Egyéni kutatómunka 2 beszámoló

Andó-Kinorányi Szabolcs

2021. december 8.

1. Bevezetés

A kutatómunka során azzal foglalkoztam, hogy bizonyos K test feletti algebrák két elemének összeszorzásához hány K-beli szorzást kell elvégezni úgy, hogy az összeszorzandó számok függnek a bemenettől (azaz egyik sem konstans).

Két $n \times n$-es mátrix összeszorzása a szokásos algoritmussal n^3 szorzást igényel (mind az n^2 mezőhöz két vektort kell skalárisan összeszorozni, ami n szorzás). Felmerül a kérdés, hogy ez vajon optimális-e. A választ Strassen adta meg a [10] cikkében 1969-ben: nem optimális, lehetséges ugyanis olyan algoritmus megadása, mely 8 helyett 7 szorzással össze tud szorozni két 2×2-es mátrixot. Részben ez motiválta, hogy elkezdték vizsgálni a kutatómunkám során tárgyalt problémakört.

1.1. A tenzorrang

1.1. Definíció (Tenzorrang)**.** Ha $U_1, ..., U_n$ vektorterek K test felett, akkor egy $T \in U_1 \otimes ... \otimes U_n$ tenzor *tenzorrangja* az a legkisebb r szám, melyre T előáll mint r db elemi tenzor összege.

1.2. Megjegyzés. Egy $n \times m$-es $K^{n*} \otimes K^m$-beli mátrixra a mátrixrang és a tenzorrang egybeeső fogalmak.

A motiváció a tenzorrang fogalmának bevezetésére az, hogy segítségével lehet becsülni a szükséges szorzások számát egy bilineáris leképezést kiszámító algoritmusban. Ezt úgy tudjuk precízzé tenni, hogy egy A algebrához K felett tartozik egy $\phi : A \times A \to A$ K-lineáris leképezés, azaz a kanonikus izomorfizmusokon keresztül ϕ tekinthető egy $A^* \otimes A^* \otimes A$-beli tenzornak. Ennek a rangját akarjuk összefüggésbe hozni a ϕ kiszámolásához szükséges szorzások számával.

1.2. Multiplikatív és bilineáris bonyolultság

Itt nem részletezzük, hogy mit értünk az alatt, hogy egy algoritmus kiszámol egy ϕ bilineáris függvényt. Például a [11] és a [5] cikkekben ez szépen formalizálva van. A továbbiakban egy α algoritmus *multiplikatív bonyolultságának* fogjuk nevezni azt a mennyiséget, hogy egy ilyen algoritmus hány olyan szorzást hajt végre, mely nem konstanssal történik. Ezt a részt teljes egészében a [8] könyv alapján dolgoztam ki (14. fejezet).

1.3. Definíció (Bilineáris leképezés bonyolultsága)**.** Legyen K egy test, U, V, W véges dimenziós K-vektorterek rögzített bázisokkal. Legyen továbbá

$$\phi : U \times V \to W$$

egy bilineáris leképezés. Ekkor definiálhatjuk az alábbi kétféle bonyolultságot.

- A ϕ leképezés *multiplikatív bonyolultsága* a legkisebb olyan $h \in \mathbb{N}$ természetes szám, melyre létezik olyan α algoritmus, mely kiszámítja ϕ-t, és multiplikatív bonyolultsága h. Ezt a mennyiséget $L(\phi)$-vel jelöljük.

- A ϕ leképezés *bilineáris bonyolultsága* a legkisebb olyan $h \in \mathbb{N}$ természetes szám, melyre ϕ-nek van h hosszúságú bilineáris kiszámítása. Ezt a dolgozatban ismét nem definiáljuk, de ez megegyezik ϕ tenzorrangjával, ha $U^* \otimes V^* \otimes W$-beli tenzornak tekintjük a szokásos kanonikus izomorfizmussal. Ezt a mennyiséget $R(\phi)$-vel jelöljük.

1.4. Állítás ([8], 14.8.). $L(\phi) \le R(\phi) \le 2 \cdot L(\phi)$.

