Morse-Bott függvények az unitér csoporton

Beke Márton

ELTE Matematika Intézet egyéni kutatómunka minikonferencia
2021. december 17.

Problémafelvetés

- $\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}$ kritikus sokaságait ismerjük.
  - Theodore Frankel: Critical submanifolds of the classical groups
- Homológia nem látszik $\rightarrow$ karakterisztikus függvény más együtthatói?

Morse homológia

Definíció (Morse függvény)

Egy sima $f : M \to \mathbb{R}$ függvény Morse, ha kritikus pontjaiban a Hesse mátrix nem elfajult. A negatív altér dimenzióját hívjuk a kritikus pont indexének.

A homológiát a kritikus pontok generálják, az index adja az értékelést, a határleképezés pedig megszámolja, hogy $-\mathrm{grad}\, f$-nek hány integrálgöbréje fut a két pont között.

Morse-Bott homológia

Definíció (Morse-Bott függvény)

f legyen Morse, kivéve, hogy megengedünk kritikus sima sokaságokat. Ezekre csak azt követeljük meg, hogy a normálnyalábon legyen nemelfajult a második derivált.

A kritikus sokaságok szinguláris homológiáiból állítjuk elő a sokaság homológiáját a $\partial\sigma = \partial_N\sigma + \sum_{N' \neq N} p^+(M(\sigma, N'))$ képlet szerint ($\sigma \to N$, p^+ pedig a σ képéből N'-be futó integrálgörbék végpontjainak uniója).

Eszközök

- Osztályfüggvények $\to$ elég diagonális mátrixokra számolni.
- Meg kell érteni Lie-csoportban a centralizátorokat és a konjugáltosztályokat.
  - T. Frankel:The geometry of physics Appendix E
- Mindkettő beágyazott sima sokaság lesz.

Tétel

A Morse függvények sűrű halmazt alkotnak a C^2 topológiában.

Minden kritikus sokaságra egy-egy f_i Morse-függvényt választva $f + \epsilon \sum f_i$ Morse lesz kellően kis ϵ-ra.

$U(2)$

Ez az eset még elemi számolásokkal is elvégezhető.

- $\mathrm{diag}(-1, -1)$ izolált minimum
- $\mathrm{diag}(1, 1)$ izolált maximum
- $\mathrm{diag}(1, -1)$ orbitja egy kritikus gömb

Így a triviális

$$0 \to \mathbb{Z}_{(4)} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_{(3)} \to 0_{(2)} \to \mathbb{Z}_{(1)} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_{(0)} \to 0$$

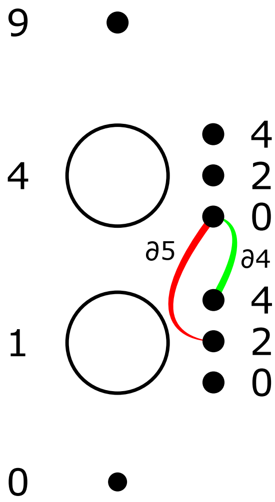
komplexust kapjuk, $\partial_1 = 0$ hiszen $U(2)$ összefüggő.

$U(3)$

- A perturbációs módszerrel számolunk.
- Hasonlóan egy-egy izolált globális szélsőértékhely, és két kritikus $\mathbb{CP}^2$ melyek $\mathrm{diag}(1, \pm 1, -1)$ orbitjai.
- Összefüggőség, illetve monotonitási okokból $\partial_1 = \partial_5 = 0$.
- ∂_4-hez számolás.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$10 \leq$
$H_i(U(3))$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0

Ábra



Köszönöm a figyelmet!