(s)$ az őse (amennyiben van).
Indukció az első 0 érték helyében: legyen $f(s) = (\{f(t)|t < s, t\text{-ben korábban van az első } 0\}, \{f(t)|t > s, t\text{-ben korábban van az első } 0\})$

Definíció(+,0,-):
$x + y = (\{x^L + y, x + y^L\}, \{x^R + y, x + y^R\})$
$0 = (\emptyset, \emptyset)$
$-x = (\{-x^R\}, \{-x^L\})$

Állítás: $x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$
$\Leftarrow$: Ha $x + z \leq y + z$, akkor $x^L + z \not\geq y + z$ és $x + z \not\geq y^R + z$, tehát (indukció) $x^L \not\geq y$ és $x \not\geq y^R$, tehát (definíció) $x \leq y$

$\Rightarrow$: Ha $x + z \not\leq y + z$, akkor 4 eset van:
$x^L + z \geq y + z$,$x + z^L \geq y + z$, $x + z \geq y^R + z$, $x + z \geq y + z^R$
Az első és a harmadik esetben az előző rész alkalmazható (, és azt adja, hogy $x \not\leq y$, ahogy akartuk). A második szerint $x + z^L \not\leq (y + z)^L$, tehát $x + z^L \not\leq y + z^L$, amire indukció alkalmazható. (a 4.-nél hasonlóan)

Következmény: Ha x, y számok, akkor $x + y$ is szám.

Állítás:
$x + y = y + x$
$0 + x = x$
$(x + y) + z = x + (y + z)$
Indukcióval könnyen bizonyíthatók.

Állítás: $-x + x = 0$

$-x + x \geq 0 \Leftrightarrow (-x + x)^R \not\leq 0$ és $-x + x \not\leq 0^L$ (a 2. nyilván igaz, mert nincs 0^L)
$(-x + x)^R \not\leq 0$, mert ennek balopciója $-x^R + x^R$ vagy $-x^L + x^L$, ami nemnegatív (indukció, $\leq$ definíciója)
($-x + x \leq 0$ ugyanígy megy)

Tehát a számok (= szerinti osztályai) kommutatív csoportot alkotnak az összeadásra nézve.