Ha K egy test, és A egy véges dimenziós K-algebra, akkor az A-beli szorzás egy

$$\phi : A \times A \to A$$

bilineáris függvény. Speciálisan van multiplikatív és bilineáris bonyolultsága.

1.5. Definíció (Algebra bonyolultsága). Ha A egy K-algebra, melynek szorzását ϕ-vel jelöljük, akkor

$$L(A) := L(\phi), \quad R(A) := R(\phi).$$

2. Kvaternióalgebrák

Az első cél a szokásos Hamilton-féle kvaterniók $\mathbb{H}$ algebrájának rangjának meghatározása volt. Ennek egy megválaszolását találtam a [5] cikkben. Ott bizonyítva van, hogy ez a rang pontosan 8. Ezt a bizonyítást némi módosítással általánosítani lehetett más kvaternióalgebrák rangjának becslésére is, erről később lesz szó.

2.1. Tétel (Howell és Lafon, [5]). $R(\mathbb{H}) = 8$.

Leírjuk a klasszikus eredményt, miszerint $M_2(\mathbb{C})$ szorzástenzorának tenzorrangja 7. Strassen [10] bizonyította hogy ez a szám legfeljebb 7, míg Winograd [11] belátta, hogy legalább 7.

2.2. Tétel (Strassen [10], Winograd [11]). $M_2(\mathbb{C})$ szorzástenzorának rangja 7.

Strassen eredménye tetszőleges K testre általánosítható:

2.3. Tétel (Strassen, 1969, [10]). Ha K test, akkor $M_2(K)$ szorzástenzora megkapható az alábbi összegből:

$$\begin{aligned}(E_{11}+E_{22})\otimes(E_{11}+E_{22})\otimes(E_{11}+E_{22})+(E_{21}+E_{22})\otimes E_{11}\otimes(E_{21}-E_{22})+\\ +E_{11}\otimes(E_{12}-E_{22})\otimes(E_{12}+E_{22})+E_{22}\otimes(-E_{11}+E_{21})\otimes(E_{21}+E_{11})+\\ +(E_{11}+E_{12})\otimes E_{22}\otimes(-E_{11}+E_{12})+(-E_{11}+E_{21})\otimes(E_{11}+E_{12})\otimes E_{22}+\\ +(E_{12}-E_{22})\otimes(E_{21}+E_{22})\otimes E_{11}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Speciálisan a szorzástenzor rangja legfeljebb 7.

Ezután általános kvaternióalgebrákkal kezdtünk foglalkozni. Alább bevezetek néhány jelölést.

2.4. Jelölés. Legyen K egy test, hogy $\mathrm{char} K \neq 2$. Legyen $a, b \in K$, és tekintsük a $K(a,b)$ kvaternióalgebrát. Vegyük $K(a,b)$-ben (mint K-vektortér) a szokásos $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázist, és jelöljük ehhez $K(a,b)^*$-ban a duális bázist $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ módon.

2.5. Jelölés. Jelölje $T_K(a,b) \in K(a,b)^* \otimes K(a,b)^* \otimes K(a,b)$ a $K(a,b)$ kvaternióalgebra szorzástenzorát.

Meg szerettük volna tehát határozni a $T_K(a,b)$ tenzornak a tenzorrangját, azaz a korábbi jelöléseinkkel élve az $R(K(a,b))$ számot. Azt már tudjuk, hogy bizonyos esetekben ez a rang maximum 7 lesz, hiszen a, b valamely választásai mellett teljesülni fog, hogy $K(a,b) \cong M_2(K)$, mint K-algebra, márpedig $M_2(K)$ szorzástenzorának legfeljebb 7 a rangja.

Könnyen ellenőrizhető az alábbi

2.6. Állítás. Az szorzástenzorunkat megadja a

$$\begin{aligned}T_K(a,b) =& \varepsilon_1\otimes\varepsilon_1\otimes 1+\varepsilon_1\otimes\varepsilon_2\otimes\mathbf{i}+\varepsilon_1\otimes\varepsilon_3\otimes\mathbf{j}+\varepsilon_1\otimes\varepsilon_4\otimes\mathbf{k}\\ &\varepsilon_2\otimes\varepsilon_1\otimes\mathbf{i}+a\varepsilon_2\otimes\varepsilon_2\otimes 1+\varepsilon_2\otimes\varepsilon_3\otimes\mathbf{k}+a\varepsilon_2\otimes\varepsilon_4\otimes\mathbf{j}\\ &\varepsilon_3\otimes\varepsilon_1\otimes\mathbf{j}-\varepsilon_3\otimes\varepsilon_2\otimes\mathbf{k}+b\varepsilon_3\otimes\varepsilon_3\otimes 1-b\varepsilon_3\otimes\varepsilon_4\otimes\mathbf{i}\\ &\varepsilon_4\otimes\varepsilon_1\otimes\mathbf{k}-a\varepsilon_4\otimes\varepsilon_2\otimes\mathbf{j}+b\varepsilon_4\otimes\varepsilon_3\otimes\mathbf{i}-ab\varepsilon_4\otimes\varepsilon_4\otimes 1\end{aligned}$$

összefüggés.

2.7. Példa. $T_{\mathbb{Q}}(-1,-1)$ rangját könnyű meghatározni. Egyrészt, tudjuk, hogy $T_{\mathbb{R}}(-1,-1)$ rangja 8 (2.1. tétel), azaz $T_{\mathbb{Q}}(-1,-1)$ rangja legalább 8, ugyanis testbővítésnél a tenzorrang nem növekedhet. Sőt, azt is tudjuk, hogy ez a rang legfeljebb 8, ugyanis a [5] cikkben leírt konkrét konstrukció $\mathbb{Q}$ felett is működik, azaz $T_{\mathbb{Q}}(-1,-1)$ rangja 8.

Ahogy korábban is írtam, kiderült, hogy a [5] cikkben leírt bizonyítást módosítani lehet, hogy részben működjön általános kvaternióalgebrák fölött is, azonban csak részben, hiszen az nem jön ki belőle, hogy ez a rang legfeljebb 8, csak az alábbi

2.8. Állítás. Ha K karakterisztikája nem 2, akkor a $K(a,b)$ kvaternióalgebra $T_K(a,b)$ szorzástenzorának tenzorrangjáról a következő mondható el:

1. Ha $K(a,b) \cong M_2(K)$, akkor a tenzorrang legfeljebb 7.
2. Ha pedig ferdetest, akkor a tenzorrang legalább 8.

Ehhez használtuk az alábbi tételt. Ennek bizonyítása megtalálható a [4] internetes jegyzetben (12. Tétel).

2.9. Tétel. A $K(a,b)$ kvaternióalgebrára ekvivalensek az alábbiak:

1. $K(a,b) \cong M_2(K)$
2. $K(a,b)$ nem ferdetest
3. az $ax_1^2 + bx_2^2 = 1$ egyenletnek van K-ban megoldása.

2.1. Felső korlát

A következő lépés annak az esetnek a végigszámolása volt, mikor $K(a,b) \cong M_2(K)$, hogy akkor hogyan jön ki az, hogy a tenzorrang legfeljebb 7. Ebből kijött egy konrét felbontás. Ez a számolás adta az ötletet a felső korláthoz. Definiálhatjuk az alábbi tenzort.

2.10. Definíció. Legyen $a,b,c,d \in K$ olyan elemek, melyekre $a \neq 0, b \neq 0, d \neq 0$. Jelöljük $S_K(a,b,c,d) \in K(a,b)^* \otimes K(a,b)^* \otimes K(a,b)$ módon az alábbi tenzort:

$$\begin{aligned}
S_K(a,b,c,d) = {}& \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \tfrac{c-1}{d}\varepsilon_3 + \tfrac{1-ac}{d}\varepsilon_4\right) \otimes \left(\varepsilon_1 + \tfrac{1}{d}\varepsilon_3 + \tfrac{ac}{d}\varepsilon_4\right) \otimes \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathbf{i} + \tfrac{1-ac}{2bd}\mathbf{j} + \tfrac{1-c}{2bd}\mathbf{k}\right) + \\
&+ \left(\varepsilon_1 + \tfrac{1}{d}\varepsilon_3 + \tfrac{ac}{d}\varepsilon_4\right) \otimes \left(-\varepsilon_1 + a\varepsilon_2 + \tfrac{1-ac}{d}\varepsilon_3 + \tfrac{ac-a}{d}\varepsilon_4\right) \otimes \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2a}\mathbf{i} + \tfrac{c-1}{2bd}\mathbf{j} + \tfrac{ac-1}{2abd}\mathbf{k}\right) + \\
&+ \left(\varepsilon_1 - \tfrac{1}{d}\varepsilon_3 - \tfrac{ac}{d}\varepsilon_4\right) \otimes \left(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \tfrac{c-1}{d}\varepsilon_3 + \tfrac{1-ac}{d}\varepsilon_4\right) \otimes \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathbf{i} + \tfrac{1-ac}{2bd}\mathbf{j} + \tfrac{1-c}{2bd}\mathbf{k}\right) + \\
&+ \left(\varepsilon_1 + a\varepsilon_2 + \tfrac{1-ac}{d}\varepsilon_3 + \tfrac{ac-a}{d}\varepsilon_4\right) \otimes \left(\varepsilon_1 - \tfrac{1}{d}\varepsilon_3 - \tfrac{ac}{d}\varepsilon_4\right) \otimes \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2a}\mathbf{i} + \tfrac{c-1}{2bd}\mathbf{j} + \tfrac{ac-1}{2abd}\mathbf{k}\right) + \\
&+ \left(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \tfrac{c-1}{d}\varepsilon_3 + \tfrac{1-ac}{d}\varepsilon_4\right) \otimes \left(\varepsilon_1 + a\varepsilon_2 + \tfrac{1-ac}{d}\varepsilon_3 + \tfrac{ac-a}{d}\varepsilon_4\right) \otimes \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2bd}\mathbf{j} + \tfrac{c}{2bd}\mathbf{k}\right) + \\
&+ \left(-\varepsilon_1 + a\varepsilon_2 + \tfrac{1-ac}{d}\varepsilon_3 + \tfrac{ac-a}{d}\varepsilon_4\right) \otimes \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \tfrac{c-1}{d}\varepsilon_3 + \tfrac{1-ac}{d}\varepsilon_4\right) \otimes \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2bd}\mathbf{j} - \tfrac{c}{2bd}\mathbf{k}\right).
\end{aligned}$$

2.11. Megjegyzés. Ez úgy kapcsolódik a mátrix esethez, hogy ha $K(a,b) \cong M_2(K)$, akkor valamely $c,d \in K$-ra $ac^2+bd^2 = 1$ (2.9. tétel). Ha ilyen c,d párt választunk, akkor $S_K(a,b,c,d)+4\varepsilon_1\otimes\varepsilon_1\otimes 1 = T_K(a,b)$. Ez adta az ötletet a definícióhoz.

Ez az alábbi állítás miatt hasznos:

2.12. Állítás. Ha $1-ac^2 \neq 0$, akkor $T_K(a,b) - \frac{bd^2}{1-ac^2} S_K(a,b,c,d) = \left(1 + 3\frac{bd^2}{1-ac^2}\right)\varepsilon_1\otimes\varepsilon_1\otimes 1 + \left(1 - \frac{bd^2}{1-ac^2}\right)\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2 \otimes \mathbf{i} + \left(1 - \frac{bd^2}{1-ac^2}\right)\varepsilon_2 \otimes \varepsilon_1 \otimes \mathbf{i} + \left(a - a\frac{bd^2}{1-ac^2}\right)\varepsilon_2 \otimes \varepsilon_2 \otimes 1$.

Ha ismerjük a tényt, hogy a $2 \times 2 \times 2$ tenzorok körében a maximális rang 3, akkor ebből máris kaphatjuk azt a nemtriviális felső korlátot, hogy a rang mindig legfeljebb 9. Így van ez minden c,d-vel, ha $d \neq 0$, speciálisan igaz az alábbi

2.13. Állítás. $T_K(a,b) - bS_K(a,b,0,1)$ tenzorrangja mindig legfeljebb 3.

2.14. Következmény. $T_K(a,b)$ tenzorrangja mindig legfeljebb 9.

2.15. Megjegyzés. Az előző 2.14. következménynek konstruktív a bizonyítása, azaz megkaphatunk belőle egy konkrét felbontást kilenc elemi tenzor összegére.

Ha azonban a 2.12 állításban kijövő tenzor 2 rangú, akkor egy 8-as felső korlát is kijöhet, és ez így is van sok speciális esetben. Némi számolás után az alábbi állításhoz jutunk:

2.16. Következmény. Ha az

$$ax_1^2 + b(a+3)(a-1)x_2^2 = 1$$

egyenletnek van K-ban megoldása, akkor $T_K(a,b)$ rangja legfeljebb 8.

2.17. Példa. A fentiekből kiszámolható, hogy az alábbi példákra a tenzorrang 8: $T_{\mathbb{Q}}(-1,-1)$, $T_{\mathbb{Q}}(5,2)$, $T_{\mathbb{Q}}(3,2)$, $T_{\mathbb{Q}}(-5,-7)$.

Ezen példákból kijön az alábbi állítás is:

2.18. Következmény. Ha K az $\mathbb{R}, \mathbb{Q}_3, \mathbb{Q}_5$ testek valamelyike (itt $\mathbb{Q}_p$ a p-adikus számok teste), akkor

$$K(a,b) \text{ ferdetest } \Leftrightarrow T_K(a,b) \text{ rangja pontosan } 8.$$

A félév vége felé megtaláltam a választ egy 2013-as Vladimir Lysikov által írt cikkben:

2.19. Tétel (Lysikov, 2013, [7], 17. Tétel)**.** Ha $\mathrm{char} K \neq 2$, és $K(a,b)$ ferdetest, akkor $R(K(a,b)) = 8$, azaz $T_K(a,b)$ rangja 8.

3. $2 \times 2 \times 2$-es tenzorok

Az vol a következő cél, hogy meghatározzuk a $\mathbb{Q}^2 \otimes \mathbb{Q}^2 \otimes \mathbb{Q}^2$ tenzortéren a $GL_2(\mathbb{Q}) \times GL_2(\mathbb{Q}) \times GL_2(\mathbb{Q})$ csoport hatásának pályáit. Ezt úgy tettük meg, hogy meghatároztunk minden orbitról pontosan egy tenzort. Ehhez a részhez használtam a [9] cikket, ahol $\mathbb{R}$ felett végezték el ugyanezt a munkát.

3.1. Definíció. Definiáljuk az alábbi tenzorokat:

1. $D_0 = 0$
2. $D_1 = \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$
3. $D_2 = \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mathbf{e} \otimes \mathbf{f} \otimes \mathbf{f}$
4. $D_2' = \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mathbf{f} \otimes \mathbf{e} \otimes \mathbf{f}$
5. $D_2'' = \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mathbf{f} \otimes \mathbf{f} \otimes \mathbf{e}$
6. $G(d) = \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mathbf{e} \otimes \mathbf{f} \otimes \mathbf{f} + d \cdot \mathbf{f} \otimes \mathbf{e} \otimes \mathbf{f} + \mathbf{f} \otimes \mathbf{f} \otimes \mathbf{e}$ $\forall d$ négyzetmentes egészre.

3.2. Tétel. Minden $\mathbb{Q}^2 \otimes \mathbb{Q}^2 \otimes \mathbb{Q}^2$-beli tenzor a $GL_2(\mathbb{Q}) \times GL_2(\mathbb{Q}) \times GL_2(\mathbb{Q})$ csoporthatást tekintve azonos pályán van az alábbi tenzorok közül pontosan eggyel (azaz az alábbi tenzorok parametrizálják az orbitokat):

$$D_0, D_1, D_2, D_2', D_2'', G(d) \text{ valamely } d \text{ négyzetmentes egészre.}$$

Ez tehát végtelen sok tenzor, hiszen $G(d)$ egy végtelen családot jelöl (lehet $d = 0$ is).

3.3. Tétel. Az alábbi táblázat mondja meg az előző tételben az egyes tenzorok rangját.

Tenzor	**Rang**
D_0	0
D_1	1
D_2	2
D_2'	2
D_2''	2
$G(1)$	2
$G(d) (d \neq 1)$	3

3.4. Megjegyzés. A bizonyítás egy részének alapötlete a [1] forrásban megtalálható válaszon alapul.

Ebből az eredményből kijön, hogy a 2.16. következményben leírt módszer a legáltalánosabb feltétel arra, hogy a $T_{\mathbb{Q}}(a,b) - \frac{bd^2}{1-ac^2} S_{\mathbb{Q}}(a,b,c,d)$ tenzor rangja legfeljebb 2 legyen, azaz hogy az $S_{\mathbb{Q}}(a,b,c,d)$ tenzor vizsgálatának segítségével próbáljuk meg belátni, hogy $T_K(a,b)$ rangja 8.

3.5. Következmény. Ha a $T_{\mathbb{Q}}(a,b) - \frac{bd^2}{1-ac^2} S_{\mathbb{Q}}(a,b,c,d)$ tenzor rangja legfeljebb 2, és $\mathbb{Q}(a,b)$ ferdetest, akkor valamely r nemnulla racionális számra elmondható, hogy $a_0 = \frac{a}{r^2}$ esetén $\mathbb{Q}(a,b) \cong \mathbb{Q}(a_0,b)$, és az

$$a_0 x_1^2 + b(a_0+3)(a_0-1)x_2^2 = 1$$

egyenletnek van racionális megoldása. Ez pont a 2.16. következményben leírt egyenlet.

4. Általános tételek

Később fény derült rá, hogy a tárgyalt témának nagy szakirodalma van, és általános tételeket is bizonyítottak már. Alább látható kettő a legfontosabbak közül.

4.1. Az Alder-Strassen korlát, illetve Heintz és Morgenstern tétele

Az ismert legáltalánosabb alsó korlátot ezen bonyolultságokra az alábbi tétel adja.

4.1. Tétel (Alder és Strassen, [2])**.** Legyen K végtelen test, és A tetszőleges K-algebra. Jelöljük ϕ-vel az A-beli szorzást, és legyen ℓ az A-beli maximális kétoldali ideálok száma. Ekkor

$$L(\phi) \geq 2 \cdot \dim A - \ell.$$

4.2. Definíció (Minimális rang)**.** Ha K egy végtelen test és A egy véges dimenziós K-algebra, akkor azt mondjuk, hogy $R(A)$ *minimális*, ha az 4.1. Alder-Strassen tételben leírt becslés éles $R(A)$-ra, azaz $R(A) = 2\dim A - |\{M \lhd A : M \text{ maximális}\}|$.

4.3. Tétel (Heintz és Morgenstern, [6])**.** Ha K algebrailag zárt, és A egy K-algebra, és bármely $M \lhd A$ maximális ideálra A/M ferdetest, akkor az alábbiak ekvivalensek:

(i) $R(A)$ minimális.

(ii) Létezik $\omega_1, ..., \omega_m \in J(A)$, hogy

$$J(A) = L + A\omega_1 A + ... + A\omega_m A = R + A\omega_1 A + ... + A\omega_m A,$$

ahol $L := \{x \in J(A) : x \cdot J(A) = 0\}, R := \{y \in J(A) : J(A) \cdot y = 0\}$, továbbá $A\omega_i A = \sum_{f\in\mathbb{N}} K\omega_i^f$, és ha $i \neq j$, akkor $\omega_i \omega_j = 0$.

4.4. Megjegyzés. Az összes minimális rangú algebra klasszifikálva van végtelen (illetve elég sok elemű véges) test fölött, ez az eredmény a [3] cikkben található.

4.2. Egy $\mathbb{C}$ feletti négydimenziós algebracsalád

A komplex számtest felett nem túl érdekes a kvaternióalgebrák vizsgálata, hiszen bármely $a \neq 0 \neq b$ komplex számok esetén $\mathbb{C}(a,b) \cong M_2(\mathbb{C})$. Ez a 2.9. tételből gyakorlatilag azonnal következik. Mi lenne azonban, ha megengednénk, hogy a vagy b nulla legyen? Ezt természetesen megtehetjük, sőt, ennek akármilyen K test felett van értelme.

4.5. Definíció. Legyen K egy test, melyre $\mathrm{char}K \neq 2$, és a, b tetszőleges elemek benne. Ekkor definiáljuk a

$$K(a,b) := K\langle x,y\rangle/(x^2-a, y^2-b, xy-yx)$$

algebrát (itt $K\langle x,y\rangle$ a szabad algebra). Vezessük be a következő jelöléseket: $\mathbf{i} = [x], \mathbf{j} = [y], \mathbf{k} = [xy]$ választással. Vegyük észre, hogy $a \neq 0 \neq b$ esetén ez pont a megfelelő kvaternióalgebra lesz.

4.6. Állítás. $\dim K(a,b) = 4$, és bázisa $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Az általános tételek segítségével a kutatómunka során levezettük az alábbi tételt.

4.7. Állítás. Ha $a, b \in \mathbb{C}$, akkor az alábbi három eset közül pontosan egy áll fenn.

(1) Ha $a \neq 0 \neq b$, akkor $\mathbb{C}(a,b) \cong M_2(\mathbb{C})$. Ekkor $R(\mathbb{C}(a,b)) = 7$. (Ezt persze már láttuk: 2.2. tétel.)

(2) Ha a, b közül pontosan egy 0, akkor $\mathbb{C}(a,b) \cong \mathbb{C}(1,0)$. Ekkor $R(\mathbb{C}(a,b)) = 6$.

(3) Ha a fenti egyik eset sem áll fenn, akkor persze $a = b = 0$. Erre az esetre teljesül, hogy $R(\mathbb{C}(0,0)) = 8$.

Hivatkozások

[1] URL: https://math.stackexchange.com/questions/1905543/find-the-rank-of-the-tensor (elérés dátuma 2021. 10. 10.).

[2] A. Alder és V. Strassen. "On the algorithmic complexity of associative algebras". *Theoretical Computer Science* 15.2 (1981), 201–211. old. ISSN: 0304-3975. DOI: https://doi.org/10.1016/0304-3975(81)90070-0. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304397581900700.

[3] Markus Bläser. "Algebras of Minimal Rank over Arbitrary Fields". *STACS 2003*. Szerk. Helmut Alt és Michel Habib. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003, 403–414. old. ISBN: 978-3-540-36494-8.

[4] Zábrádi Gergely. *Kvaternióalgebrák*. URL: https://zabradi.web.elte.hu/Jegyzetek/kvaternio.pdf.

[5] Thomas D. Howell és Jean Lafon. *The Complexity of the Quaternion Product*. Techn. jel. USA, 1975.

[6] Joos Heintz és Jacques Morgenstern. "On associative algebras of minimal rank". *Applied Algebra, Algorithmics and Error-Correcting Codes*. Szerk. Alain Poli. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1986, 1–24. old. ISBN: 978-3-540-38813-5.

[7] V. V. Lysikov. "On the algebras of almost minimal rank". *Discrete Mathematics and Applications* 22.5-6 (2012), 493–510. old. DOI: doi:10.1515/dma-2012-034. URL: https://doi.org/10.1515/dma-2012-034.

[8] Mohammad A. Shokrollahi Peter Bürgisser Michael Clausen. *Algebraic Complexity Theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Berlin, Heidelberg, 1997. ISBN: 978-3-662-03338-8. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-03338-8.

[9] Vin de Silva és Lek-Heng Lim. "Tensor Rank and the Ill-Posedness of the Best Low-Rank Approximation Problem". *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 30.3 (2008), 1084–1127. old. DOI: 10.1137/06066518X. eprint: https://doi.org/10.1137/06066518X. URL: https://doi.org/10.1137/06066518X.

[10] Volker Strassen. "Gaussian elimination is not optimal". *Numerische Mathematik* 13 (1969), 354–356. old. DOI: 10.1007/BF02165411.

[11] S. Winograd. "On multiplication of 2 × 2 matrices". *Linear Algebra and its Applications* 4.4 (1971), 381–388. old. ISSN: 0024-3795. DOI: https://doi.org/10.1016/0024-3795(71)90009-7. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0024379571900097.